Zum Pfadverhalten von Markovschen Prozessen, die mit Lévy-Prozessen vergleichbar sind

von

René Leander Schilling

aus Dillingen a. d. Donau

Zum Pfadverhalten von Markovschen Prozessen, die mit Lévy-Prozessen vergleichbar sind

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

René Leander Schilling

aus Dillingen a. d. Donau

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 26. 7. 1994

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. Klaus Brodersen

Erstberichterstatter: Privatdozent Dr. Niels Jacob

Zweitberichterstatter: Professor Dr. Heinz Bauer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **2**

1 Grundlagen **16**

1.1 Zur Notation 16
1.2 Halbgruppen von Operatoren 18
1.3 Stochastische Prozesse 21
1.4 Lévy–Prozesse und negativ definite Funktionen 25

2 Subordination und Bernstein–Funktionen **31**

3 Elementare Pfadeigenschaften Lévyscher und mit diesen vergleichbarer Prozesse **49**

3.1 Ein Reflexionsprinzip für Lévy–Prozesse 49
3.2 Vergleichbare Prozesse und ihre Übergangswahrscheinlichkeiten 59

4 Pfadeigenschaften vergleichbarer Prozesse: Variation und Hausdorffsche Dimension **70**

4.1 Die Variation vergleichbarer Prozesse 71
4.2 Die Hausdorff–Dimension vergleichbarer Prozesse 80

5 Eine Darstellungsformel für die Erzeuger subordinierter Halbgruppen **106**

5.1 Stieltjes–Funktionen und vollständige Bernstein–Funktionen 107
5.2 Eine Integraldarstellung des Erzeugers 118
5.3 Zum Definitionsbereich des Erzeugers 130

Literaturverzeichnis **141**

Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt einige Aspekte des Pfadverhaltens von LÉVY–Typ Prozessen mit Werten in $\mathbb{R}^d$, die mit d–dimensionalen LÉVYschen Prozessen vergleichbar sind. Das Augenmerk gilt dabei vornehmlich Fragen der Regularität, der λ–Variation und der HAUSDORFFschen Dimension der Pfade.

Eine zentrale Rolle in unseren Ausführungen wird der Begriff der *Vergleichbarkeit* von Prozessen spielen. Vom analytischen Standpunkt aus könnte man zwei Prozesse vergleichbar nennen, wenn die Erzeuger der zu den Prozessen gehörenden Halbgruppen vergleichbar sind, genauer, wenn die Symbole der Erzeuger sich gegeneinander abschätzen lassen. Für probabilistische Belange bietet sich jedoch eher ein Vergleich der Prozesse auf der Ebene der Übergangswahrscheinlichkeiten an. Beide Konzepte werden wir im folgenden darstellen.

Ein stochastischer Prozeß $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^d, X_t, t \geq 0)$ mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, der stetig in Wahrscheinlichkeit ist, heißt d–dimensionaler LÉVY–Prozeß. LÉVY–Prozesse sind auf Grund ihrer Definition translationsinvariante FELLER–Prozesse, deren Übergangswahrscheinlichkeiten eine stark stetige Faltungshalbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ bilden. Die Verteilung $\mathbb{P}^0_{X_t}$ der Zufallsvariable X_t ist somit unbegrenzt teilbar, ihre FOURIER–Transformierte

$$\widehat{\mathbb{P}^0_{X_t}}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i(\xi,x)}\, \mathbb{P}^0_{X_t}(dx) = \mathrm{e}^{-ta(\xi)}$$

durch die Angabe des *charakteristischen Exponenten* a eindeutig bestimmt. Als charakteristische Exponenten kommen genau die stetigen *negativ definiten* Funktionen mit $a(0) = 0$ in Frage, siehe [6] Theorem 8.3, für die Definition, für elementare Eigenschaften und die LÉVY–KHINCHINE–Darstellung negativ definiter Funktionen vgl. auch Abschnitt 1.4. Da für Testfunktionen $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\left(\frac{T_t u - u}{t}\right)^{\wedge}(\xi) = \left(\frac{\mathbb{P}^0_{X_t} \star u - u}{t}\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{-ta(\xi)} - 1}{t}\, \hat{u}(\xi) \xrightarrow{t\downarrow 0} -a(\xi)\hat{u}(\xi)$$

im Sinne der Konvergenz im Mittel gilt, erhalten wir für den Erzeuger A des Prozesses bzw. der Halbgruppe

$$Au(x) = -(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{-i(x,\xi)}\, d\xi \qquad (u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)),$$

d. h. wir können A als *Pseudodifferentialoperator* $-a(D)$ mit *Symbol* $-a(\xi)$ betrachten.

Es bietet sich nunmehr an, zu Pseudodifferentialoperatoren überzugehen, deren Symbole $(x,\xi) \mapsto p(x,\xi)$, $x,\xi \in \mathbb{R}^d$, auch vom Aufenthaltsort x abhängen und somit aus dem bisherigen translationsinvarianten Kontext fallen. Notwendig dafür, daß der Operator

$$-p(x,D)u(x) := -(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} p(x,\xi)\hat{u}(\xi) \mathrm{e}^{-i(x,\xi)}\, d\xi \qquad (u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)),$$

einen FELLER–Prozeß erzeugt, ist die Forderung, daß das Symbol $p(x,\xi)$ stetig und für jedes x in der Variablen ξ negativ definit ist (vgl. COURRÈGE [17]). Hinreichende Bedingungen an $p(\cdot,\cdot)$ gaben JACOB [47]–[49], HOH und JACOB [42] und, über die Lösung des Martingalproblems zu $p(x,D)$, HOH [39]–[41].

Die wesentliche Forderung ist dabei, daß das Symbol $p(x,\xi)$ mit einer stetigen negativ definiten Funktion a *vergleichbar* ist, daß also

$$ca(\xi) \le p(x,\xi) \le Ca(\xi) \qquad (x,\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi| \text{ groß}) \tag{1}$$

mit zwei Konstanten $0 < c \le C$ erfüllt ist.

Dieser *analytisch* motivierten Vergleichbarkeit von Prozessen tritt die Vergleichbarkeit auf der Ebene der Übergangswahrscheinlichkeiten zur Seite. Zwei MARKOV–Prozesse $(\Omega, \mathfrak{A}, \{\mathbb{P}^x\}_{x\in\mathbb{R}^d}, \mathbb{R}^d, X_t, \mathfrak{F}_t, t \ge 0)$ und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{A}}, \{\tilde{\mathbb{P}}^x\}_{x\in\mathbb{R}^d}, \mathbb{R}^d, s\tilde{X}_t, \tilde{\mathfrak{F}}_t, t \ge 0)$, die zum Zeitpunkt $t = 0$ im selben Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ starten und sich dann im weiteren Zeitverlauf gemäß

$$k_{t,x}\, \tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t \in B) \le \mathbb{P}^x(X_t \in B) \le K_{t,x}\, \tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t \in B) \qquad (t \ge 0, B \in \mathfrak{B}) \tag{2}$$

mit nur vom Startpunkt und der Zeit abhängenden Konstanten $0 < k_{t,x} \le K_{t,x} < \infty$ entwickeln, nennen wir *vergleichbar*. Gilt für die Prozesse die erste Ungleichung in (2), dann schreiben wir $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge0} \prec \{X_t\}_{t\ge0}$, ist die zweite Ungleichung erfüllt, $\{X_t\}_{t\ge0} \prec \{\tilde{X}_t\}_{t\ge0}$. Im folgenden werden wir häufig eine der folgenden Annahmen an die Vergleichskonstanten benötigen:

(A.1) Es gilt $0 < c \le k_{t,x}$ gleichmäßig in t und x;

(A.2) Es gilt $K_{t,x} \le C < \infty$ gleichmäßig in t und x;

(A.3) Es gilt $\liminf_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} k_{\delta_n,x}^{-1/\delta_n} < \infty$ für eine Nullfolge $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Im weiteren sei $\{X_t\}_{t\ge0}$ stets ein LÉVY–Prozeß mit Erzeuger $-a(D)$ und $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge0}$ der von $-p(x,D)$ erzeugte Prozeß. Bezeichnet $\tilde{T}(x,dy) = \tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_t}(dy)$ die zum Operator $-p(x,D)$ korrespondierende Operatorenhalbgruppe, dann finden wir für $u \in D(p(x,D))$ wegen

$$-p(x,D)\tilde{T}_t u(x) = -p(x,D) \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\, \tilde{T}_t(x,dy) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\, \tilde{T}_t(x,dy)$$

auch

$$\tilde{T}_t u(x) - u(x) = \int_0^t (-p(x,D))\tilde{T}_s u(x)\,ds,$$

d. h. $\tilde{T}_t$ ist eine Fundamentallösung des Operators $\frac{\partial}{\partial t} + p(x, D_x)$. Diese Beobachtung läßt erwarten, daß die Konzepte der Vergleichbarkeit von Erzeugern und von Übergangswahrscheinlichkeiten eng zusammenhängen. Für einen gleichmäßig stark elliptischen—und damit im Sinne von (1) mit $a(\xi) = |\xi|^2$ vergleichbaren—*Differentialoperator* $p(x, D)$ in Divergenzform mit C_b^2–Koeffizienten, zeigte ARONSON [1] die Vergleichbarkeit der Fundamentallösungen

$$c(c\pi)^{d/2}\,(c\pi t)^{-d/2}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{ct}} \le \tilde{T}(x,y) \le C(C\pi)^{d/2}\,(C\pi t)^{-d/2}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{Ct}}, \tag{3}$$

$x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \ge 0$, mit nur von der Elliptizitätskonstanten abhängigen Konstanten $C, c > 0$. Durch Integration nach y erhalten wir aus (3) unmittelbar (2); die von $-p(x, D)$ erzeugte Diffusion ist also nach oben und unten jeweils mit einer BROWNschen Bewegung vergleichbar. Mit Hilfe von Subordination im Sinne von BOCHNER (s. u.) können wir uns von der lokalen Situation lösen und erhalten so die Vergleichbarkeit der entsprechenden subordinierten Prozesse (Beispiel 3.17).

Fixiert man im Symbol des Erzeugers $-p(x, D)$ eines LÉVY–Typ Prozesses die Ortsvariable x, dann erzeugt $-p(x_0, D)$ einen LÉVYschen Prozeß. LÉVY–Typ Prozesse verhalten sich daher, jeweils in Abhängigkeit von ihrer Position, wie LÉVY–Prozesse. (Mit Hilfe dieser Überlegung gelang es ROTH [69], die Übergangshalbgruppen von Diffusionen vom LÉVYschen Typ durch die von translationsinvarianten Diffusionen zu approximieren). Da beide Prozesse die MARKOV–Eigenschaft besitzen und immer wieder neu gestartet werden können, besagt in diesem Zusammenhang die Vergleichbarkeit im Sinne von (2), daß ein fester LÉVY–Prozeß als Referenzprozeß ausgezeichnet ist. Insbesondere sollte sich daher das Pfadverhalten des nicht translationsinvarianten Prozesses von dem des Referenzprozesses nicht allzusehr unterscheiden.

Die Eigenschaften der Pfade LÉVYscher Prozesse sind eingehend untersucht worden. Einen Einblick in die Breite und Variationen dieses Themas geben die Überblicksartikel von FRISTDEDT [25] und TAYLOR [74]. Gegenstand der Untersuchungen waren u. a. das Wachstumsverhalten der Pfade für $t \to 0$ und $t \to \infty$, Transienz und Rekurrenz des Prozesses, Mehrfachpunkte und Selbstüberschneidungen, λ–Variation und HAUSDORFFsche Dimension der Pfade. Im Rahmen dieser Arbeit beschränken wir uns auf die letzten beiden Themenkreise, sowie die Regularität der Pfade.

Bereits 1947 untersuchte BOCHNER [12] (insbesondere pp. 1031–1037, Section 7 & 8) für eindimensionale additive Prozesse $\{X_t\}_{t\ge 0}$, unter welchen Bedingungen Variationssummen der Art

$$\operatorname{var}^{\Phi(\cdot)}(X(\cdot,\omega), \Pi_n, [0,1]) = \sum_{j=0}^{n} \Phi(X(t_{j+1},\omega) - X(t_j,\omega))$$

für eine positive, subadditive Funktione Φ und immer feiner werdende Partitionen Π_n des Intervalls $[0,1]$ einen endlichen Grenzwert besitzen, d. h. unter welchen Bedingungen der Prozeß Pfade von *endlicher Länge* besitzt. BOCHNER konnte dafür notwendige und hinreichende Kriterien mit Hilfe der zum Prozeß assoziierten negativ definiten Funktion a angeben, vgl. auch [13] p. 131–132, Theorem 5.3.5.

Die von BOCHNER entwickelten Methoden wendete MCKEAN [55] auf reellwertige symmetrisch α–stabile Prozesse an, deren negativ definite Funktionen durch $\xi \mapsto |\xi|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 2$ gegeben sind. Die *starke λ–Variation* $\mathrm{VAR}_\lambda := \sup\{\mathrm{var}^{|\cdot|^\lambda} :$ Π endliche Partition$\}$ ist $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{VAR}_\lambda(X(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty, & \text{falls } \alpha < \lambda < 1 \\ \mathrm{VAR}_\lambda(X(\cdot,\omega),[0,1]) = \infty, & \text{falls } 0 < \lambda \leq \alpha < 1 \end{array} \right. \quad (\mathbb{P}^0\text{–f. s.}), \tag{4}$$

([55] p. 568, Theorem (3.3)). Die Verallgemeinerung von (4) für d–dimensionale (symmetrisch) stabile Prozesse gelang BLUMENTHAL und GETOOR [8], die (4) zunächst für stabile Subordinatoren (das sind positive Prozesse mit f. s. wachsenden Pfaden) und dann, mittels Subordination und der HÖLDER–Stetigkeit einer BROWNschen Bewegung, für stabile Prozesse zeigten ([8], pp. 269–271, Theorem 4.1).

Um eine größere Klasse von LÉVY–Prozessen untersuchen zu können, führten BLUMENTHAL, GETOOR in [10] die folgenden *Indices* für LÉVYsche Prozesse ohne GAUSSschen Anteil und mit nicht dominierender Drift (siehe Definition 1.19) ein,

$$\begin{aligned} \beta &:= \inf\left\{\lambda > 0 : \textstyle\int_{\{|x|<1\}} |x|^\lambda \,\nu(dx) < \infty\right\} \\ \beta' &:= \sup\left\{\lambda \geq 0 : \textstyle\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{\lambda-d} \,\frac{1-\exp(-\mathrm{Re}\,a(\xi))}{\mathrm{Re}\,a(\xi)}\, d\xi < \infty\right\}, \end{aligned}$$

wobei a der charakteristische Exponent und ν das LÉVY–Maß (Sprungmaß) des Prozesses ist. Für α–stabile Prozesse findet man $\beta = \beta' = \alpha$. In Analogie zu (4) zeigten BLUMENTHAL, GETOOR ([10], pp. 498–500, Theorem 4.1 & 4.2)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{VAR}_\lambda(X(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty, & \text{falls } \beta < \lambda < 1 \\ \mathrm{VAR}_\lambda(X(\cdot,\omega),[0,1]) = \infty, & \text{falls } 0 < \lambda < \beta < 2 \end{array} \right. \quad (\mathbb{P}^0\text{–f. s.}). \tag{5}$$

Der Beweis beruht auf der Analyse des Verhaltens der Pfade $t \to X_t(\omega)$ für $t \to 0$: in Abhängigkeit vom Index β erhält man für $\lambda > \beta$ bzw. $\lambda < \beta$ fast sicher $X_t = \mathrm{o}(t^{1/\lambda})$ bzw. $\limsup_{t\to 0} t^{-1/\lambda} X_t = \infty$. Die Einschränkung $\beta < 1$ in der ersten Zeile von (5) konnte MONROE [58] aufheben. Sein Beweis stützt sich auf die Tatsache, daß jedes Martingal—und damit auch zentrierte LÉVY–Prozesse—durch eine (stochastische) Zeittransformation aus einer BROWNschen Bewegung erhalten werden kann und man dann auf diese Weise HÖLDER–Bedingungen nahe $t = 0$ zur Verfügung hat.

Untersuchungen, die das Konvergenzverhalten einer Folge von Variationssummen betreffen, finden sich bei z. B. bei MILLAR [57], GREENWOOD [27] und GREENWOOD und FRISTEDT [28].

Die HAUSDORFFsche Dimension von Mengen

$$X(E,\omega) := \{X(t,\omega) \in \mathbb{R}^d : t \in E\},$$

$E \subset [0,\infty)$ BORELsch, wurde zuerst von McKEAN [56] für eine d–dimensionale BROWNsche Bewegung $\{X_t\}_{t\geq 0}$ untersucht, [56] p. 231, Theorem (3.1):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dim X(E,\omega) & \leq & 2\dim E \\ \dim X(E,\omega) & \geq & (2\dim E)\wedge d \end{array} \right. \qquad (\mathbb{P}^0\text{-f. s.}). \tag{6}$$

Die Abschätzung der Dimension nach oben folgt dabei aus der HÖLDER–Stetigkeit BROWNscher Pfade und dem Transformationsverhalten des HAUSDORFF-Maßes unter HÖLDER–stetigen Funktionen (siehe Lemma 4.42). Die Abschätzung nach unten beruht auf dem Ergebnis von FROSTMAN, daß eine Menge von positiver λ–Kapazität auch positives λ–dimensionales HAUSDORFF–Maß besitzt.

In Verbindung mit Subordination folgt unmittelbar, daß (6) auch für symmetrische α–stabile Prozesse—mit α an Stelle von 2—gilt, vgl. [8]. Bereits für stabile Prozesse benötigt man andere Techniken, vgl. [9]. Für allgemeinere LÉVY–Prozesse zeigten BLUMENTHAL, GETOOR in [10] p. 507, Theorem 8.1, wiederum mit Hilfe der Indices β und β',

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \dim X(E,\omega) & \leq & \beta\dim E & (\beta<1) \\ \dim X(E,\omega) & \geq & (\beta'\dim E)\wedge d & \end{array} \right. \quad (\mathbb{P}^0\text{–f. s.}), \tag{7}$$

wobei die Einschränkung $\beta < 1$ später von MILLAR [57] p. 69, Theorem 5.1 aufgehoben werden konnte.

Die Abschätzung nach unten verwendet wiederum McKEANS Kapazitätsargument, wobei jedoch an Stelle der HÖLDER–Stetigkeit nun $\mathbb{E}^0(|X_t|^{-\lambda\theta}) = \mathrm{o}(t^{-\theta})$ für $t \to 0$ mit $0 < \lambda < \beta' \wedge d$ und $0 < \theta \leq 1$ tritt. Für die Abschätzung nach oben benötigen BLUMENTHAL und GETOOR die Subadditivität gebrochener Potenzen ≤ 1, was die Beschränkung $\beta < 1$ erklärt. Wir skizzieren daher den allgemeineren Ansatz MILLARS: subtrahiert man vom Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ alle Sprünge, die betragsmäßig größer als eine vorgegebene Konstante c sind, dann erhält man wiederum einen LÉVY–Prozess $\{X_{(c)}(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$, der auf Grund der stochastischen Stetigkeit LÉVYscher Prozesse nahe $t = 0$ fast sicher mit dem ursprünglichen Prozeß übereinstimmt. Da bei der Berechnung des HAUSDORFFschen Maßes von $X(E,\omega)$ wegen der Stationarität der Zuwächse von $\{X_t\}_{t\geq 0}$ nur das Verhalten der Pfade bei $t = 0$ interessiert, erhält man $\mathbb{P}^0$–f. s. $\dim X(E,\omega) = \dim X_{(c)}(E,\omega)$ für alle $c > 0$. Zusammen mit der Abschätzung

$$\mathbb{E}^0(|X_{(c)}(t,\cdot)|^\lambda) \leq M(c,\nu,\lambda)\, t \qquad (0 \leq t \leq 1, \lambda > \beta),$$

vgl. MILLAR [57] pp. 55–58, Theorem 2.1 & 2.2—die Konstante $M(c,\nu,\lambda)$ hängt dabei nur von λ, c und dem LÉVY–Maß ν des Prozesses $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ab—folgt dann die Behauptung mittels eines Überdeckungsarguments. Den Fall $\dim E = 1$ behandelt MILLAR gesondert, was aber nicht notwendig ist, wie unser Beweis von Satz 4.40 zeigt.

Schärfere Dimensions-Abschätzungen gewinnt man mit der Methode von PRUITT [65], wenn $E = [0,1]$ ist. Dazu benötigen wir einen weiteren Index

$$\gamma := \sup\left\{\lambda \geq 0 : \limsup_{r\to 0} r^{-\lambda} \int_0^1 \mathbb{P}^0(|X_t| \leq r)\, dt < \infty\right\},$$

der ein Maß für die durchschnittliche Verweildauer des Prozesses in kleinen Kugeln um den Ursprung ist. Auf Grund der Stationarität läßt sich dann aus dem (marginalen) Verhältnis von Aufenthaltsdauer pro Durchmesser die im Mittel erwartete Anzahl von Kugeln errechnen, die den Pfad gerade überdecken. Diese Überlegung, zusammen mit dem *density theorem* für Maße ([68] pp. 6–8, Lemma 3), zeigt dann

$$\dim X([0,1],\omega) = \gamma \qquad (\mathbb{P}^0\text{-f. s.}). \tag{8}$$

Über die bisher skizzierten Resultate hinausgehend zeigten Hawkes [32] für α–stabile Prozesse

$$\mathbb{P}^0(\dim X(E,\omega) \geq \alpha \dim E \ \ \forall \text{ Borel-Mengen } E) = 1,$$

und für beliebige Lévy–Prozesse Pruitt und Hawkes [35]

$$\mathbb{P}^0(\dim X(E,\omega) \leq \beta \dim E \ \ \forall \text{ Borel-Mengen } E) = 1.$$

Den Mittelpunkt des Beweises bildet die Bemerkung, daß die Menge $X(E,\omega)$ für eine ganze Familie von Mengen E *gleichmäßig* mit einer nicht zu schnell wachsenden Anzahl immer kleiner werdender Kugeln bzw. Würfel überdeckt werden kann. Der Beweis dieses Überdeckungslemmas (vgl. [35] p. 280, Lemma 3.1) verwendet einerseits Stoppzeiten, andererseits die Tatsache, daß für solche Stoppzeiten τ die Zufallsvariablen $X_{\tau+s} - X_\tau$ und X_s dieselben Verteilungen besitzen.

Da für Stoppzeiten unsere Vergleichsabschätzungen (2) nicht übertragbar sind, müssen wir auf gleichmäßige Dimensionsabschätzungen verzichten.

Die Behandlung nicht translationsinvarianter Prozesse ohne stationäre Zuwächse—im folgenden bezeichnen wir diese zur Unterscheidung vom Lévy–Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ mit $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$—erfordert modifizierte Methoden. Insbesondere muß die Definition der Indices der neuen Situation angepaßt werden. Argumente, die sich direkt auf die Pfade des Prozesses beziehen, etwa Millars Abschneidetrick, können nicht direkt übernommen werden, da der Vergleich endlich–dimensionaler Verteilungen noch nicht pfadweise Vergleichbarkeit zuläßt.

Im ersten Kapitel sind einige im weiteren immer wieder auftretende Begriffe und Notationen zusammengestellt. Neben der analytischen Theorie von stark stetigen Operatoren–Halbgruppen (C_0–Halbgruppen) auf einem Banach–Raum gehen wir kurz auf den Zusammenhang von Halbgruppen und stochastischen Prozessen ein. Insbesondere betrachten wir Lévy–Prozesse, für die wir sowohl probabilistische (Pfadverhalten, Itô–Darstellung) als auch analytische (Halbgruppe, charakteristische Funktion) Kennzeichnungen angeben. Ferner finden sich hier einige Eigenschaften negativ definiter Funktionen sowie die Definitionen der Indices β, β', β'' und γ.

Auch das zweite Kapitel hat vorbereitenden Charakter. Wir untersuchen Subordinatoren, das sind fast sicher wachsende Lévy–Prozesse mit Werten in $[0,\infty)$. Das hier zusammengestellte Material ist nicht neu, jedoch scheint die Art der Präsentation neuartig: Subordinatoren werden konsequent als spezielle LÉVY–Prozesse behandelt. Vornehmlich analytische Betrachtungen finden sich bei BOCHNER [13] Chapter 4.4 ff. und BERG, FORST [6] §9, während KARATZAS, SHREVE [52] pp. 405–411, Section 6.2.C, BLUMENTHAL, GETOOR [10] oder HUFF [43] eine weitgehend probabilitsitsche Darstellung wählten.

Zunächst zeigen wir, daß Subordinatoren $\{S_t\}_{t\geq 0}$ und vag stetige Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ mit Träger in $[0,\infty)$ durch die Beziehung $\mathbb{P}^0_{S_t} = \mu_t$ einander entsprechen. Daraus folgt schon die besondere Gestalt der LÉVY–KHINCHINE–Formel der negativ definiten Funktion a eines Subordinators (Satz 2.5). Anders als bei allgemeinen LÉVY–Prozessen erklären wir den *charakteristischen Exponenten* f eines Subordinators mit Hilfe der LAPLACE–Transformation. Wir finden insbesondere, daß $f(x) = a(ix),\ x \geq 0$, gilt. Die Menge der charakteristischen Exponenten von Subordinatoren sind genau die BERNSTEIN–Funktionen mit $f(0) = 0$.

Den Übergang vom Prozeß $\tilde{X}(t,\omega)$ zu $\tilde{X}(t,\omega) := \tilde{X}(S_t(\omega),\omega)$ nennt man *Subordination* im Sinne von BOCHNER. Dabei werden die Prozesse $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und $\{S_t\}_{t\geq 0}$ als unabhängig angenommen. Bezeichnen $\{\tilde{T}_t\}_{t\geq 0}$ und $\{\tilde{T}^f_t\}_{t\geq 0}$ die den Prozessen entsprechenden C_0–Kontraktionshalbgruppen, dann ist

$$\tilde{T}^f_t = \text{BOCHNER}\text{–}\int_{[0,\infty)} \tilde{T}_s\,\mu_t(ds) \tag{9}$$

die analytische Entsprechung der stochastischen Zeittransformation. Ist $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein LÉVY–Prozess mit stetiger negativ definiter Funktion a, dann wird $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ durch die stetige negativ definite Funktion $f \circ a$ beschrieben. In der Tat gilt auch die Umkehrung: die einzigen auf den stetigen negativ definiten Funktionen operierenden Funktionen sind die BERNSTEIN–Funktionen (Satz 2.9). Den ursprünglichen Beweis dieses Satzes von HARZALLAH [31] konnten wir für stetige negativ definite Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ etwas vereinfachen. Neu hingegen scheint ein Kriterium zu sein, unter welchen Umständen Subordination (9) auch für nicht kontrahierende C_0–Halbgruppen möglich ist: kann die BERNSTEIN–Funktion f des Subordinators links des Ursprungs bis zum größten Eigenwert des Erzeugers der zu subordinierenden Halbgruppe $\{\tilde{T}_t\}_{t\geq 0}$ als C^∞–Funktion fortgesetzt werden, so ist $\{\tilde{T}^f_t\}_{t\geq 0}$ wohldefiniert (Satz 2.13).

In Kapitel drei zeigen wir vorab ein *Reflexionsprinzip* für symmetrische LÉVY–Prozesse. In Analogie zum Reflexionsprinzip für eine reelle BROWNsche Bewegung $\{B_t\}_{t\geq 0}$,

$$\mathbb{P}^0\big(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a\big) \leq 2\,\mathbb{P}^0\big(B_t \geq a\big) \qquad (t\geq 0, a\in\mathbb{R})$$

(Gleichheit gilt für positive a), erhalten wir für einen reellen LÉVY–Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$

$$2\mathbb{P}^0\big(X_t > X_\tau\big) \leq \mathbb{P}^0\big(\sup_{0\leq s\leq t} X_s > a\big) \leq 2\,\mathbb{P}^0\big(X_t \geq X_\tau\big) \qquad (t\geq 0, a\in\mathbb{R}),$$

wobei τ für die erste Eintrittszeit in das offene Intervall (a, ∞) steht (Satz 3.2); Gleichheit gilt für stark FELLERsche Prozesse. Der Beweis beruht im wesentlichen auf der ursprünglichen Idee DÉSIRÉ ANDRÉS, wonach die *Zahl* der Pfade, die nach Überspringen der Schranke a zum Zeitpunkt τ oberhalb oder unterhalb von X_τ verlaufen, gleich groß ist. Für einen symmetrischen Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}^d$ finden wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\mathbb{P}^x\Big(\sup_{r\le s\le t} |X_s - X_r| > a\Big) \le 2d\, \mathbb{P}^x\big(|X_t - X_r| \ge a/d\big), \tag{10}$$

$r, t, a \ge 0$, und für nicht notwendig symmetrische Prozesse

$$\mathbb{P}^x\Big(\sup_{r\le s\le t} |X_s - X_r| > a + b\Big) \le \frac{4d}{1-2\delta}\, \mathbb{P}^x\big(|X_t - X_r| \ge a/(2d)\big), \tag{11}$$

$r, t, a, b \ge 0$, wobei die Konstante von der Wahl von b und der Länge des Zeitintervalls $[r, t]$ abhängt (Satz 3.13).

Im Anschluß daran wird der Begriff der *Vergleichbarkeit* (2) zweier MARKOVscher Prozesse entwickelt. Insbesondere wird die Vergleichbarkeit höherdimensionaler Verteilungen untersucht. Die wichtigste Aussage ist dabei, daß die Vergleichskonstanten aus (2) beim Vergleich m–dimensionaler Verteilungen in der m-ten Potenz eingehen (Lemma 3.18). Im Hinblick darauf ist es bedeutsam, ein Reflexionsprinzip für Prozesse $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$ zu besitzen, die mit symmetrischen LÉVY–Prozessen vergleichbar sind. Ist der Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$ *stark* MARKOVsch (selbst aber nicht notwendig symmetrisch), dann gelten für diesen die Beziehungen (10) und (11). Die dort auftretenden Konstanten hängen dann aber noch vom Verhältnis der Vergleichskonstanten, $\sup\{K_{s,x}/k_{s,x} : r \le s \le t, x \in \mathbb{R}^d\}$, ab (Satz 3.23 & 3.28).

Relativ einfach lassen sich für d–dimensionale Prozesse aus der Vergleichbarkeit $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0} \prec \{X_t\}_{t\ge 0}$ Regularitätsaussagen für die Pfade des Prozesses $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$ ableiten: erfüllt $\{X_t\}_{t\ge 0}$ das KOLMOGOROVsche Kriterium (3.34), das DYNKIN-KINNEY–Kriterium (3.35) oder DYNKINS Kriterium (3.36), und hat somit f. s. HÖLDER–stetige bzw. stetige bzw. càdlàg Pfade, so trifft das auch auf $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$ zu (Satz 3.22).

Weitergehende Pfadeigenschaften, λ–Variation und HAUSDORFFsche Dimension der Pfade auf kompakten Zeitintervallen, sind Inhalt des vierten Kapitels. Grundsätzlich kann man sagen, daß sich die oben angegebenen Resultate für LÉVY–Prozesse unter einer der Annahmen **(A.1)** bis **(A.3)** an die Vergleichskonstanten auf die Situation vergleichbarer Prozesse übertragen lassen. Von nun an sei $\{X_t\}_{t\ge 0}$ ein $\mathbb{R}^d$–wertiger LÉVY–Prozeß mit den Indices β, β', γ und $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$ ein (stark) MARKOVscher Prozess mit demselben Zustandsraum.

Für $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0} \prec \{X_t\}_{t\ge 0}$ mit **(A.1)** gilt

$$\tilde{\mathbb{P}}^x\big(\mathrm{VAR}_\lambda(\tilde{X}(\cdot,\cdot), [0,1]) = \infty\big) = 1 \qquad (0 < \lambda < \beta \le 2).$$

Der Beweis basiert auf einer Abschätzung

$$\tilde{\mathbb{E}}^x\big(\exp(-\mathrm{var}^{|\cdot|^\lambda}(\tilde{X}(\cdot,\cdot), \Pi, [0,1]))\big) \to 0$$

für immer feiner werdende endliche Partitionen Π des Intervalls $[0,1]$. Dabei geht auch das Verhalten des LÉVY–Prozesses nahe $t=0$ ein (Satz 4.2). Umgekehrt gelten unter der Annahme $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0} \prec \{X_t\}_{t\geq 0}$ mit **(A.3)**

$$\begin{array}{lrcll} (12) & \tilde{\mathbb{P}}^x\big(\mathrm{VAR}_\lambda(J^{\tilde{X}}(\cdot,\cdot),[0,1]) < \infty\big) & = & 1 & (0<\beta<\lambda<2) \\ (13) & \tilde{\mathbb{P}}^x\big(\mathrm{VAR}_\lambda(\tilde{X}(\cdot,\cdot),[0,1]) < \infty\big) & = & 1 & (0<\beta<\lambda<1). \end{array}$$

Hier steht $J^{\tilde{X}}$ für den zu $\tilde{X}_t$ gehörenden Sprungprozeß (Satz 4.4, 4.6 & Korollar 4.9). Der Beweis von (12) stützt sich auf die Ungleichung

$$\sum_{0<s\leq 1} |J^{\tilde{X}}(s,\omega)|^\lambda \leq \liminf_{\Pi} \mathrm{var}^{|\cdot|^\lambda}(\tilde{X}(\cdot,\omega),\Pi,[0,1]),$$

worin der Limes inferior über eine Folge von Partitionen Π gebildet wird, die gegen eine dichte Teilmenge von $[0,1]$ aufsteigen. Es sollte angemerkt werden, daß (12) für LÉVY–Prozesse, d. h. wenn $\tilde{X}_t = X_t$, mit Index $\beta < 1$ bereits Aussagen über die Endlichkeit der starken Variation zuläßt. Dazu beachte man, daß sich in diesem Fall die ITÔ–Darstellung des Prozesses zu $X(t,\omega) = c\,t + \sum_{0<s\leq t} J^X(s,\omega)$ vereinfacht.

(13) wird zunächst für Prozesse $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ gezeigt, die mit einem symmetrisch α-stabilen LÉVY–Prozeß vergleichbar sind ($0<\alpha<1$). Diese Prozesse lassen sich mit Hilfe geeigneter Subordinatoren aus einer BROWNschen Bewegung darstellen, so daß der Beweis im Kern auf die HÖLDER–Stetigkeit der Pfade einer BROWNschen Bewegung zurückgreift. Die Einschränkung $\alpha<1$ ist notwendig, um bei Verfeinerung der Partitionen monoton wachsende Variationssummen zu erhalten. Nach einem Ergebnis von MONROE [59] lassen sich zentrierte LÉVY–Prozesse als rechtsstetige Martingale in eine BROWNsche Bewegung einbetten. Somit gilt der oben skizzierte Beweis zunächst für zentrierte und dann—mittels eines Abschneidetricks (vgl. Satz 4.8 und die anschließende Bemerkung)—für beliebige LÉVY–Prozesse.

Unter ähnlichen Voraussetzungen wie bei (13), jedoch mit dem *limes inferior* einer Folge von Variationssummen an Stelle der starken Variation, kann (13) ohne die Einschränkung $\lambda<2$ gezeigt werden (Korollar 4.10).

Um die HAUSDORFF–Dimension der Pfade des Prozesses $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ zu bestimmen, wird in üblicher Weise das λ-dimensionale HAUSDORFF–Maß $\Lambda^\lambda(\cdot)$ eingeführt und an den Zusammenhang zwischen HAUSDORFFscher Dimension und λ-Kapazität erinnert, der in dieser Form auf FROSTMAN zurückgeht. Dabei ist die λ–Kapazität einer BOREL–Menge $B\subset\mathbb{R}^d$ durch

$$\mathrm{cap}_\lambda(B) := \left(\inf\left\{\int_B\int_B |x-y|^{-\lambda}\,\mu(dx)\,\mu(dy) : \mu\in\mathcal{M}^1_+(B)\right\}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \qquad (\lambda>0)$$

gegeben.In Analogie zu den Indizes für LÉVY–Prozesse werden für einen MARKOVschen Prozeß $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ die folgenden verallgemeinerten Indices eingeführt (Definition 4.20):

$$\beta'(Y,x) \;:=\; \sup\left\{\lambda\geq 0 \,:\, \mathbb{E}^x\left(|Y_t-Y_s|^{-\lambda}\right) = \mathcal{O}\left(|t-s|^{-1}\right) \text{ für } s-t\to 0\right\},$$

$$\begin{aligned}\gamma_\delta(Y,x) &:= \sup\left\{\lambda \ge 0 : \int_0^\delta \mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right)\, dt < \infty \ \forall s \in [0,\delta]\right\}\\ &= \sup\left\{\lambda \ge 0 : \limsup_{r\searrow 0} \frac{1}{r^\lambda}\int_0^\delta \mathbb{P}^x(|Y_t - Y_s| \le r)\, dt < \infty \ \forall s \in [0,\delta]\right\},\end{aligned}$$

$\delta > 0$, die der fehlenden Stationarität der Zuwächse und Translationsinvarianz Rechnung tragen. Für kleine δ gilt stets $\gamma_\delta(Y,x) \ge \beta'(Y,x)$. Ist Y_t selbst ein d-dimensionaler LÉVY-Prozeß, dessen Indices β, β' und γ seien, dann findet man

$$\beta' \wedge d \le \beta'(Y,x) = \beta'(Y,0) \le \beta \quad \text{und} \quad \gamma \le \gamma_\delta,$$

für symmetrische Prozesse sogar

$$\gamma = \beta' \wedge d = \gamma_\delta(Y,x) = \beta'(Y,x).$$

Vergleichbare Prozesse $\{X_t\}_{t\ge 0} \prec \{\tilde{Y}_t\}_{t\ge 0} \prec \{X_t\}_{t\ge 0}$ erfüllen unter den Annahmen **(A.1)** und **(A.2)** $\beta'(\tilde{X},x) = \beta'(X,x)$ und $\gamma_\delta(\tilde{X},x) = \gamma_\delta(X,x)$.

Es sei $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0} \prec \{X_t\}_{t\ge 0}$ mit **(A.1)**. Zusammen mit Satz 4.25 und Korollar 4.26 finden wir

$$\tilde{\mathbb{P}}^x\Big(\dim \tilde{X}(E,\cdot) \ge (\beta' \wedge d)\dim E\Big) = 1$$

für BORELsche Zeitmengen E und alle Startpunkte x (Korollar 4.27). Dabei besagen Satz 4.25 bzw. Korollar 4.26, daß für MARKOVsche Prozesse $\{Y_t\}_{t\ge 0}$

$$\mathbb{P}^x\Big(\dim Y(E,\cdot) \ge \beta'(Y,x)\dim E\Big) = 1$$

gilt.

Da der Index $\gamma_\delta(\tilde{X},x)$ die mittlere Verweildauer des Prozesses $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$, $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0} \prec \{X_t\}_{t\ge 0}$ mit **(A.1)**, in einem Würfel kleiner Kantenlänge angibt, erhalten wir mit PRUITT und HAWKES' Idee der optimalen Überdeckung eines Pfades bessere Abschätzungen für Zeitintervalle $E = [0,\delta]$

$$\tilde{\mathbb{P}}^x\Big(\dim \tilde{X}([0,\delta],\cdot) \ge \lim_{\delta\to 0}\gamma_\delta(Y,x) \ge \gamma\Big) = 1$$

(Satz 4.29 & Korollar 4.32). Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei ein maßtheoretischer Satz von ROGERS und TAYLOR (Satz 4.28), der, richtig interpretiert, eine Aussage über die Möglichkeit (gleichmäßiger) endlicher Überdeckungen eines Pfades durch kleine Kugeln macht.

Abschätzungen der Dimension von $\tilde{X}([0,\delta],\omega)$ nach oben ergeben sich bereits aus den Aussagen über die Endlichkeit der (starken) Variation der Pfade dieses Prozesses. Die Idee dabei ist, daß das λ-dimensinale HAUSDORFF–Maß in gewisser Weise die λ-Variation verallgemeinert (Lemma 4.33 & Satz 4.34). Dieser Ansatz ist daher auf Zeit*intervalle*, somit auf Mengen der Dimension 1 beschränkt.

Mit Hilfe eines Abschneidetricks kann man aus $\{X_t\}_{t\ge 0} \prec \{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0} \prec \{X_t\}_{t\ge 0}$, $\{X_t\}_{t\ge 0}$ symmetrisch, mit **(A.1)** und **(A.2)** bereits auf

$$\tilde{\mathbb{P}}^x\Big(\dim \tilde{X}(E,\cdot) \le \beta \dim E\Big) = 1 \qquad (0 < \beta \le 2)$$

für BORELsche $E \subset [0,1]$ schließen (Satz 4.40 & 4.43). Der Beweis ($\beta < 2$) kombiniert drei Elemente: erstens, daß es genügt, den Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ auf den Mengen $\tilde{\Omega}_R := \{\omega \in \tilde{\Omega} : \sup_{t\leq 1} |\tilde{X}_t| \leq R\}$ zu betrachten, was Sprünge größer als $2R$ ausschließt, zweitens das Reflexionsprinzip, das die Verteilung der Durchmesser von zufälligen Mengen $X([r,t],\omega)$ durch endlich–dimensionale Verteilungen zu beherrschen erlaubt, und schließlich die Abschätzung

$$\tilde{\mathbb{E}}^x\big(|\tilde{X}(t,\cdot)|^\lambda 1_{\tilde{\Omega}_R}\big) \leq C(R,\lambda,\nu)\, t \qquad (\lambda > \beta)$$

für kurze Zeiten $t > 0$ mit einer nur von R, λ, dem LÉVY–Maß ν des Prozesses $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und den Vergleichskonstanten abhängenden Konstante.

Der Fall $\beta = 2$ bedarf einer gesonderten Behandlung. Da dann X_t im wesentlichen eine BROWNsche Bewegung ist, besitzt auch der Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ fast sicher HÖLDER–stetige Pfade bis zur Ordnung 1/2. Die Behauptung folgt daher aus dem bekannten Verhalten des HAUSDORFF–Maßes unter HÖLDER–stetigen Transfomationen.

Wählt man—wie oben—als Ausgangspunkt der Betrachtungen einen gleichmäßig stark elliptischen Differentialoperator, dann finden wir mit Hilfe der ARONSON–Abschätzungen (3), daß der zugehörige Diffusionsprozeß gegen zwei (unterschiedlich schnelle) BROWNsche Bewegungen vergleichbar ist und daß die Vergleichskonstanten **(A.1)** und **(A.2)** erfüllen. Die nur einseitige Vergleichbarkeit nach oben oder unten mit einer jeweils anderen BROWNschen Bewegung kann durch eine elementare Abschätzung (siehe Beispiel 3.17 & Bemerkung 3.27) behoben werden; das gilt auch für die subordinierten Prozesse. Somit gelten z. B. alle Dimensionsaussagen für diese Klasse von Beispielen.

Das letzte Kapitel kommt nochmals auf die Subordination von C_0–Halbgruppen zurück. Wie oben seien a eine stetige negativ definite Funktion und $p(\cdot,\cdot)$ das Symbol eines Pseudodifferentialoperators, der eine (nicht translationsinvariante) C_0–Halbgruppe erzeugt. Beginnend mit der analytischen Vergleichbarkeit der Symbole a und $p(\cdot,\cdot)$ zeigte JACOB u. a. in [49] mit Hilfe von Störungsargumenten

$$D(p(x,D)) = D(a(D)) = H^{1,a}(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{1,a} < \infty\}, \tag{14}$$

wobei die Norm des anisotropen SOBOLEV–Raums $H^{1,a}(\mathbb{R}^d)$ durch

$$\|u\|_{1,a} = \int_{\mathbb{R}^d} |1 + a(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

gegeben ist.

Subordiniert man die von $-p(x,D)$ bzw. $-a(D)$ erzeugten Halbgruppen, dann findet man für den Definitionsbereich des Erzeugers $-a(D)^f$

$$D(a(D)^f) = H^{1,f\circ a}(\mathbb{R}^d),$$

was mit Hilfe der Identität $-a(D)^f = -f \circ a(D)$ gezeigt wird, vgl. BERG, FORST [6] p. 92, Theorem 12.16. Da $p(x,D)$ als Störung des Operators $a(D)$ behandelt werden kann, sollte das auch auf die Operatoren $p(x,D)^f$ und $a(D)^f$ zutreffen, und insbesondere (14) eine Entsprechnung in

$$D(p(x,D)^f) = D(a(D)^f) = H^{1,f\circ a}(\mathbb{R}^d) \tag{15}$$

finden. Doch scheitert die bisherige Vorgehensweise bereits daran, daß zwar $f \circ a$ das Symbol von $a(D)^f$, nicht aber $f \circ p(\cdot,\cdot)$ das Symbol von $p(x,D)^f$ ist. Auch sollte bemerkt werden, daß wegen der mangelnden Differenzierbarkeit von $\xi \mapsto p(x,\xi)$ kein symbolischer Kalkül wie für klassische Pseudodifferentialoperatoren zur Verfügung steht.

Im folgenden zeigen wir, daß im Falle *selbstadjungierter* Erzeuger A, B von C_0–Halbgruppen, die

$$D(B) \subset D(A) \quad \text{und} \quad \|Au\| \leq c(\|Bu\| + \|u\|) \text{ für } u \in D(B)$$

erfüllen, die Definitionsbereiche der Erzeuger der subordinierten Halbgruppen der Beziehung

$$D(B^f) \subset D(A^f) \qquad (f \in \mathcal{CBF}) \tag{16}$$

genügen (Satz 5.21 & Korollar 5.24). Hierbei müssen wir uns aus technischen Gründen auf die *vollständigen* BERNSTEIN–*Funktionen* $\mathcal{CBF}$ beschränken, einer Teilklasse der BERNSTEIN–Funktionen, die u. a. alle gebrochenen Potenzen x^α, $0 < \alpha < 1$ enthält. Insbesondere können wir dieses Ergebnis auf die oben skizzierte Situation anwenden und erhalten für selbstadjungierte Operatoren $p(x,D)$ (15).

Der Schlüssel zu diesem Ergebnis liegt einerseits in einer Darstellungsformel für den Erzeuger A^f und der Verfügbarkeit eines Operatoren–Kalküls (DUNFORD–Kalkül bzw. Spektralkalkül) für diese Erzeuger und andererseits in Techniken aus der Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren, die auf E. HEINZ zurückgehen (HEINZ–KATO–Theorem).

Vorab werden daher die vollständigen BERNSTEIN–Funktionen, die im Ursprung verschwinden, $\mathcal{CBF}_0$, untersucht. Eine Möglichkeit, diese Klasse von Funktionen zu charakterisieren, ist die Darstellung als STIELTJES–Transformierte,

$$\frac{f(x)}{x} = b + \int_{(0,\infty)} \frac{1}{t+x}\,\tilde{\rho}(dt) \tag{17}$$

mit $b \geq 0$ und $\int_{(0,1)} \tilde{\rho}(dt) + \int_{[1,\infty)} t^{-1}\,\tilde{\rho}(dt) < \infty$. Daß die vollständigen BERNSTEIN–Funktionen z. B. mit den *monotonen Matrixfunktionen* (LOEWNER [54]) oder den *operator monotone functions* (STONE [72], BERG ET. AL. [7]) übereinstimmen, und an sich gut bekannte Objekte sind, wird durch eine Reihe von äquivalenten Kennzeichnungen gezeigt (Satz 5.6). Neben anderen Eigenschaften ist für die weiteren Untersuchungen vor allem von Interesse, daß mit f auch $x \mapsto [f(x^\alpha)]^{1/\alpha}$, $-1 \leq \alpha \leq 1, \alpha \neq 0$, eine vollständige BERNSTEIN–Funktion ist.

Ist der charakteristische Exponent eines Subordinators eine vollständige BERNSTEIN–Funktion, dann folgt aus der Darstellung (17) mit Hilfe eines Resultats von

PHILLIPS (Satz 2.16), daß der Erzeuger A^f der subordinierten Halbgruppe die Darstellung

$$A^f u = bAu + \int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} A(\lambda - A)^{-1} u \, \tilde{\rho}(d\lambda) \qquad (u \in D(A)) \tag{18}$$

mit $\overline{\omega}_0 \geq$ größter Eigenwert von A besitzt—A ist der Erzeuger der ursprünglichen Halbgruppe (Korollar 5.11). Im Falle kontrahierender Halbgruppen ist stets $\overline{\omega}_0 = 0$. Ein Spezialfall dieser Darstellung ist die Integralformel (5.1) für gebrochene Potenzen eines Erzeugers A einer C_0–Kontraktionshalbgruppe. Die Berechnung der Resolvente von A^f (Satz 5.13) ergibt dann, daß

$$-f(-A) = A^f \quad \text{und} \quad A^{f \circ g} = (A^g)^f$$

für alle vollständigen BERNSTEIN–Funktionen f, g gilt.

Beschränken wir uns auf den Fall von C_0–Halbgruppen auf einem HILBERT–Raum mit *selbstadjungierten* Erzeugern A, B mit $D(B) \subset D(A)$, dann impliziert

$$(B^2 u - A^2 u, u) \geq 0 \quad \text{die Beziehung} \quad (B^2(\lambda + B^2)^{-1} u - A^2(\lambda + A^2)^2 u, u) \geq 0$$

auf $D(B)$ (Lemma 5.19), woraus mit der Darstellungsformel (18)

$$((B^2)^g u - (A^2)^g u, u) \geq 0 \qquad (u \in D(B^2))$$

für $g \in \mathcal{CBF}_0$ folgt. Mit der speziellen Wahl $g(x) = f^2(\sqrt{x})$, $f \in \mathcal{CBF}_0$, erhält man

$$((B^f)^2 u - (A^f)^2 u, u) \geq 0$$

zunächst für $u \in D(B^2)$ und mit dem üblichen Dichtheitsargument—$D(B^2) \subset D(B^f)$ ist ein definierender Bereich (core) des Operators B^f (Lemma 2.17)—für alle $u \in D(B^f)$. Elementare Störungsargumente zeigen schließlich, daß die Voraussetzung $(B^2 u - A^2 u, u) \geq 0$ zu $\|Au\| \leq c(\|Bu\| + \|u\|)$ abgeschwächt werden kann (Korollar 5.24).

Die genaue Kenntnis des Definitionsbereiches von $-p(x, D)^f$ sollte es ermöglichen, von der Vergleichbarkeit der Operatoren auf die Vergleichbarkeit der Fundamentallösungen und der Übergangswahrscheinlichkeiten zu schließen. Das Verhalten der Definitionsbereiche unter Subordination legt es nahe, daß das Symbol von $-p(x, D)^f$ tatsächlich eine Entwicklung der Art $-f(p(x, \xi))$ + *Restterme niedriger Ordnung* besitzt, was für klassische Pseudodifferentialoperatoren, etwa bei gebrochenen Potenzen, mit Hilfe des symbolischen Kalküls gezeigt wird.

Innerhalb der Arbeit verweist *Satz (Definition, ...) x.yz* auf *Satz (Definition, ...) yz* in Kapitel *x* und entsprechend *(x.yz)* auf die *Formelzeile yz* in Kapitel *x*. Literatur, der wir Ideen etc. entlehnt haben oder die ähnliche Resultate in einem anderen Kontext zeigt, zitieren wir *vgl. [...]*, während *[...]* für wörtliche Übernahmen steht.

Mein Dank gilt meinen Förderern und Lehrern, allen voran Herrn Privatdozent Dr. Niels Jacob, der diese Arbeit anregte und betreute, und Herrn Professor Dr. Heinz Bauer. Beide unterstützten auch meine Bemühungen um Stipendien.

Während der Arbeit an dieser Dissertation wurde ich nach dem *Gesetz zur Förderung des wissenschaftlichen und künstlerischen Nachwuchses* aus Mitteln des Freistaats Bayern und von der Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert.

Erlangen, im Mai 1994

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Zur Notation

Wie üblich verwenden wir die Symbole $\subset$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, und ^{c} für die Teilmengenbeziehung, den Schnitt, die Vereinigung, die Differenz und das Komplement von Mengen. Für die *Indikatorfunktion* (charakteristische Funktion) einer Menge A schreiben wir 1_A. In einer topologischen Situation steht $\overline{A}$ für den Abschluß, A° das Innere und $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ für den Rand einer Menge A.

Mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Mengen der (strikt positiven) natürlichen, nicht negativen natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen. Die Symbole $\mathbb{C}^-$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ stehen für die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, die obere komplexe Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$ und den offenen Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Für die erweiterte Zahlengerade $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, versehen mit der natürlichen Topologie, schreiben wir $\overline{\mathbb{R}}$. Wie üblich sind (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ und $[a, b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, offene, abgeschlossene und halbseitig offene Intervalle. Das Minimum bzw. Maximum der Zahlen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ notieren wir als $a \wedge b$ bzw. $a \vee b$.

Fast immer bezeichnet $d \in \mathbb{N}$ die Raumdimension, $\mathbb{R}^d$ den d–dimensionalen EUKLIDischen Raum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und Norm $|\cdot|$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ ist $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius r.

Es seien X eine (offene) Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnen $C(X, \mathbb{R}^q)$, $C_b(X, \mathbb{R}^q)$, $C_0(X, \mathbb{R}^q)$ und $C_c(X, \mathbb{R}^q)$ die Räume von Funktionen $f : X \to \mathbb{R}^q$, die stetig, stetig und beschränkt, stetig und im Unendlichen Null, und stetig mit kompaktem Träger sind. Entsprechend stehen $C^i_{\dots}(X, \mathbb{R}^q)$ bzw. $C^\infty_{\dots}(X, \mathbb{R}^q)$ für die i–mal bzw. beliebig oft stetig differenzierbaren (beschränkten ...) Funktionen. Die Supremumsnorm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_\infty$. Die BOREL–meßbaren und beschränkten BOREL–meßbaren Funktionen bezeichnen wir mit $B(X, \mathbb{R}^q)$ und $B_b(X, \mathbb{R}^q)$, Räume (von Äquivalenzklassen) p–fach μ–integrierbarer Funktionen mit $L^p(X, \mu, \mathbb{R}^q)$. Ist $q = 1$, so unterdrücken wir die Angabe von $\mathbb{R}^q$ in den oben aufgeführten Bezeichnungen.

Familien von Teilmengen einer Menge Ω bezeichnen wir mit *Frakturbuchstaben*.

Insbesondere verwenden wir $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{F}_t$ für σ–Algebren, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Omega)$ ist dabei stets die BORELsche oder topologische σ–Algebra. Für die Potenzmenge von Ω schreiben wir 2^Ω.

Die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer Menge Ω ist $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$.

Unter einem *Wahrscheinlichkeitsraum* verstehen wir ein Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ bestehend aus dem *Ereignisraum* Ω, dessen Elemente wir im folgenden stets mit ω bezeichnen werden, der σ–Algebra $\mathfrak{A} \subset 2^\Omega$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathfrak{A}$; mit $\mathbb{E}(\cdot) := \int_\Omega \cdot \, d\mathbb{P}$ bezeichnen wir den *Erwartungswert*. Ist $x \in \mathbb{R}^d$, so schreiben wir ϵ_x für die *Einheitsmasse* (Punktmaß, DIRAC–Maß) in x. Im Falle von MARKOV–Prozessen ist $\mathbb{P}^\mu$ das Wahrscheinlichkeitsmaß, das den Prozeß mit Startverteilung μ beschreibt, insbesondere setzen wir $\mathbb{P}^x := \mathbb{P}^{\epsilon_x}$ und entsprechend $\mathbb{E}^\mu$ bzw. $\mathbb{E}^x$.

Ist X eine Zufallsvariable, d. h. eine meßbare Abbildung $X : \Omega \to E$, E ein topologischer Raum, so bezeichnet $\sigma(X) \subset 2^E$ die von X erzeugte σ–Algebra, das ist definitionsgemäß die kleinste σ–Algebra, bezüglich der X noch meßbar ist. Entsprechend zu verstehen ist $\sigma(X_t, t \in I)$ für eine Familie $\{X_t\}_{t\in I}$ von Zufallsvariablen. An Stelle von $X^{-1}(F) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in F\}$, $F \subset E$, schreiben wir kurz $\{X \in F\}$. Das Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter X—also die *Verteilung* von X—bezeichnen wir mit $\mathbb{P}_X$ oder $\mathbb{P}(X \in \cdot)$.

Die *Faltung* zweier Maße μ, ν auf $\mathbb{R}^d$ ist durch

$$\mu \star \nu(B) := \int_{\mathbb{R}^d} \mu(B - x)\, \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(B - x)\, \mu(dx) \qquad (B \in \mathfrak{B})$$

erklärt; sprechen wir von der Faltung einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ mit dem Maß μ, so verstehen wir darunter die Faltung des (signierten) Maßes $(f \vee 0)\, dx - (f \wedge 0)\, dx$ mit μ. Entsprechend ist die Faltung zweier Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ erklärt.

Für die FOURIER–*Transformation* eines Maßes μ auf $\mathbb{R}^d$ schreiben wir $\hat{\mu}(\cdot)$. Sie ist gegeben durch

$$\hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)}\, \mu(dx) \qquad (\xi \in \mathbb{R}^d).$$

Wie oben verstehen wir unter der FOURIER–Transformation einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ die des (signierten) Maßes $(f \vee 0)\, dx - (f \wedge 0)\, dx$ und schreiben dafür kurz $\hat{f}(\cdot)$. Ist auch $\hat{f}$ integrierbar, so erhalten wir folgende Umkehrformel:

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

Die *bedingte Erwartung* bezüglich einer Unter–σ–Algebra $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{E}(X|\mathfrak{C})$. Wird $\mathfrak{C}$ von einer Zufallsvariablen Y erzeugt, so schreiben wir kurz $\mathbb{E}(X|Y) := \mathbb{E}(X|\mathfrak{C})$. Ist $X = 1_A$, $A \in \mathfrak{A}$, eine Indikatorfunktion, so sprechen wir von der *bedingten Wahrscheinlichkeit* und schreiben $\mathbb{P}(A|\mathfrak{C}) := \mathbb{E}(1_A|\mathfrak{C})$.

Schließlich bezeichne in allen Rechnungen c eine nicht negative, reelle Konstante, deren Wert sich von Zeile zu Zeile ändern darf.

1.2 Halbgruppen von Operatoren

In diesem Abschnitt sei $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ stets ein reeller BANACH–Raum mit Norm $\|\cdot\|$.

1.1 Definition. Eine Familie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ beschränkter Operatoren $T_t : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ heißt *stark stetige Halbgruppe* oder C_0*–Halbgruppe*, wenn für alle $u \in \mathcal{X}$ die Bedingungen

(1) $T_t T_s u = T_s T_t u = T_{s+t} u \qquad (s, t \geq 0)$

(2) $T_0 = \mathrm{id}$

(3) $\lim_{t\to 0} \|T_t u - u\| = 0$

erfüllt sind.

Wir sprechen von einer stark stetigen *Kontraktionshalbgruppe*, wenn außerdem

(4) $\|T_t u\| \leq \|u\| \qquad (t \geq 0),$

gilt.

Da $t \mapsto \log \|T_t\|$ subadditiv ist, existiert der Limes $\omega_0 := \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log \|T_t\|$. Ist $\{T_t\}_{t\geq 0}$ zudem stark stetig, dann gibt es zu jedem $\overline{\omega}_0 > \omega_0$ eine Konstante $M = M(\overline{\omega}_0) \geq 1$, so daß

$$\mathrm{e}^{\omega_0 t} \leq \|T_t\| \leq M\, \mathrm{e}^{\overline{\omega}_0 t} \qquad (t \geq 0) \tag{1.1}$$

gilt, vgl. YOSIDA [79], p. 232. Für Kontraktionshalbgruppen gilt $\omega_0 \leq 0$ und wir können stets $\overline{\omega}_0 = 0$ und $M = 1$ wählen. In Zusammenhang mit Halbgruppen werden wir die Größen ω_0, $\overline{\omega}_0$ und M stets wie in (1.1) verstehen.

1.2 Definition. Der (*infinitesimale*) *Erzeuger* A einer C_0–Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ auf $\mathcal{X}$ ist der durch den starken Limes

$$Au := \lim_{t \searrow 0} \frac{T_t u - u}{t} \tag{1.2}$$

auf der Menge

$$D(A) := \{u \in \mathcal{X} : \text{der starke Limes (1.2) existiert}\} \tag{1.3}$$

erklärte lineare Operator.

Wir stellen im folgenden einige Eigenschaften des Erzeugers A einer Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ auf $\mathcal{X}$ zusammen, die z. B. in DAVIES [18] Kapitel 1.1–1.3 und Kapitel 2.1–2.2 bewiesen werden.

Der Operator $(A, D(A))$ ist dicht definiert und abgeschlossen, d. h. für jede Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $u_n \to u$ und $Au_n \to v$ gelten $u \in D(A)$ und $v = Au$. Auf $D(A)$ kommutieren A und T_t, und es gilt

$$\frac{d}{dt} T_t u = AT_t u = T_t A u \qquad (t \geq 0, u \in D(A)).$$

Die *Resolventenmenge* $\rho(A)$ des Operators A, das ist die (stets offene) Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\lambda - A$ invertierbar ist, enthält eine *rechte* komplexe Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \omega_0\}$. Mit $\sigma(A) := \rho(A)^c$ bezeichnen wir das Spektrum von A.

Die *Resolvente* $\{R(\lambda, A)\}_{\lambda \in \rho(A)}$, $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$, des Operators A ist per definitionem eine Familie beschränkter Operatoren auf $\mathcal{X}$ mit Werten in $D(A)$; die Operatoren genügen der Resolventenabschätzung

$$\|R(\lambda, A)u\| \leq M\,(\operatorname{Re}\lambda - \overline{\omega}_0)^{-1}\|u\| \qquad (\lambda \in \rho(A), \operatorname{Re}\lambda > \overline{\omega}_0, u \in \mathcal{X}) \tag{1.4}$$

und erfüllen die erste

$$R(\lambda, A) - R(\lambda', A) = (\lambda' - \lambda)\,R(\lambda, A)R(\lambda', A) \qquad (\lambda, \lambda' \in \rho(A)) \tag{1.5}$$

und zweite *Resolventengleichung*

$$AR(\lambda, A) - BR(\lambda, B) = \lambda(R(\lambda, A) - R(\lambda, B)) \qquad (\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)), \tag{1.6}$$

wobei B ein weiterer abgeschlossener Operator auf $\mathcal{X}$ ist. Es gilt die folgende Integraldarstellung

$$R(\lambda, A)u = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t u\,dt \qquad (\lambda \in \rho(A), u \in \mathcal{X}), \tag{1.7}$$

wobei die Integration im Sinne von Bochner zu verstehen ist. Da A und T_t auf $D(A)$ vertauschen, gilt

$$AR(\lambda, A)u = R(\lambda, A)Au \qquad (\lambda \in \rho(A), u \in D(A)).$$

Man beachte aber, daß der Operator $AR(\lambda, A)$ auf ganz $\mathcal{X}$ erklärt ist und somit $R(\lambda, A)A$ fortsetzt. Es gilt

$$\|AR(\lambda, A)u\| = \|\lambda R(\lambda, A)u - (\lambda - A)R(\lambda, A)u\| \leq \left(\frac{M\,|\lambda|}{\operatorname{Re}\lambda - \overline{\omega}_0} + 1\right)\|u\| \tag{1.8}$$

für alle $u \in \mathcal{X}$ und $\lambda \in \rho(A)$, $\operatorname{Re}\lambda > \overline{\omega}_0$.

Hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, daß der Abschluß eines abschließbaren Operators A auf $\mathcal{X}$ der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe ist, gibt der folgende Satz von Hille-Yosida.

1.3 Satz. (Ethier, Kurtz [23] p. 16, Theorem 2.12) *Es sei A ein abschließbarer Operator auf $\mathcal{X}$. Der Abschluß $\overline{A}$ ist genau dann der Erzeuger einer C_0–Kontraktionshalbgruppe, wenn die Bedingungen*

(1) *$D(A)$ ist dicht in $\mathcal{X}$;*

(2) *$(0, \infty) \subset \rho(A)$;*

(3) *$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$ für alle $\lambda > 0$;*

(4) $(\lambda - A)(D(A))$ *ist dicht in* $\mathcal{X}$ *für ein* $\lambda > 0$*;*

erfüllt sind.

Ein Operator, der den Bedingungen (2) und (3) genügt, wird *dissipativ* genannt.

Wir wollen nun auf einige spezielle Halbgruppen eingehen. Dazu sei E ein beliebiger metrischer Raum.

1.4 Definition. Eine Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ von Operatoren auf $B_b(E)$ heißt *sub–*MARKOV*sch*, wenn

(1) $0 \leq f \leq 1$ impliziert $0 \leq T_t f \leq 1 \qquad (t \geq 0, f \in B_b(E))$

(2) $f_n \downarrow 0$ impliziert $T_t f_n \downarrow 0 \qquad (t \geq 0, f_n \in B_b(E))$

gelten.

Die Halbgruppe heißt MARKOV*sch*, wenn außerdem

(3) $T_t 1 = 1 \qquad (t \geq 0)$

erfüllt ist.

Die Familie $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sei (sub)–MARKOVsch. Durch die Zuordnung

$$T_t(x, B) := T_t 1_B(x) \qquad (t \geq 0, x \in E, B \in \mathfrak{B}(E))$$

erhalten wir eine Halbgruppe von (sub)–Wahrscheinlichkeitskernen. Die Halbgruppeneigenschaft läßt sich dann in Form der CHAPMAN–KOLMOGOROV–Gleichungen schreiben:

$$(1.9) \quad T_{s+t}(x, B) = \int_E T_t(y, B) T_s(x, dy) = \int_E T_s(y, B) T_t(x, dy) \qquad (s, t \geq 0).$$

Umgekehrt kann man aus einer Halbgruppe $\{T_t(\cdot,\cdot)\}_{t\geq 0}$ von (sub)–Wahrscheinlichkeitskernen durch

$$T_t f(x) := \int_E f(y) T_t(x, dy) \qquad (t \geq 0, f \in B_b(E))$$

eine (sub)–MARKOVsche Halbgruppe von Operatoren gewinnen.

Wir nennen eine Familie von Kernen auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B})$ *translationsinvariant*, wenn

$$T_t(x, B) = T_t(0, B - x) \qquad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathfrak{B})$$

gilt. Wegen (1.9) sprechen wir dann von einer Faltungshalbgruppe.

1.5 Definition. Eine MARKOVsche Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$, die den Raum $C_0(E)$ in sich abbildet, heißt FELLER–*Halbgruppe*.

Die Eigenschaft $T_t(C_0(E)) \subset C_0(E)$ heißt FELLER–Eigenschaft. Sie impliziert insbesondere $T_t(C_b(E)) \subset C_b(E)$, was manchmal auch als FELLER–*Eigenschaft* bezeichnet wird: sicherlich gilt $T_t(C_b(E)) \subset B_b(E)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\phi_n \in C_c(E)$ eine Funktion mit $1_{B_n(0)} \leq \phi_n \leq 1_{B_{n+1}(0)}$. Nach dem Satz von DINI konvergiert dann $T_t\phi_n$ lokal gleichmäßig gegen die konstante Funktion $T_t 1$. Ist $f \in C_b(E)$, so gilt $f\phi_n \in C_0(E)$, also $T_t(f\phi_n) \in C_0(E)$, und wir finden

$$|T_t f(x) - T_t(f\phi_n)(x)| \leq \|f\|_\infty \, T_t(1-\phi_n)(x) \to 0$$

lokal gleichmäßig in x wenn $n \to \infty$, was schließlich $T_t f \in C_b(E)$ zeigt.

1.6 Definition. Eine MARKOVsche Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ die den Raum $B_b(E)$ in $C_b(E)$ abbildet, heißt *starke* FELLER–*Halbgruppe*.

Wie oben sieht man, daß die Forderung $T_t f \in C_0(E)$ für alle $f \in B_b(E)$, die im Unendlichen verschwinden, die starke FELLER–Eigenschaft impliziert.

1.3 Stochastische Prozesse

In diesem Abschnitt wollen wir die für unsere Ausführungen wesentlichen Definitionen und Grundlagen aus der Theorie der stochastischen Prozesse kurz vorstellen.

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B})$ der mit der BORELschen σ-Algebra $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^d = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ versehene EUKLIDische Raum. Ist $\{X_t\}_{t\geq 0}$ eine Familie von $\mathfrak{A}$–$\mathfrak{B}$ meßbaren Zufallsvariablen auf Ω mit Werten in $\mathbb{R}^d$, so heißt das Tupel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^d, X_t, t \geq 0)$ *d–dimensionaler stochastischer Prozeß*. Es ist üblich, die *Indexmenge* $[0, \infty)$ als *Zeitmenge* zu deuten; infolgedessen sprechen wir von einem *Zeitpunkt* $t \geq 0$ und einem *Zeitintervall* $I \subset [0, \infty)$.

Eine *Filtration* ist eine isotone Familie $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ von Unter–σ–Algebren $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{A}$. Sind die Zufallsvariablen X_t für alle $t \geq 0$ sogar $\mathfrak{F}_t$–$\mathfrak{B}$ meßbar, so heißt der Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ der Filtration $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ *adaptiert*. Wir schreiben dann $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^d, X_t, \mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ oder abkürzend $\{X_t, \mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$. Offensichtlich ist ein Prozeß genau dann einer Filtration $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ adaptiert, wenn die *kanonische Filtration* $\{\mathfrak{F}_t^X\}_{t\geq 0}$ des Prozesses,

$$\mathfrak{F}_t^X := \sigma\left(X_s : s \leq t\right) \qquad (t \geq 0),$$

für jedes $t \geq 0$ eine Unter–σ–Algebra $\mathfrak{F}_t^X \subset \mathfrak{F}_t$ von $\mathfrak{F}_t$ ist. *Wird keine Filtration explizit erwähnt, so wählen wir stets die kanonische Filtration.* Eine Filtration $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ heißt *rechtsseitig stetig*, wenn

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s \qquad (t \geq 0)$$

gilt.

Unter einer $\mathfrak{F}_t$–*Optionszeit* verstehen wir eine Abbildung $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ mit der Eigenschaft

$$\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Eine $\mathfrak{F}_t$–Optionszeit τ, die zudem

$$\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

erfüllt, nennen wir *strenge* $\mathfrak{F}_t$*–Optionszeit*. Jeder strengen $\mathfrak{F}_t$–Optionszeit τ wird die σ–Algebra

$$\mathfrak{F}_\tau := \{A \in \sigma(\mathfrak{F}_s : s \geq 0) : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \;\; \text{für alle } t \geq 0\}$$

und jeder $\mathfrak{F}_t$–Optionszeit τ die σ–Algebra

$$\mathfrak{F}_{\tau+} := \{A \in \sigma(\mathfrak{F}_s : s \geq 0) : A \cap \{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t \;\; \text{für alle } t \geq 0\}$$

zugeordnet. Falls die Filtration $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ rechtsstetig ist, ist jede Optionszeit bereits eine strenge Optionszeit. Schon jetzt sei bemerkt, daß für einen linksseitig quasistetigen càdlàg Prozeß $\{X_t, \mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$, siehe Definition 1.7, die *Zeit des ersten Treffers* τ_B einer Menge $B \in \mathfrak{B}$

$$\tau_B(\omega) := \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in B\}$$

und die *Eintrittszeit* τ_B^0 in die Menge $B \in \mathfrak{B}$

$$\tau_B^0(\omega) := \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in B\}$$

typische Beispiele für Optionszeiten sind. Ist B eine offene Menge, dann können wir auf die Quasi-Stetigkeit von links verzichten. Im allgemeinen sind diese Optionszeiten keine strengen Optionszeiten.

Für festes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $[0, \infty) \ni t \mapsto X_t(\omega)$ *Pfad* des Prozesses $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Wir schreiben auch $X(t, \omega) = X_t(\omega)$; insbesondere setzen wir für Zeitmengen $E \subset [0, \infty)$

$$X(E, \omega) := \left\{X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d : t \in E\right\}$$

und schreiben dafür abkürzend $X(E) = X(E, \cdot)$. Die einseitigen Limiten eines Pfades im Punkte $t > 0$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} X_{t+}(\omega) &:= \lim_{s \searrow t} X_s(\omega) \\ X_{t-}(\omega) &:= \lim_{s \nearrow t} X_s(\omega), \end{aligned}$$

wobei wir X_{0+} entsprechend verstehen. Einen Pfad, der in jedem Zeitpunkt linksseitige Limiten besitzt und rechtsseitig stetig ist, nennen wir *càdlàg*[1].

1.7 Definition. Ein stochastischer Prozeß $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^d, X_t, t \geq 0)$ heißt *càdlàg*–Prozeß, wenn fast alle Pfade rechtsseitig stetig sind und endliche linksseitige Limiten besitzen.

[1]**c**ontinu **à d**roite et admettant des **l**imites **à g**auche

Ein càdlàg–Prozeß heißt *linksseitig quasi–stetig*, wenn für jede isotone Folge von $\mathfrak{F}_t$-Optionszeiten $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\tau_n = \tau$ und für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = X_\tau \qquad \mathbb{P}^x\text{-f. s. auf } \{\tau < \infty\}$$

gilt. Dabei verstehen wir unter $X_\tau(\omega)$ die Zufallsvariable $X_{\tau(\omega)}(\omega)$.

Da wir an wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragestellungen interessiert sind, dürfen wir fortan ohne Einschränkung annehmen, daß jeder càdlàg–Prozeß *ausschließlich* càdlàg–Pfade besitzt. Es bezeichne $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^d}$ die Menge aller rechtsseitig stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ mit endlichen linksseitigen Limiten. Dann gibt es stets eine kanonische *Realisierung* $(\mathcal{D}_{\mathbb{R}^d}, \sigma(\mathfrak{F}_t^Y, t \geq 0), \mathbb{P}', \mathbb{R}^d, Y_t, \mathfrak{F}_t^Y, t \geq 0)$ des ursprünglichen Prozesses $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^d, X_t, \mathfrak{F}_t^X, t \geq 0)$, d. h. die endlich-dimensionalen Verteilungen dieser Prozesse stimmen überein.

1.8 Definition. Der Prozeß $(\Omega, \mathfrak{A}, \{\mathbb{P}^x\}_{x\in\mathbb{R}^d}, \mathbb{R}^d, X_t, \mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ heißt Markov–*Prozeß*, wenn

(1) für alle $x \in \mathbb{R}^d$ das Tupel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}^x, \mathbb{R}^d, X_t, \mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ ein stochastischer Prozeß ist,

(2) für alle $A \in \mathfrak{A}$ die Abbildung $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{P}^x(A)$ $\mathfrak{B}$–meßbar ist,

(3) für alle $x \in \mathbb{R}^d$ $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$ gilt,

(4) für alle $s, t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $B \in \mathfrak{B}$ die (*schwache*) Markov–*Eigenschaft* erfüllt ist

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | \mathfrak{F}_s) = \mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B | X_s) = \mathbb{P}^{X_s}(X_t \in B) \qquad (\mathbb{P}^x\text{-f. s.}). \tag{1.10}$$

Gilt (1.10) nicht nur für feste Zeiten $s \geq 0$, sondern auch für beliebige $\mathfrak{F}_t$–Optionszeiten σ auf der Menge $\{\sigma < \infty\}$,

$$\mathbb{P}^x(X_{\sigma+t} \in B | \mathfrak{F}_{\sigma+}) = \mathbb{P}^x(X_{\sigma+t} \in B | X_{\sigma+}) = \mathbb{P}^{X_\sigma}(X_t \in B) \quad (\mathbb{P}^x\text{-f. s.}), \tag{1.11}$$

dann wird der Prozeß *starker* Markov–*Prozeß* genannt. Die Eigenschaft (1.11) heißt *starke* Markov–*Eigenschaft*.

Für spätere Anwendungen wird sich folgende äquivalente Formulierung der starken Markov–Eigenschaft als hilfreich erweisen:

$$\mathbb{P}^x(A \cap \{X_{\sigma+t} \in B\}) = \int_A \mathbb{P}^{X_\sigma(\omega)}(X_t \in B)\, \mathbb{P}^x(d\omega) \quad (B \in \mathfrak{B}, A \in \{\sigma < \infty\} \cap \mathfrak{F}_{\sigma+}).$$

Die Übergangskerne eines Markov–Prozesses bilden eine Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen; umgekehrt kann aus jeder Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen ein Markov–Prozeß konstruiert werden, siehe z. B. Bauer [5] pp.

320–323, Satz 36.4. Hinreichend dafür, daß ein MARKOVscher Prozeß die starke MARKOV–Eigenschaft besitzt, ist die Gültigkeit von

$$(1.12) \qquad \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \mathbb{E}^x(f(X_t)) \in C_0(\mathbb{R}^d) \quad \text{für alle } f \in C_0(\mathbb{R}^d).$$

Bedingung (1.12) wird FELLER–*Eigenschaft* genannt (vgl. hierzu auch die Bemerkung nach Definition 1.5).

1.9 Definition. Jeder MARKOVsche Prozeß $(\Omega, \mathfrak{A}, \{\mathbb{P}^x\}_{x\in\mathbb{R}^d}, \mathbb{R}^d, X_t, \mathfrak{F}_t, t \geq 0)$, welcher der Bedingung (1.12) genügt, heißt FELLER–*Prozeß*.

Man kann zeigen,—vgl. WILLIAMS [78] pp. 117–123, Sections III.11–III.15, insbesondere für die starke MARKOV–Eigenschaft Section III.15 in Verbindung mit pp. 73–74, Section II.45—daß FELLER–Prozesse genau die Prozesse sind, die von FELLERschen Halbgruppen erzeugt werden.

1.10 Definition. Ein HUNT–*Prozeß* ist ein stark MARKOVscher, linksseitig quasi-stetiger càdlàg–Prozeß $(\Omega, \mathfrak{A}, \{\mathbb{P}^x\}_{x\in\mathbb{R}^d}, \mathbb{R}^d, X_t, \mathfrak{F}_t, t \geq 0)$.

Die *Zuwächse* $X_t - X_s$, $(0 \leq s < t)$, eines Prozesses $\{X_t\}_{t\geq 0}$ heißen *stationär*, wenn ihre Verteilungen nur von der zeitlichen Differenz $t - s$ abhängen, d. h. wenn

$$\mathbb{P}_{X_t - X_s} = \mathbb{P}_{X_{t-s} - X_0} \qquad (0 \leq s \leq t)$$

gilt. Die Zuwächse heißen *unabhängig*, wenn für jede Wahl von Zeitpunkten $u > v \geq t > s \geq 0$ die Zufallsvariablen $X_u - X_v$ und $X_t - X_s$ stochastisch unabhängig sind.

1.11 Definition. Ein LÉVY–*Prozeß* $\{X_t, \mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ ist ein an die Filtration $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ adaptierter Prozeß mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, der stetig in Wahrscheinlichkeit ist, d. h. der für alle $\epsilon > 0$ der Beziehung

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}^0\left(|X_t - X_s| > \epsilon\right) = 0 \qquad (t \geq 0)$$

genügt.

Man beachte, daß derart definierte LÉVY–Prozesse eindeutig bestimmte càdlàg–Modifikationen besitzen, die wiederum LÉVY–Prozesse sind (PROTTER [63] pp. 21–22, Theorem 30 oder DOOB [20] pp. 388–390, Section 12 (b)), und daß diese dann auch stark MARKOVsch (ITÔ [44] p. 162, p. 163 unten) und quasi-linksstetig (BAUER [3] p. 88, Satz 3.1.1 oder BLUMENTHAL, GETOOR [11] p. 50, letzter Schritt im Beweis von Theorem 9.4) sind. Insbesondere sind derartige Modifikationen LÉVYscher Prozesse HUNT–Prozesse.

Im folgenden werden wir daher stets mit Modifikationen von LÉVY*–Prozessen arbeiten, die ausschließlich càdlàg–Pfade aufweisen.*

1.4 Lévy–Prozesse und negativ definite Funktionen

Da LÉVY–Prozesse stationäre und unabhängige Zuwächse haben, sind die Verteilungen $\mathbb{P}^0_{X_t}$, $t \geq 0$, *unbegrenzt teilbar*, d. h. daß jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}^0_{X_t} = \underbrace{\mathbb{P}^0_{X_{t/n}} \star \ldots \star \mathbb{P}^0_{X_{t/n}}}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Die FOURIER–Transformierte einer unbegrenzt teilbaren Verteilung besitzt die Gestalt

$$\widehat{\mathbb{P}^0_{X_t}}(\xi) := \mathbb{E}^0\left(\mathrm{e}^{i(X_t,\xi)}\right) = \mathrm{e}^{-ta(\xi)} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^d)$$

mit dem eindeutig bestimmten *charakteristischen Exponenten* $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, vgl. COURRÈGE [16] pp. 20–22, Théorème 3 und Théorème 4, oder im eindimensionalen Fall DOOB [20] p. 132, Theorem 4.1.

1.12 Definition. Eine Funktion $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt *negativ definit*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\xi_j \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq j \leq n$, die Matrix $\left(a(\xi_i) + \overline{a(\xi_j)} - a(\xi_i - \xi_j)\right)_{i,j=1\ldots n}$ positiv hermitesch ist, d. h. falls für jede Wahl komplexer Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(a(\xi_i) + \overline{a(\xi_j)} - a(\xi_i - \xi_j)\right) \lambda_i \overline{\lambda}_j \geq 0$$

gilt.

Die Menge der negativ definiten Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, die der stetigen negativ definiten Funktionen mit $\mathcal{CN}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ und wir setzen $\mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) := \mathcal{CN}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \cap \{a : a(0) = 0\}$.

Offenbar ist $a(0) \geq 0$ und, sofern a reellwertig ist, $a(\xi) \geq a(0) \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Beispiele negativ definiter Funktionen $\mathbb{R}^d \ni \xi \mapsto a(\xi)$ sind die Funktionen $\xi \mapsto |\xi|^\alpha$ mit $\alpha \in [0, 2]$, $\xi \mapsto \log(1 + |\xi|^\alpha)$ mit $\alpha \in [0, 2]$, und $\xi \mapsto c$ mit einer positiven Konstanten $c \geq 0$, aber auch $\xi \mapsto i(a, \xi)$ mit $a \in \mathbb{R}^d$.

1.13 Satz. (BERG, FORST [6] p. 40, Proposition 7.5) *Eine Funktion $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ist genau dann negativ definit, wenn*

(1) $a(0) \geq 0$;

(2) $a(\xi) = \overline{a(-\xi)} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^d)$;

(3) *für jede Wahl von $n \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a(\xi_i - \xi_j) \lambda_i \overline{\lambda}_j \leq 0;$$

gelten.

1.14 Satz. (Berg, Forst [6] p. 41, Theorem 7.8) *Eine Funktion $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ist genau dann negativ definit, wenn $a(0) \geq 0$ gilt, und die Funktion $\xi \mapsto \mathrm{e}^{-ta(\xi)}$ für jedes $t \geq 0$ positiv definit ist.*

Fourier–Transformierte von Maßen sind positiv definite Funktionen. Somit sind die charakteristischen Exponenten genau die *stetigen* negativ definiten Funktionen a mit $a(0) = 0$, die wir nunmehr mit Hilfe der Lévy–Khinchine–Formel beschreiben können.

1.15 Satz. (Berg, Forst [6] p. 75, Theorem 10.8) *Eine Funktion $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ist genau dann der charakteristische Exponent eines* Lévy*–Prozesses, wenn*

(1) *ein Vektor $\ell \in \mathbb{R}^d$,*

(2) *eine symmetrische, positiv definite Matrix $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $S \geq 0$*

(3) *ein* Borel*–Maß ν auf $\mathbb{R}^d$ mit $\nu\{0\} = 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\, \nu(dx) < \infty$*

existieren, so daß für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ die Darstellung

$$a(\xi) = -i(\ell, \xi) + \frac{1}{2}(S\xi, \xi) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \mathrm{e}^{i(x,\xi)} + \frac{i(x,\xi)}{1+|x|^2}\right) \nu(dx) \tag{1.13}$$

gilt. Die Funktion a ist durch die Angabe des Tripels (ℓ, S, ν) und durch die Formel (1.13) *eindeutig bestimmt.*

Das Maß ν aus Satz 1.15 heißt Lévy–*Maß* des Prozesses $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Das Lévy–Maß gibt Auskunft über das Sprungverhalten des zu Grunde liegenden Prozesses. Bezeichnen wir mit

$$J_t^X(\omega) := X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)$$

den dem Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ zugeordneten Sprungprozeß, und ist

$$N_{T,\lambda}^X(\omega) := \#\{J_t^X(\omega) : t \leq T, 0 < |J_t^X(\omega)| < \lambda\} \qquad (T \geq 0, \lambda > 0),$$

so gilt, vgl. Itô [44] pp. 149, 153–155 oder Doob [20] p. 423,

$$\mathbb{E}^0 N_{T,\lambda}^X = T \cdot \int_{B_\lambda(0)} \nu(dx).$$

Mit Hilfe der Itô–*Darstellung* des Prozesses $\{X_t\}_{t\geq 0}$ läßt sich eine direkte Verbindung zwischen dem Lévy–Tripel (ℓ, S, ν) und dem Prozeß herstellen, vgl. für den eindimensionalen Fall Itô [44] p. 145, Theorem in Verbindung mit den Anmerkungen zu zeitlich homogenen Prozessen pp. 153–155, und im mehrdimensionalen Fall pp. 168–169 (mit Beweisskizze) oder auch Fristedt [25] p. 249 (2.4) (ohne Beweis). Es gilt

$$X_t(\omega) = \ell t + W_t(\omega) + \lim_{\epsilon\to 0}\left(\sum_{s\leq t, |J_s^X|>\epsilon} J_s^X(\omega) - t\int_{B_\epsilon(0)^c} \frac{y}{1+|y|^2}\, \nu(dy)\right) \quad (t \geq 0) \tag{1.14}$$

$\mathbb{P}^x$-fast sicher mit einer zentrierten und in $X_0 = x$ startenden BROWNschen Bewegung W_t mit Kovarianzmatrix $t\,S$. Darüber hinaus sind die Prozesse $\{W_t\}_{t\geq 0}$ und $\{X_t - W_t\}_{t\geq 0}$ stochastisch unabhängig.

1.16 Definition. Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein LÉVY–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Dann heißt für jedes $c > 0$

$$X_{(c)}(t,\omega) := X(t,\omega) - \sum_{s\leq t;|J^X(s,\omega)|>c} J^X(s,\omega) \tag{1.15}$$

gestrippter Prozeß.

1.17 Bemerkung. Jeder gestrippte Prozeß $\{X_{(c)}(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ ist wiederum ein LÉVY–Prozeß, dessen LÉVY–Maß die Einschränkung des LÉVY–Maßes ν von $\{X_t\}_{t\geq 0}$ auf die Kugel $\overline{B_c(0)}$ ist. Mithin besitzt ein gestrippter Prozeß alle Momente, vgl. PROTTER [63] pp. 25–26, Theorem 34.

Da der Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ausschließlich càdlàg–Pfade und daher auch nur endlich viele Sprünge $J^X(t) > c$ auf einem kompakten Zeitintervall besitzt, gibt es für jedes $\omega \in \Omega$ eine Zahl $\epsilon(\omega) > 0$, so daß

$$X_{(c)}(t,\omega) = X(t,\omega) \qquad (t \leq \epsilon(\omega)) \tag{1.16}$$

für jedes feste $\omega \in \Omega$ gilt.

Auf dem Kompaktum $[0,1]$ hat $\{X_t\}_{t\geq 0}$ fast sicher nur beschränkte Sprünge. Daher besagt (1.16) gerade, daß es für jedes $\delta > 0$ eine Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega') \leq \delta$ gibt, so daß

$$X_{(c)}(t,\omega) = X(t,\omega) \qquad (\omega \in \Omega', 0 \leq t \leq 1) \tag{1.17}$$

für hinreichend großes $c = c_{\delta,[0,1]} > 0$ gilt.

Wir nennen einen MARKOV–Prozeß *symmetrisch*, wenn für alle Mengen $B \in \mathfrak{B}$

$$\mathbb{P}^0(X_t \in B) = \mathbb{P}^0(-X_t \in B) \qquad (t \geq 0)$$

gilt. Offenbar ist ein LÉVY–Prozeß genau dann symmetrisch, wenn sein charakteristischer Exponent $a(\cdot)$ reellwertig ist. In diesem Fall vereinfacht sich die LÉVY–KHINCHINE–Formel zu

$$a(\xi) = \frac{1}{2}(S\xi,\xi) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(x,\xi))\ \nu(dx). \tag{1.18}$$

Der charakteristische Exponent $a(\cdot)$ eines LÉVY–Prozesses beschreibt den *Erzeuger A des Prozesses*, worunter wir stets den Erzeuger A der zugeordneten Operatorenhalbgruppe verstehen. In BERG, FORST [6] pp. 92–93, Theorem 12.16 wird gezeigt, daß

$$Au(x) = -a(D)u(x) = -(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{-i(x,\xi)}\,d\xi \qquad (u \in C_c(\mathbb{R}^d)) \tag{1.19}$$

gilt und daß der Definitionsbereich des Operators A der anisotrope SOBOLEV–Raum

$$H^{1,a}(\mathbb{R}^d) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{1,a} < \infty\} \tag{1.20}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{1,a}^2 := \int_{\mathbb{R}^d} |1 + a(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \tag{1.21}$$

ist. Anisotrope SOBOLEV–Räume dieses Typs wurden u. a. von JACOB [46] pp. 333–336, Section 4 verwendet. Dort wird auch die Idee, $A = -a(D)$ als *Pseudodifferentialoperator* mit Symbol $-a(\cdot)$ zu deuten, konsequent entwickelt und ausgebaut.

Wir kennzeichnen schließlich eine für uns wichtige Klasse von LÉVY–Prozessen.

1.18 Definition. Ein LÉVY–Prozeß heißt *stabil*, wenn es für jeden Zeitpunkt $t > 0$ Konstanten $c_t > 0$ und $\gamma_t \in \mathbb{R}$ derart gibt, daß

$$\mathbb{P}^0_{X_t} = \mathbb{P}^0_{c_t X_1 + \gamma_t}$$

gilt. Für $\gamma_t = 0$ heißt der Prozeß *strikt stabil*.

Eine Charakterisierung der stabilen Prozesse findet man bei FRISTEDT [25] pp. 262–264, allerdings ohne Beweis. Der eindimensionale Fall ist bei FELLER [24] pp. 166–168 und pp. 540–542 ausführlich dargestellt; auf den Fall $d = 2$ wird dort pp. 559–560 kurz eingegangen.

Die Konstante c_t ist notwendig von der Form $t^{\frac{d}{\alpha}}$ mit einer Zahl $0 < \alpha \le 2$, dem *Index* des Prozesses. Die charakteristischen Exponenten strikt stabiler Prozesse sind für $\alpha = 1$

$$a(\xi) = -i(\ell, \xi) + \frac{\lambda\,\pi}{2} |\xi| \int_{S^{d-1}} \frac{1}{|\xi|} \, |(\theta, \xi)| \, \mu(d\theta),$$

und für $\alpha < 2$, $\alpha \ne 1$,

$$a(\xi) = -\lambda\,\Gamma(-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} |\xi|^\alpha \int_{S^{d-1}} \frac{1}{|\xi|^\alpha} |(\theta, \xi)|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sgn}(\theta, \xi) \, \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) \mu(d\theta),$$

wobei λ eine beliebige reelle Konstante und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Einheitssphäre $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ sind.

Durch Addition eines deterministischen Driftterms $t\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}^d$, erhalten wir aus einem *strikt stabilen* Prozeß $\{X_t\}_{t \ge 0}$ den *stabilen* Prozeß $\{X_t + t\kappa\}_{t \ge 0}$. Dieser Operation entspricht im charakteristischen Exponenten die Addition von $-i\,(\kappa, \xi)$. Alle sonstigen *stabilen* Prozesse haben charakteristische Exponenten der Form

$$a(\xi) = -i(\kappa, \xi) + \frac{c\pi}{2} |\xi| \int_{S^{d-1}} \frac{1}{|\xi|} |(\theta, \xi)| \left(1 + i \operatorname{sgn}(\theta, \xi) \, \frac{2}{\pi} \log |(\theta, \xi)|\right) \mu(d\theta)$$

mit beliebigen Konstanten $\kappa \in \mathbb{R}^d$ und $c \in \mathbb{R}$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf der Einheitssphäre $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$.

Ähnlich wie den strikt stabilen Prozessen kann man einer großen Klasse von LÉVY–Prozessen Indices zuordnen. Diese Idee geht auf BLUMENTHAL und GETOOR [10] zurück. Wir betrachten dabei nur *normierte* Prozesse, worunter wir Prozesse verstehen, die

(1) *keinen* GAUSS*schen Anteil* haben, d. h. Prozesse mit verschwindender quadratischer Form $S = 0$ im charakteristischen Exponenten,

und die

(2) *keinen Driftterm* haben, *wenn* $\int_{\{|x|<1\}} |x| \, \nu(dx) < \infty$ ist, d. h. deren charakteristischer Exponent die Form

$$a(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \mathrm{e}^{i(x,\xi)}) \, \nu(dx)$$

annimmt.

1.19 Definition. Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein normierter LÉVY–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und charakteristischem Exponenten a. Dann heißt

$$\beta := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\{|x|<1\}} |x|^\lambda \, \nu(dx) < \infty \right\} \tag{1.22}$$

Index des Prozesses. Die *unteren Indices* β' und β'' sind durch

$$\beta' := \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{\lambda - d} \, \frac{1 - \exp(-\mathrm{Re}\, a(\xi))}{\mathrm{Re}\, a(\xi)} \, d\xi < \infty \right\} \tag{1.23}$$

und

$$\beta'' := \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lim_{|\xi|\to\infty} \frac{\mathrm{Re}\, a(\xi)}{|\xi|^\lambda} = \infty \right\} \tag{1.24}$$

gegeben. Der Index γ ist durch

$$\gamma := \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \limsup_{r\to 0} \, r^{-\lambda} \int_0^1 \mathbb{P}^0(|X_t| \leq r) \, dt < \infty \right\} \tag{1.25}$$

erklärt.

Wir werden diese Indices im folgenden stets mit β, β', β'' und γ oder, wenn notwendig, mit β_X usw. bezeichnen.

Die Standardreferenz für die Indices β, β', β'' ist BLUMENTHAL, GETOOR [10], für γ die Arbeit von PRUITT [65].

Ohne die Einschränkung $S = 0$ wäre stets $\beta'' = \beta' = \beta = \gamma = 2$, da der quadratische Term die Asymptotik für $|\xi| \to \infty$ dominierte. Entsprechend wäre für $\beta < 1$ der Driftterm beherrschend.

Ohne Beweis seien hier einige Tatsachen zusammengestellt: Stets gelten

$$0 \leq \beta'' \leq \beta' \leq \beta \leq 2$$

und

$$0 \leq \beta'' \wedge d \leq \beta' \wedge d \leq \gamma \leq \beta \leq 2,$$

dabei ist in *jedem* Fall auch die strikte Relation "$<$" möglich. Genügt der Realteil des charakteristischen Exponenten der Bedingung $\operatorname{Re} a(x) \geq 2 \log |x|$ für große $|x|$, oder ist a reellwertig, dann gilt

$$\gamma = \beta' \wedge d.$$

Oben genannte Bedingungen sind stets erfüllt, wenn $\beta'' > 0$ oder $\{X_t\}_{t \geq 0}$ symmetrisch ist. Die Gleichheit $\beta'' = \gamma = \beta = \alpha$ ist genau für die strikt α–stabilen Prozesse erfüllt.

Kapitel 2

Subordination und Bernstein–Funktionen

Der Begriff der *Subordination* von Operatorenhalbgruppen und stochastischen Prozessen geht auf S. BOCHNER zurück, [13] pp. 91–99. Unter Subordination versteht man die Integration einer Halbgruppe von Operatoren $\{T_t\}_{t\geq 0}$ gegen eine Faltungshalbgruppe $\mu_s(dt)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $[0,\infty)$. Wir werden uns daher vorab mit solchen Faltungshalbgruppen beschäftigen.

2.1 Definition. Ein *Subordinator* ist eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ auf $[0,\infty)$, die in der *vagen Topologie* stetig ist, d. h. die

$$\lim_{t\to 0}\int_{[0,\infty)} u\,d\mu_t = \int_{[0,\infty)} u\,d\epsilon_0 = u(0) \qquad (u \in C_c(\mathbb{R}))$$

erfüllt.

Wir wollen diese Definition in die Sprache der Prozesse übertragen.

2.2 Lemma. *Eine Faltungshalbgruppe $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist genau dann ein Subordinator, wenn der zugehörige reelle* LÉVY*–Prozeß fast sicher in* 0 *startet und fast sicher isotone Pfade besitzt.*

Beweis. Wir haben im vorausgehenden Abschnitt bereits festgestellt, daß durch

$$\mathbb{P}^0_{X_t} = \mu_t \qquad (t \geq 0)$$

LÉVY–Prozesse und translationsinvariante MARKOVsche Halbgruppen in eindeutige Beziehung gesetzt sind. Es bleibt, die behaupteten Pfadeigenschaften nachzuweisen.

Dazu sei $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ ein Subordinator. Offenbar gilt $X_0 = 0$ fast sicher, und wegen

$$\mathbb{P}^0(X_r - X_s < 0) = \mathbb{P}^0(X_{r-s} < 0) = \mu_{r-s}((-\infty,0)) = 0$$

gilt außerhalb der $\mathbb{P}^0$–Nullmenge $N := \bigcup_{s<r,r,s\in\mathbb{Q}_+}\{X_r - X_s < 0\}$ daß der Prozeß $\{X_r\}_{r\in\mathbb{Q}_+}$ fast sicher isotone Pfade hat. Da LÉVY–Prozesse càdlàg–Pfade haben, besitzt $\{X_t\}_{t\geq 0}$ fast sicher isotone Pfade.

Umgekehrt gilt $\mu_0 = \mathbb{P}_{X_0} = \epsilon_0$ und wegen

$$\mu_t((-\infty,0)) = \mathbb{P}^0(X_t \in (-\infty,0)) = \mathbb{P}^0(X_t < 0) = 0 \qquad (t \geq 0)$$

auch $\operatorname{supp} \mu_t \subset [0,\infty)$. ////

Auf Grund von Lemma 2.2 bezeichnen wir auch fast sicher in 0 startende, wachsende reelle Lévy–Prozesse als Subordinatoren.

2.3 Lemma. *Es sei $\{S_t\}_{t\geq 0}$ ein Subordinator mit $\mathbb{E}^0 S_t < \infty$ für alle $t \geq 0$. Dann ist die Familie $\{\frac{1}{t}S_t\}_{t>0}$ ein rechtsstetiges Martingal mit inverser Zeitmenge* (reversed martingale)*, für das*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} S_t = \mathbb{E}^0 S_1 \qquad (\mathbb{P}^0\text{–}f.\ s.)$$

gilt.

Beweis. Da der Prozeß $t \mapsto \frac{1}{t}S_t$ rechtsstetig ist, folgt die Existenz des Grenzwerts aus dem zweiten Doobschen Konvergenzsatz, Doob [20], p. 354, (Theorems 4.2, 4.2s) bzw. pp. 328–329, Theorem 4.2.

Es bleibt zu zeigen, daß $\left\{\frac{1}{t}S_t\right\}_{t>0}$ ein Martingal mit umgekehrter Zeitmenge ist. Als ersten Schritt bemerken wir

$$\mathbb{E}^0 S_t = t\mathbb{E}^0 S_1 \qquad (t \geq 0). \tag{2.1}$$

Auf Grund der identisch verteilten Zuwächse des Prozesses $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}^0 S_n = \mathbb{E}^0\Big(\sum_{j=1}^n (S_j - S_{j-1})\Big) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}^0(S_j - S_{j-1}) = n\mathbb{E}^0 S_1$$

und entsprechend $\mathbb{E}^0 S_1 = n\mathbb{E}^0 S_{\frac{1}{n}}$, was (2.1) für $t \in \mathbb{Q}$ und schließlich wegen der Rechtsstetigkeit für alle $t \geq 0$ beweist.

Der Prozeß $R_t := S_{\frac{1}{t}}$ ist ein $\mathfrak{F}_t^R := \sigma(R_s : s \leq t)$–Martingal: für $t < s$ gilt wegen (2.1)

$$\mathbb{E}^0(sR_s|\mathfrak{F}_t^R) = \mathbb{E}^0(sR_s - tR_t|\mathfrak{F}_t^R) + \mathbb{E}^0(tR_t|\mathfrak{F}_t^R) = (s\mathbb{E}^0 R_s - t\mathbb{E}^0 R_t) + tR_t = tR_t,$$

und die Behauptung ist bewiesen. ////

Wir benötigen noch folgendes Lemma, das sich bei Berg, Forst [6] p. 172, Proposition 18.2 findet.

2.4 Lemma. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* Lévy*–Prozeß. Dann ist das* Lévy*–Maß ν durch*

$$\nu = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, \mathbb{P}^0_{X_t}\big|_{\{0\}^c}$$

gegeben. Der Grenzwert ist im Sinne der vagen Topologie zu verstehen.

Der folgende Satz kann aus dem Vergleich der Lévy–Khinchine–Formel mit der (in diesem Falle gesondert zu beweisenden) Darstellungsformel für Bernstein–Funktionen und der Eindeutigkeit dieser Darstellungen gefolgert werden. Vgl. Berg, Forst p. 76, Remark 10.9 und die dort angeführten Sätze. Im Rahmen der bisher angesprochenen Zusammenhänge bietet sich jedoch ein anderer Beweis an.

2.5 Satz. *Ein reeller* Lévy*–Prozeß* $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *ist genau dann ein Subordinator, wenn der charakteristische Exponent* a *die Gestalt*

$$a(\xi) = -i\ell\xi + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{ix\xi})\, \mu(dx) \qquad (\xi \geq 0) \tag{2.2}$$

hat mit $\ell \geq 0$ *und dem* Lévy*–Maß* μ *auf* $(0,\infty)$ *mit* $\int_{(0,\infty)} \frac{x}{1+x}\, \mu(dx) < \infty$.

Die Forderung $\int_{(0,\infty)} \frac{x}{1+x}\, \mu(dx) < \infty$ ist gleichbedeutend mit $\int_{(0,1)} x\, \mu(dx) < \infty$ *und* $\int_{[1,\infty)} \mu(dx) < \infty$.

Beweis von Satz 2.5. Nehmen wir zunächst an, daß $a(\xi)$ die Darstellung (2.2) besitzt. Wir müssen zeigen, daß der Prozeß $\{S_t\}_{t\geq 0}$ fast sicher in 0 startet und isotone Pfade hat. Da

$$\int_{(0,\infty)} \frac{x}{1+x^2}\, \mu(dx) \leq \int_{(0,1)} x\, \mu(dx) + \int_{[1,\infty)} \mu(dx) < \infty$$

gilt, können wir (2.2) auch in der Form

$$a(\xi) = -i\left(\ell + \int_{(0,\infty)} \frac{x}{1+x^2}\, \mu(dx)\right)\xi + \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{ix\xi} + \frac{ix\xi}{1+x^2}\right) \mu(dx) \tag{2.3}$$

schreiben. Somit ist wegen

$$\mathbb{E}\left(e^{i\xi X_0}\right) = e^{-ta(\xi)}\Big|_{t=0} = 1$$

$X_0 = 0$ f. s. klar. Die Darstellung (2.3) zeigt, daß der Prozeß $\{S_t\}_{t\geq 0}$ nur positive Sprünge und positive Drift besitzt, somit fast sicher positive Pfade und wegen

$$\mathbb{P}^0(S_t - S_s < 0) = \mathbb{P}^0(S_{t-s} < 0) = 0$$

fast sicher isotone Pfade hat.

Sei nun umgekehrt ein Subordinator $\{S_t\}_{t\geq 0}$ gegeben. Dann wissen wir bereits, daß das Sprungmaß μ in der Lévy–Khinchine–Formel (1.13) von $(0,\infty)$ getragen wird.

Wir zeigen nun, daß μ nicht nur $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$, sondern auch $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ integriert. Hierzu genügt es zu zeigen, daß

$$\int_{(0,1)} x\, \mu(dx) < \infty$$

gilt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß S_t nur Sprünge besitzt, die kleiner als 1 sind, daß also ES_t stets existiert. Nach Lemma 2.4 gilt

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} x\,\mu(dx) &= \lim_{t\to 0}\int_{(0,1)} x\,\frac{1}{t}\,\mathbb{P}^0_{S_t}(dx) = \lim_{t\to 0}\int_{\{0\le S_t\le 1\}}\frac{1}{t}S_t\,d\mathbb{P}^0\\ &\le \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathbb{E}^0 S_t = \mathbb{E}^0 S_1 < \infty,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 2.3 verwendeten. Somit können wir a als

$$a(\xi) = -i\left(\ell - \int_{(0,\infty)}\frac{x}{1+x^2}\,\mu(dx)\right)\xi + d^2\xi^2 + \int_{(0,\infty)}(1-e^{ix\xi})\,\mu(dx)$$

schreiben und finden für den charakteristischen Exponenten der Laplace–Transformierten $\mathbb{E}^0\big(\mathrm{e}^{-\xi S_t}\big)$

$$a(i\xi) = \left(\ell - \int_{(0,\infty)}\frac{x}{1+x^2}\,\mu(dx)\right)\xi - d^2\xi^2 + \int_{(0,\infty)}(1-e^{-x\xi})\,\mu(dx).$$

Da S_t fast sicher positiv ist, gilt

$$1 \ge \mathbb{E}^0\big(\mathrm{e}^{-\xi S_t}\big) = \mathrm{e}^{-ta(i\xi)} \qquad (t\ge 0, \xi > 0)$$

und daher $a(i\xi)\ge 0$ für alle $\xi > 0$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}0 \le \liminf_{\xi\to\infty}\frac{a(i\xi)}{\xi^2} &= -d^2 + \liminf_{\xi\to\infty}\int_{(0,\infty)}\frac{1-\mathrm{e}^{-x\xi}}{\xi^2}\,\mu(dx)\\ &\le -d^2 + \liminf_{\xi\to\infty}\frac{1}{\xi}\int_{(0,\infty)} x\wedge 1\,\mu(dx)\\ &= -d^2,\end{aligned}$$

d. h. $d=0$. Schließlich existiert wegen $\int_{(0,1)} x\,\mu(dx) < \infty$ zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so daß $\int_{(0,\delta)} x\,\mu(dx) < \epsilon$. Somit folgt

$$\begin{aligned}0 \le \liminf_{\xi\to\infty}\frac{a(i\xi)}{\xi} &= \left(\ell - \int_{(0,\infty)}\frac{x}{1+x^2}\,\mu(dx)\right) + \liminf_{\xi\to\infty}\frac{1}{\xi}\int_{(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-x\xi})\,\mu(dx)\\ &\le \left(\ell - \int_{(0,\infty)}\frac{x}{1+x^2}\,\mu(dx)\right) + \int_{(0,\delta)} x\,\mu(dx) + \liminf_{\xi\to\infty}\frac{1}{\xi}\mu([\delta,\infty))\\ &\le \left(\ell - \int_{(0,\infty)}\frac{x}{1+x^2}\,\mu(dx)\right) + \epsilon,\end{aligned}$$

was $\ell - \int_{(0,\infty)}\frac{x}{1+x^2}\,\mu(dx) \ge 0$ beweist. ////

Wie wir im Beweis von Satz 2.5 sahen, existiert für Subordinatoren die Laplace–Transformation und es gilt

$$\mathcal{L}\mathbb{P}^0_{S_t}(\xi) = \mathbb{E}^0\big(\mathrm{e}^{-S_t\xi}\big) = \mathrm{e}^{-tf(\xi)} \qquad (t\ge 0, \xi > 0) \tag{2.4}$$

mit dem charakteristischen Exponenten

$$f(\xi) := a(i\xi) = \ell\xi + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-x\xi})\,\mu(dx) \qquad (\xi > 0), \tag{2.5}$$

wobei $\ell \geq 0$ und $\int_{(0,\infty)} \frac{x}{1+x}\,\mu(dx) < \infty$. Offensichtlich läßt sich f holomorph auf die rechte komplexe Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ und stetig bis zum Rand fortsetzen.

2.6 Definition. Die Menge der charakteristischen Exponenten von Subordinatoren bezeichnen wir mit $\mathcal{BF}_0$. Die Funktionen aus

$$\mathcal{BF} := [0,\infty) + \mathcal{BF}_0 = \{c + f : c \geq 0, f \in \mathcal{BF}_0\}$$

heißen BERNSTEIN–*Funktionen*.

2.7 Bemerkung. Üblicherweise, vgl. BERG, FORST [6] p. 61, Definition 9.1, erklärt man die Menge der BERNSTEIN–Funktionen mit Hilfe des Differentiationsverhaltens ihrer Elemente: genau dann ist $f \in \mathcal{BF}$, wenn

$$f \geq 0 \qquad \text{und} \qquad (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f \leq 0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

gilt. Eine Standardreferenz für BERNSTEIN–Funktionen ist das Buch von BERG und FORST [6]. Dort findet sich eine andere Herleitung der Darstellungsformel für BERNSTEIN–Funktionen (pp. 64–66, Theorem 9.8). Eher auf probabilistische Belange zugeschnitten ist der Zugang von KARATZAS und SHREVE [52] pp. 405–408, Theorem 2.7.

Im Hinblick auf unsere Ausführungen in Kapitel 4 geben wir einige BERNSTEIN–Funktionen an.

2.8 Beispiel. In der untenstehenden Tabelle ist f eine BERNSTEIN–Funktion, μ_t die zugehörige Faltungshalbgruppe auf $[0,\infty)$ und μ das Darstellungsmaß der BERNSTEIN–Funktion. Für die Definition der inversen STIELTJES–Transformierten $\mathcal{SF}^{-1}_{x\to\xi}(f(x)/x)[\xi]$ verweisen wir auf Kapitel 4. Die Konstanten a, b, c, α sollen stets $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 < a < b \leq \infty$ und $c \geq 0$ erfüllen.

$f(x), x \geq 0$	$\mu_t(d\lambda)$	$\mu(d\lambda)$	$\mathcal{SF}^{-1}_{x\to\xi}(f(x)/x)[\xi]$
c	$\mathrm{e}^{-ct}\epsilon_0(d\lambda)$	0	$c\epsilon_0(d\xi)$
cx	$\epsilon_{ct}(d\lambda)$	0	c
$1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{cx}}$	$\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^j}{j!} \epsilon_{cj}(d\lambda)$	$\epsilon_c(d\lambda)$	$\nexists$
x^α	$\mathcal{L}\mu_t(\xi) = \mathrm{e}^{-t\xi^\alpha}$	$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lambda^{-\alpha-1}$	$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \xi^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} t\lambda^{-3/2} \mathrm{e}^{-t^2/4\lambda}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \lambda^{-3/2}$	$\frac{1}{\pi}\xi^{-1/2}$
$\frac{x}{a+x}$	?	$a\mathrm{e}^{-a\lambda}$	$\epsilon_a(d\xi)$
$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}$	?	$\mathrm{e}^{-a\lambda}$	$\frac{1}{\xi}\epsilon_a(d\xi)$
$\sqrt{x} \arctan \frac{b}{\sqrt{x}}$	?	$\int_0^b y^2 \mathrm{e}^{-y^2\lambda}\,dy$	$1_{(0,b^2)}(\xi)\,\frac{1}{2\sqrt{\xi}}$

$f(x), x \geq 0$	$\mu_t(d\lambda)$	$\mu(d\lambda)$	$\mathcal{SF}^{-1}_{x\to\xi}(f(x)/x)[\xi]$
$\log\left(\frac{b}{a}\frac{a+x}{b+x}\right)$	?	$\frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{-a\lambda}-\mathrm{e}^{-b\lambda}\right)$	$\frac{1}{\xi}1_{(a,b)}(\xi)$
$\log\left(\frac{a+x}{a}\right)$	$\frac{1}{\Gamma(t)}a^t\lambda^{t-1}\mathrm{e}^{-a\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-a\lambda}$	$\frac{1}{\xi}1_{(a,\infty)}(\xi)$
$\log(1+x)$	$\frac{1}{\Gamma(t)}\lambda^{t-1}\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\frac{1}{\xi}1_{(1,\infty)}(\xi)$
$b\log\left(\frac{b+x}{b}\right)$ $-a\log\left(\frac{a+x}{a}\right)$ $+\log\left(\frac{b+x}{a+x}\right)$	?	$\frac{1}{\lambda^2}\left(\mathrm{e}^{-a\lambda}-\mathrm{e}^{-b\lambda}\right)$	$\frac{1}{\xi}((\xi-a)\vee(b-a))\wedge 0$
$(x+b)\log(x+b)$ $-x\log x$	?	$\frac{1}{\lambda^2}\left(1-\mathrm{e}^{-b\lambda}\right)$	$\frac{1}{\xi}(\xi\vee b)\wedge 0$
$(x+1)\log(x+1)$ $-x\log x$	?	$\frac{1}{\lambda^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)$	$\frac{1}{\xi}(\xi\vee 1)\wedge 0$

Für unsere Absichten ist folgende Charakterisierung der Menge $\mathcal{BF}_0$ hilfreich.

2.9 Satz. *Eine Funktion f gehört genau dann zur Klasse $\mathcal{BF}_0$, wenn f die Mengen $\mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, $d\in\mathbb{N}$, invariant läßt, d. h. wenn $f(\mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}))\subset\mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ für alle $d\in\mathbb{N}$ gilt.*

2.10 Bemerkung. Daß die in Satz 2.9 angegebene Bedingung notwendig ist, ist seit Bochner [13] p. 92, Theorem 4.3.1 bekannt. Wir geben einen kurzen Beweis, der sich an die Arbeit von Huff [43] anlehnt.

Der Beweis der Hinlänglichkeit stützt sich wesentlich auf die von Harzallah [31] p. 456, Théorème 1 verwendeten Techniken, vgl. auch [29] und [30]. Der hier vorgestellte Beweis geht im Kern auf diese Arbeiten zurück.

Beweis von Satz 2.9. Notwendigkeit: Es seien $f\in\mathcal{BF}_0$ mit

$$f(t)=bt+\int_{(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-st})\,\mu(ds)\qquad(t\geq 0)$$

und $a\in\mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ mit

$$a(\xi)=-i(\ell,\xi)+(S\xi,\xi)+\int_{\mathbb{R}^d}\left(1-\mathrm{e}^{i(x,\xi)}+\frac{i(x,\xi)}{1+|x|^2}\right)\nu(dx)\qquad(\xi\in\mathbb{R}^d)$$

gegeben. Wir approximieren nun f mit einer Folge $f_n\in\mathcal{BF}_0$

$$f_n(t)=bt+\int_{(1/n,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-st})\,\mu(ds)\qquad(t\geq 0),$$

wobei $\mu_n := \mu\big|_{(1/n,\infty)}$ ein *endliches* LÉVY–Maß ist.

Als Komposition stetiger Funktionen ist $f \circ a$ wiederum stetig. Es genügt daher zu zeigen, daß $f \circ a \in \mathcal{N}$ ist. Die Menge $\mathcal{N}$ ist abgeschlossen unter punktweiser Konvergenz, und somit genügt der Nachweis, daß $f_n \circ a \in \mathcal{N}$. Bezeichnet $p_s(dy)$ das Wahrscheinlichkeitsmaß, welches

$$\mathrm{e}^{-sa(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i(y,\xi)}\, p_s(dy)$$

erfüllt, so finden wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_n \circ a(\xi) &= ba(\xi) + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-sa(\xi)})\, \mu_n(ds) \\ &= ba(\xi) + \int_{(0,\infty)} \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \mathrm{e}^{i(y,\xi)})\, p_s(dy)\mu_n(ds) \\ &= ba(\xi) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \mathrm{e}^{i(y,\xi)}) \int_{(0,\infty)} p_s(dy)\, \mu_n(ds). \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist wegen der Endlichkeit des Produktmaßes $p_t \otimes \mu_n$ möglich; das auf $\mathbb{R}^d$ vag erklärte Maß $\int_{(0,\infty)} p_s(dy)\, \mu_n(ds)$ genügt darüber hinaus der Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} \int_{(0,\infty)} p_s(dy)\, \mu_n(ds) &= \int_{(0,\infty)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|y|^2}{1+|y|^2}\, p_s(dy)\mu_n(ds) \\ &\leq \int_{(0,\infty)} \mu_n(ds) < \infty, \end{aligned}$$

was $f_n \circ a \in \mathcal{N}$ beweist.

Mit einer ähnlichen Argumentation kann man zeigen, daß das LÉVY–Maß ν^f der Funktion $f \circ a$ durch

$$\nu^f(dy) = \int_{(0,\infty)} p_s(dy)\, \mu(ds) + b\nu(dy)$$

gegeben ist; dabei ist das Integral im Sinne der vagen Topologie zu verstehen. Siehe dazu HUFF [43] pp. 408–409, Theorem 3 oder BERG, FORST p. 175, Proposition 18.8.

Hinlänglichkeit: Um die Notation zu vereinfachen, führen wir für diesen Teil des Beweises einige neue Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{CN}_+(\mathbb{R}^d,\mathbb{K}) &:= \mathcal{CN}(\mathbb{R}^d,\mathbb{K}) \cap \{a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} : a(0) > 0\}, \\ \mathcal{O}_+[\mathbb{K}] &:= \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : f(\mathcal{CN}_+(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})) \subset \mathcal{CN}(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})\ \forall d \in \mathbb{N}\}, \\ \mathcal{O}_0[\mathbb{K}] &:= \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : f(\mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})) \subset \mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})\ \forall d \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

wobei jeweils $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht.

Mit Hilfe dieser Notation läßt sich die Behauptung des Satzes als $\mathcal{BF}_0 = \mathcal{O}_0[\mathbb{C}] = \mathcal{O}_0[\mathbb{R}]$ schreiben.

Folgende Überlegung zeigt, daß wir die Behauptung auf die Aussage

$$\mathcal{O}_+[\mathbb{R}] \subset \mathcal{BF} \tag{2.6}$$

zurückführen können.

Es sei $f \in \mathcal{O}_+[\mathbb{C}]$. Jede konstante Funktion $a \in \mathcal{CN}_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, $a(\xi) = c$ ist notwendig positiv. Nach Annahme ist auch die Funktion $\xi \mapsto f(a(\xi)) = f(c)$ *konstant* und negativ definit, mithin reellwertig mit $f(c) \geq 0$. Wir schließen daraus

$$\mathcal{O}_+[\mathbb{C}] \subset \mathcal{O}_+[\mathbb{R}].$$

Um einzusehen, daß $\mathcal{O}_0[\mathbb{K}] \subset \mathcal{O}_+[\mathbb{K}]$ gilt, wählen wir ein $f \in \mathcal{O}_0[\mathbb{K}]$ und $a \in \mathcal{CN}_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$. Dann ist die Funktion

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \ni (\xi, \gamma) \mapsto f(a(\xi) - a(0) + |\gamma|)$$

in $\mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathbb{K})$, somit sind die Funktionen $f(a(\cdot) + \gamma')$ für $\gamma' := \gamma - a(0) \geq 0$ in $\mathcal{CN}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ enthalten und damit $f \in \mathcal{O}_+[\mathbb{K}]$.

Aus den soeben angestellten Überlegungen folgt zusammen mit (der noch zu zeigenden) Inklusion (2.6)

$$\begin{aligned}
\mathcal{BF}_0 = \mathcal{BF}_0 \cap \mathcal{BF} &\subset \mathcal{O}_0[\mathbb{K}] \cap \mathcal{O}_+[\mathbb{K}] \\
&\subset \Big\{ f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \,:\, \lim_{\substack{z \to 0 \\ \operatorname{Re} z > 0}} f(z) = 0 \Big\} \cap \mathcal{O}_+[\mathbb{R}] \\
&\subset \Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \lim_{x \searrow 0} f(x) = 0 \Big\} \cap \mathcal{BF} \\
&= \mathcal{BF}_0
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{BF}_0 = \mathcal{O}_0[\mathbb{K}] \cap \mathcal{O}_+[\mathbb{K}] = \mathcal{O}_0[\mathbb{K}].$$

Dabei haben wir *nicht* zwischen BERNSTEIN–Funktionen auf $(0, \infty)$ und deren (eindeutigen) kanonischen Fortsetzungen auf die rechte komplexe Halbebene unterschieden.

Um (2.6) zu zeigen, benötigen wir den folgenden Hilfssatz, den wir im Anschluß beweisen werden.

2.11 Lemma. *Für alle $f, g \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}]$ gilt*

(1) $\mathcal{O}_+[\mathbb{R}]$ *ist abgeschlossen unter lokal–gleichmäßiger Konvergenz;*

(2) $\lambda f + (1 - \lambda) g \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}] \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$*;*

(3) $f\big|_{(0,\infty)}$ *ist stetig;*

(4) $\tau_c f := f(\cdot + c) - f(c) \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}] \qquad (c > 0)$*;*

(5) $f - \tau_c f \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}] \qquad (c > 0)$;

(6) *f ist isoton, subadditiv und konkav.*

Fortsetzung des Beweises von Satz 2.9. Nach Lemma 2.11 ist $\mathcal{O}_+[\mathbb{R}]$ ein konvexer Kegel, der auf Grund der Konkavität seiner Elemente in $L^1((0,\infty), \mathrm{e}^{-x}\,dx)$ enthalten ist. Daher bildet die Menge

$$\mathcal{B} := \left\{ f \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}] : \int_{(0,\infty)} f(x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = 1 \right\}$$

eine konvexe Basis dieses Kegels. Für alle $f \in \mathcal{B}$ gilt

$$f(x)\mathrm{e}^{-x} = f(x) \int_{(x,\infty)} \mathrm{e}^{-\xi}\,d\xi \leq \int_{(x,\infty)} f(\xi)\mathrm{e}^{-\xi}\,d\xi \leq 1.$$

Nach einer einfachen Verallgemeinerung des Satzes von Kolmogorov über Kompaktheit in den Räumen $L^p(\mathbb{R}, dx)$ ist $\mathcal{B}$ relativ kompakt in $\tilde{L^1} := L^1((0,\infty), \mathrm{e}^{-x}\,dx)$: es gilt

$$\sup_{f \in \mathcal{B}} \|f\|_{\tilde{L^1}} = 1, \tag{2.7}$$

und für alle $x, y \geq 0$ aus einer beschränkten Menge mit $|x - y| \to 0$

$$\begin{aligned}
\|f(\cdot + x) - f(\cdot + y)\|_{\tilde{L^1}} &= \int_{(0,\infty)} |f(\xi + x) - f(\xi + y)|\,\mathrm{e}^{-\xi}\,d\xi \\
&= \mathrm{e}^{x \wedge y} \int_{(x \wedge y,\infty)} |f(\xi + x \vee y - x \wedge y) - f(\xi)|\,\mathrm{e}^{-\xi}\,d\xi \\
&\leq \mathrm{e}^{x \wedge y} \int_{(0,\infty)} \big(f(\xi + |x - y|) - f(\xi)\big)\,\mathrm{e}^{-\xi}\,d\xi \\
&= \mathrm{e}^{x \wedge y} \left(\mathrm{e}^{|x-y|} \int_{(|x-y|,\infty)} f(\xi)\mathrm{e}^{-\xi}\,d\xi - 1 \right) \\
&\leq \mathrm{e}^{x \wedge y} \left(\mathrm{e}^{|x-y|} - 1\right) \to 0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

und für alle $R > 1$

$$\|f 1_{B^c_R(0)}\|_{\tilde{L^1}} = \int_{(R,\infty)} f(x)\mathrm{e}^{-x}\,dx \leq f(1) \int_{(R,\infty)} x\mathrm{e}^{-x}\,dx \leq \mathrm{e}^{1-R}(R + 1). \tag{2.9}$$

Dabei besagen (2.7) und (2.9) wegen der Isotonie der Funktionen aus $\mathcal{B}$ gerade, daß die Familie $\mathcal{B}$ gleichgradig integrierbar ist, vgl. Bauer [4] p. 146, Satz 21.8 (iii), d. h. die Begriffe der punktweisen Konvergenz und der Konvergenz im Mittel fallen in $\mathcal{B}$ zusammen. Mithin ist $\mathcal{B}$ abgeschlossen und somit kompakt.

Nach dem Satz von Kreĭn–Mil'man ist $\mathcal{B}$ die abgeschlossene konvexe Hülle seiner Extremalpunkte. Diese werden wir nun bestimmen:

Es sei $f \in \mathcal{B}$ extremal. Ist dann

$$\lambda_c := \int_{(0,\infty)} \tau_c f(x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = \int_{(0,\infty)} (f(x + c) - f(c))\mathrm{e}^{-x}\,dx \leq \int_{(0,\infty)} f(x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = 1$$

von 0 und 1 verschieden, so folgt $\lambda_c^{-1}\tau_c f \in \mathcal{B}$ und $(1-\lambda_c)^{-1}(f-\tau_c f) \in \mathcal{B}$. Mithin ist

$$f = \lambda_c[\lambda_c^{-1}\tau_c f] + (1-\lambda_c)[(1-\lambda_c)^{-1}(f-\tau_c f)].$$

Nach Annahme war f extremal. Daher ist $\lambda_c^{-1}\tau_c f = (1-\lambda_c)^{-1}(f-\tau_c f)$ oder $\tau_c f = \lambda_c f$ für ein $\lambda_c \in (0,1)$.

Wegen $\tau_c f \leq f$ (Lemma 2.11 (6)) folgern wir im Falle $\lambda_c = 1$ aus

$$\int_{(0,\infty)} (f(x) - \tau_c f(x))\mathrm{e}^{-x}\, dx = \int_{(0,\infty)} f(x)\mathrm{e}^{-x}\, dx - \lambda_c = 0,$$

daß $f = \tau_c f$ gelten muß. Entsprechend finden wir für $\lambda_c = 0$ wegen der Isotonie der Funktion f und wegen

$$\int_{(0,\infty)} \tau_c f(x)\mathrm{e}^{-x}\, dx = \int_{(0,\infty)} (f(x+c) - f(c))\mathrm{e}^{-x}\, dx = 0,$$

daß $\tau_c f = 0$ gelten muß.

Zusammenfassend erhalten wir somit

$$\tau_c f = \lambda_c f \qquad \text{für ein } \lambda_c \in [0,1]. \tag{2.10}$$

Fall 1: f ist unbeschränkt. Wegen der Isotonie von f ist dann für alle $c > 0$

$$\tau_c f(x) = f(x+c) - f(c) = \lambda_c f(x) \leq \lambda_c f(x+c)$$

und daher

$$(1-\lambda_c) f(x+c) \leq f(c) < \infty,$$

für alle $x > 0$, was $\lambda_c = 1$ impliziert. Somit ist f stetig und additiv, damit linear und wegen der Normierung in $\mathcal{B}$ notwendigerweise $f(x) = x$.

Fall 2: f ist beschränkt und konstant. Dann sind $f(x) = 1$ und $\lambda_c = 0$.

Fall 3: f ist beschränkt, aber nicht konstant. In diesem Fall setzen wir $m := \|f\|_\infty$ und finden aus (2.10)

$$m - f(c) = \sup_{0<x<\infty} f(x+c) - f(c) = \lambda_c \sup_{0<x<\infty} f(x) = \lambda_c m \qquad (c > 0).$$

Für die Funktion $(0,\infty) \ni c \mapsto \lambda_c \in (0,1)$ gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_{c+d} = 1 - \frac{1}{m} f(c+d) &= 1 - \frac{1}{m}\big(\lambda_c f(d) + f(c)\big) \\
&= \Big(1 - \frac{1}{m} f(c)\Big) - \frac{1}{m}\lambda_c f(d) \\
&= \lambda_c \Big(1 - \frac{1}{m} f(d)\Big) \\
&= \lambda_c \lambda_d.
\end{aligned}$$

Da darüber hinaus $c \mapsto \lambda_c = 1 - \frac{1}{m} f(c)$ stetig und strikt positiv ist, finden wir, daß

$$c \mapsto \lambda_c = \mathrm{e}^{-\gamma c} \qquad (c, \gamma > 0),$$

also
$$f(x) = f_\gamma(x) = m(1 - \mathrm{e}^{-\gamma x}) \qquad (\gamma > 0)$$
gilt. Wegen der Normierung in $\mathcal{B}$ finden wir für $m = m_\gamma$
$$\frac{1}{m} = \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-\gamma\xi})\mathrm{e}^{-\xi}\, d\xi = \frac{\gamma}{1+\gamma}.$$

Somit haben wir gezeigt, daß die Extremalpunkte von $\mathcal{B}$ in der Menge $E := \left\{1, x, \frac{1+\gamma}{\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma x}) : 0 < \gamma < \infty\right\}$ enthalten sind. Nach dem Satz von Kreĭn–Mil'man folgt, daß
$$\mathcal{O}_+[\mathbb{R}] \subset \{rf : r \in (0,\infty),\ f \in \overline{\mathrm{ch}(E)}\}$$
gilt, wobei $\overline{\mathrm{ch}(E)}$ für die (punktweise bzw. lokal–gleichmäßig bzw. im Mittel) abgeschlossene, konvexe Hülle von E steht. Das sind aber gerade die Funktionen der Gestalt
$$f(x) = r\left(\alpha + \beta x + \int_{(0,\infty)} \frac{1+\gamma}{\gamma}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma x})\, \mu(d\gamma)\right) \qquad (r > 0, x \geq 0)$$
mit einem endlichen Maß μ auf $(0,\infty)$ und Koeffizienten $\alpha, \beta \geq 0$, so daß $\alpha + \beta + \mu((0,\infty)) = 1$ gilt, also die Bernstein–Funktionen. ////

Beweis von Lemma 2.11. Die Aussagen **(1)** und **(2)** folgen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für die Kegel $\mathcal{CN}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $d \in \mathbb{N}$.

Zu (3): Für jedes $\epsilon > 0$ ist $[\xi \mapsto |\xi| + \epsilon] \in \mathcal{CN}_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, also $[\xi \mapsto f(|\xi| + \epsilon)] \in \mathcal{CN}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, was $f\big|_{(\epsilon,\infty)} \in C((\epsilon,\infty), \mathbb{R})$ zeigt.

Zu (4): Für jede Wahl von $c > 0$ ist $[\xi \mapsto |\xi| + c] \in \mathcal{CN}_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Ist $f \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}]$, so finden wir, daß
$$f(c) \leq f(|\xi| + c)$$
für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und alle $c > 0$ gilt, d. h. die Funktionen in $\mathcal{O}_+[\mathbb{R}]$ sind isoton.

Es seien nun $f \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}]$, $a \in \mathcal{CN}_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und $c > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gilt
$$\begin{aligned} \tau_c f(a(\xi)) &= f(a(\xi) + c) - f(c) \\ &= \big(f(a(\xi) + c) - f(a(0) + c)\big) + \big(f(a(0) + c) - f(c)\big) \end{aligned}$$
für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$. Die in der ersten Klammer stehende Funktion ist negativ definit, die zweite Klammer enthält wegen der Isotonie der Funktion f eine positive Konstante. Somit folgt $\tau_c f \circ a \in \mathcal{CN}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ bzw. $\tau_c f \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}]$.

Zu (5): Es genügt zu zeigen, daß für $a \in \mathcal{CN}_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ die Funktion
$$\xi \mapsto f(a(\xi)) + f(c) - f(a(\xi) + c) \qquad (c \geq 0)$$

in $\mathcal{CN}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ enthalten ist. Wir wollen das Kriterium aus Satz 1.13 anwenden. Dazu wählen wir beliebige Vektoren $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ und Zahlen $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0$. Die Hilfsfunktion

$$\mathbb{R} \ni c \mapsto \phi(c) := \sum_{i,j=0}^n \big(f(a(\xi_i - \xi_j) + |c|) - f(a(\xi_i - \xi_j))\big)\lambda_i \overline{\lambda}_j$$

ist reellwertig und negativ definit. Die zweite Behauptung ergibt sich leicht mit Hilfe des Kriteriums von Satz 1.13: $\phi(0) = 0$, $\phi(c) = \overline{\phi(-c)}$ und für jede Wahl von $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ und $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{p=1}^m \mu_p = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{p,q=1}^m \phi(c_p - c_q)\mu_p \overline{\mu}_q = \\
&= \sum_{p,q=1}^m \sum_{i,j=1}^n f(a(\xi_i - \xi_j) + |c_p - c_q|)\lambda_i \overline{\lambda}_j \mu_p \overline{\mu}_q - \sum_{p,q=1}^m \sum_{i,j=1}^n f(a(\xi_i - \xi_j))\lambda_i \overline{\lambda}_j \mu_p \overline{\mu}_q \\
&= \sum_{i,j=1}^n \sum_{p,q=1}^m f(a(\xi_i - \xi_j) + |c_p - c_q|)\lambda_i \mu_p \overline{\lambda_j \mu_q} \leq 0
\end{aligned}$$

denn die Funktion $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \ni (\xi, c) \mapsto f(a(\xi) + |c|)$ ist negativ definit, und es gilt $\sum_{i,p=1}^{n,m} \lambda_i \mu_p = 0$.

Da nach Konstruktion $\phi(c)$ reellwertig ist, gilt $\phi(c) \geq \phi(0) = 0$, also

$$\sum_{i,j=1}^n \big(f(a(\xi_i - \xi_j) + |c|) - f(a(\xi_i - \xi_j))\big)\lambda_i \overline{\lambda}_j \geq 0. \tag{2.11}$$

Wenden wir nun das Kriterium 1.13 auf die Funktion

$$\mathbb{R}^d \ni \xi \mapsto g(\xi) := f(a(\xi)) + f(a(0) + c) - f(a(\xi) + c) - f(a(0)) \qquad (c \geq 0)$$

an, so finden wir wegen $g(0) = 0$, $g(\xi) = \overline{g(-\xi)}$ und

$$\sum_{i,j=1}^n g(\xi_i - \xi_j)\lambda_i \overline{\lambda}_j = \sum_{i,j=1}^n \big(f(a(\xi_i - \xi_j)) - f(a(\xi_i - \xi_j) + c)\big)\lambda_i \overline{\lambda}_j \leq 0,$$

mit ξ_i, λ_i wie oben, daß $g \in \mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ für jede Wahl von $a \in \mathcal{CN}_+(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Insbesondere gilt

$$f(a(\xi) + c) \leq f(a(\xi)) + f(a(0) + c) - f(a(0)) \leq f(a(\xi)) + f(a(0) + c) \qquad (c > 0).$$

Für $a(\xi) := |\xi| + \epsilon$, $\epsilon > 0$, zeigt das für $\epsilon \to 0$ die Subadditivität von f, also ist $f(a(0) + c) - f(a(0)) \leq f(c)$, somit $g - f(a(0) + c) + f(a(0)) + f(c) \in \mathcal{CN}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, und die Behauptung folgt.

Zu (6): Die Isotonie wurde bereits im Beweis von **(4)**, die Subadditivität im Beweis von **(5)** gezeigt. Es bleibt das Krümmungsverhalten zu untersuchen.

Es seien $c, d > 0$. Mit $f - \tau_d f \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}]$ ist auch $\tau_c(f - \tau_d f) \in \mathcal{O}_+[\mathbb{R}]$ und daher gilt

$$0 \le \tau_c(f - \tau_d f)(d) = 2f(c+d) - f(c+2d) - f(c),$$

was wegen der Stetigkeit von f und

$$\frac{1}{2}\big(f(c+2d) + f(c)\big) \le f(c+d)$$

die behauptete Konkavität zeigt. ////

Es seien $\{\mu_t\}_{t\ge 0}$ ein Subordinator mit charakteristischem Exponenten $f \in \mathcal{BF}_0$ und $\{T_t\}_{t\ge 0}$ eine Halbgruppe von Operatoren auf einem BANACH–Raum $\mathcal{X}$. Nach dem Satz von BANACH–STEINHAUS ist dann das RIEMANN–STIELTJES–Integral

$$(2.12) \qquad T_t^f u := \int_{[0,\infty)} T_s u \, \mu_t(ds) := \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n)} T_s u \, \mu_t(ds) \qquad (u \in \mathcal{X})$$

wiederum eine Halbgruppe von Operatoren, vorausgesetzt der Limes existiert im Sinne der Normtopologie auf $\mathcal{X}$.

2.12 Bemerkung. Hinreichend für die Existenz des starken Limes in (2.12) ist die Forderung $\int_{[0,\infty)} \|T_s u\| \, \mu_t(ds) < \infty$ für jedes $u \in \mathcal{X}$, d. h. daß $s \mapsto T_s u$ im Sinne von BOCHNER integrierbar ist: $s \mapsto T_s u$ ist stetig, nach dem Kriterium von PETTIS—vgl. YOSIDA [79] p. 131, Theorem 1—stark meßbar; daher ist $s \mapsto T_s u$ genau dann BOCHNER–integrierbar, wenn $s \mapsto \|T_s u\|$ LEBESGUE–integrierbar ist (YOSIDA [79] p. 133, Theorem).

Insbesondere impliziert $\int_{[0\infty)} \|T_s\| \, \mu_t(ds) < \infty$, daß der Grenzwert in (2.12) existiert. Somit ist *Subordination* stets dann wohldefiniert, wenn die $\|T_t\|$ gleichmäßig beschränkt sind, oder wenn μ_t eine Funktion $s \mapsto e^{\overline{\omega}_0 s}$ mit $\overline{\omega}_0 > \omega_0$ und $\omega_0 := \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log \|T_t\|$ wie in (1.1) integriert.

2.13 Satz. *Es sei $\{\mu_t\}_{t\ge 0}$ eine Faltungshalbgruppe von Maßen auf $[0,\infty)$, die im Sinne der vagen Topologie stetig ist. Die zugehörige* BERNSTEIN*–Funktion sei durch*

$$f(x) = a + bx + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-sx}) \, \mu(ds) \qquad (x \ge 0)$$

gegeben. Dann sind für jedes $\gamma \ge 0$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) *Für alle $t \ge 0$ gilt $\int_{[0,\infty)} e^{s\gamma} \, \mu_t(ds) < \infty$.*

(ii) *f kann zu einer C^∞–Funktion auf $(-\gamma, \infty)$ und stetig bis zum Rand fortgesetzt werden.*

(iii) *f kann holomorph auf die Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\gamma\}$ und stetig bis zum Rand fortgesetzt werden.*

(iv) *Es gilt $\int_{(1,\infty)} e^{s\gamma} \, \mu(ds) < \infty$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Für $x \geq \gamma$ gilt

$$\mathcal{L}\mu_t(x-\gamma) = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-s(x-\gamma)}\,\mu_t(ds) = \mathrm{e}^{-tf(x-\gamma)} \qquad (t \geq 0).$$

Das in der Mitte stehende Integral konvergiert wegen $\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{s\gamma}\,\mu_t(ds) < \infty$ für alle $x \geq 0$. Somit ist

$$f(x-\gamma) := -\frac{1}{t}\,\log\left(\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-s(x-\gamma)}\,\mu_t(ds)\right) \qquad (t \geq 0)$$

für alle $x \geq 0$ erklärt und setzt f in der gewünschten Weise fort.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x \geq -\gamma$. Da

$$|\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-sz}\,\mu_t(ds)| \leq \int_{[0,\infty)} |\mathrm{e}^{-sz}|\,\mu_t(ds) = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-sx}\,\mu_t(ds) < \infty$$

gilt, ist die Funktion $z \mapsto \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-sz}\,\mu_t(ds)$ für $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > -\gamma$ holomorph und stetig bis zum Rand. Mithin ist

$$f(z) := -\frac{1}{t}\,\log\left(\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-sz}\,\mu_t(ds)\right) \qquad (t \geq 0) \tag{2.13}$$

die gesuchte Fortsetzung.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Durch Differentiation unter dem Integral (2.13) finden wir für reelle Argumente x

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) \leq 0 \qquad (x > 0, k \in \mathbb{N}).$$

Nach Bemerkung 2.7 ist daher die Funktion

$$(0,\infty) \ni x \mapsto f(x-\gamma) - f(-\gamma)$$

eine Bernstein–Funktion mit Lévy–Tripel $(0, \tilde{b}, \tilde{\mu})$,

$$f(x-\gamma) - f(-\gamma) = \tilde{b}x + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-sx})\,\tilde{\mu}(ds) \qquad (x \geq 0). \tag{2.14}$$

Insbesondere finden wir für $x = y + \gamma, y \geq 0$

$$\begin{aligned} f(y) &= (f(-\gamma) + \tilde{b}\gamma) + \tilde{b}y + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-sy}\mathrm{e}^{-s\gamma})\,\tilde{\mu}(ds) \\ &= (f(-\gamma) + \tilde{b}\gamma) + \tilde{b}y + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-s\gamma})\,\tilde{\mu}(ds) + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-sy})\,\mathrm{e}^{-s\gamma}\tilde{\mu}(ds). \end{aligned}$$

Aus (2.14) folgt die Gleichheit $\int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-s\gamma})\,\tilde{\mu}(ds) = f(0) - f(-\gamma) - \tilde{b}\gamma$, also

$$f(y) = f(0) + \tilde{b}y + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-sy})\,\mathrm{e}^{-s\gamma}\tilde{\mu}(ds) \qquad (y \geq 0).$$

Auf Grund der Eindeutigkeit der LÉVY–Darstellung von f folgern wir $\mu(ds) = e^{-s\gamma}\tilde{\mu}(ds)$; die Behauptung ergibt sich nun aus

$$\int_{(1,\infty)} e^{s\gamma}\,\mu(ds) = \int_{(1,\infty)} \tilde{\mu}(ds) < \infty.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Wie oben finden wir, daß durch

$$(0,\infty) \ni x \mapsto f(x-\gamma) - f(-\gamma)$$

eine BERNSTEIN–Funktion gegeben ist. Nach dem Satz von BERNSTEIN, vgl. BERG, FORST [6] p. 62, Theorem 9.3, gibt es eine eindeutig bestimmte, vag stetige Faltungshalbgruppe von Maßen $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ auf $[0,\infty)$, so daß

$$\mathcal{L}\nu_t(x) = \int_{[0,\infty)} e^{-sx}\,\nu_t(ds) = e^{tf(-\gamma)}e^{-tf(x-\gamma)}$$

für alle $x \geq 0$ und $t \geq 0$ gilt.

Für die durch $\{e^{-tf(-\gamma)}\nu_t\}_{t\geq 0}$ gegebene Faltungshalbgruppe gilt somit

$$\int_{[0,\infty)} e^{-sx}\,e^{-tf(-\gamma)}\nu_t(ds) = e^{-tf(x-\gamma)} \qquad (t,x \geq 0),$$

und insbesondere ist für $x = y+\gamma, y \geq 0$

$$\int_{[0,\infty)} e^{-sy}\,e^{-s\gamma}e^{-tf(-\gamma)}\nu_t(ds) = e^{-tf(y)} \qquad (t,y \geq 0).$$

Wir schließen $\mu_t(ds) = e^{-s\gamma}e^{-tf(-\gamma)}\nu_t(ds)$ aus der Eindeutigkeit der LAPLACE–Transformation, und somit auch

$$\int_{[0,\infty)} e^{s\gamma}\,\mu_t(ds) = \int_{[0,\infty)} e^{-tf(-\gamma)}\,\nu_t(ds) = e^{-tf(-\gamma)}\mathcal{L}\nu_t(0) < \infty.$$

////

2.14 Definition. Existiert der Grenzwert (2.12) im Sinne der Normtopologie, dann nennen wir den Subordinator *zulässig*.

Die in diesem Falle durch (2.12) erklärte Halbgruppe von Operatoren $\{T_t^f\}_{t\geq 0}$ auf $\mathcal{X}$ heißt die der Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *subordinierte Halbgruppe*.

2.15 Korollar. *Es seien $\{T_t\}_{t\geq 0}$ eine C_0–Halbgruppe von Operatoren auf $\mathcal{X}$ mit Erzeuger A und $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ ein Subordinator mit* BERNSTEIN*–Funktion f.*

(1) *Der Subordinator ist zulässig, wenn für ein $\overline{\omega}_0 > \omega_0$ die Funktion f auf das Intervall $(-\overline{\omega}_0,\infty)$ fortgesetzt werden kann.*

(2) *Ist der Subordinator zulässig, so kann die Funktion f auf das Intervall $[-\omega_0,\infty)$ fortgesetzt werden.*

Alle wesentlichen Eigenschaften der Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ übertragen sich auf die subordinierte Halbgruppe: es gilt der folgende Satz von PHILLIPS [62] pp. 362–363, Theorem 4.3 und pp. 366–367, Theorem 4.4, den wir in etwas veränderter Form notieren, da PHILLIPS nicht die BERNSTEIN–Funktion $f(x)$, sondern $-f(\omega_0 - x)$ betrachtet.

2.16 Satz. *Es seien $\{T_t\}_{t\geq 0}$ eine C_0–Halbgruppe mit Erzeuger A, ω_0 wie oben und $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ ein zulässiger Subordinator mit* BERNSTEIN*–Funktion f.*

Dann existiert die subordinierte Halbgruppe $\{T_t^f\}_{t\geq 0}$, ist wiederum aus der Klasse C_0, der Definitionsbereich ihres Erzeugers A^f erfüllt

$$D(A^f) \supset D(A)$$

und auf $D(A)$ hat A^f die Darstellung

$$A^f u = bAu + \int_{(0,\infty)} (T_t u - u)\, \mu(dt) \qquad (u \in D(A)).$$

Dabei ist $(0, b, \mu)$ das LÉVY*–Tripel der Funktion $f \in \mathcal{BF}_0$.*

Weiterhin gilt

$$\|T_t^f\| \leq \int_{[0,\infty)} \|T_s\|\, \mu_t(ds),$$

insbesondere ist eine einer Kontraktionshalbgruppe subordinierte Halbgruppe wiederum kontraktiv.

Für das Spektrum von A^f gilt

$$\sigma(A^f) \supset -f(-\sigma(A)).$$

Im allgemeinen kann der Definitionsbereich $D(A^f)$ des Erzeugers A^f der subordinierten Halbgruppe nicht angegeben werden. Es gilt jedoch $\overline{A^f|D(A)} = A^f$, wie das folgende Lemma zeigt.

2.17 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.16 gilt, daß $D(A^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ein definierender Bereich* (core) *des Erzeugers $(A^f, D(A^f))$ der subordinierten Halbgruppe $\{T_t^f\}_{t\geq 0}$ ist.*

Beweis. Wir zeigen, daß $T_t^f(D(A^k)) \subset D(A^k)$ gilt, woraus nach DAVIES [18] p. 8, Theorem 1.9, die Behauptung folgt.

Die Folge $\left\{ \int_{[0,n)} T_s u\, \mu_t(ds) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $u \in D(A^k)$ im Sinne der Normtopologie gegen $T_t^f u = \int_{[0,\infty)} T_s u\, \mu_t(ds)$.

Wegen der Abgeschlossenheit des Operators A finden wir auf $D(A^k)$

$$\begin{aligned} \|A^k \int_{[n,m)} T_s u\, \mu_t(ds)\| &= \|\int_{[n,m)} T_s A^k u\, \mu_t(ds)\| \\ &\leq \int_{[n,m)} \|T_s A^k u\|\, \mu_t(ds) \\ &\leq \int_{[n,m)} \|T_s\|\, \mu_t(ds)\, \|A^k u\|, \end{aligned}$$

woraus folgt, daß $\left\{A^k \int_{[0,n)} T_s u \, \mu_t(ds)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ für $u \in D(A^k)$ eine CAUCHY–Folge ist. Die Abgeschlossenheit des Operators A impliziert dann $T_t^f u \in D(A^k)$. ////

Abschließend wollen wir das Konzept der Subordination auf der Ebene der Prozesse diskutieren. Das folgende Ergebnis ist u. a. implizit bei BLUMENTHAL und GETOOR [8], [9] in den *preliminaries* erwähnt, ein Beweis scheint sich aber erst bei HUFF [43] pp. 404–405, Theorem 1 zu finden.

2.18 Satz. *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* MARKOV*–Prozeß, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ die zugehörige* MARKOV*sche Halbgruppe und $\{S_t\}_{t\geq 0}$ ein davon unabhängiger Subordinator, dessen korrespondierende Faltungshalbgruppe $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ und* BERNSTEIN*–Funktion f seien. Dann gilt*

$$\mathbb{P}^x(X(S_t) \in B) = T_t^f 1_B(x) = \mathbb{P}^x(X_t^f \in B) \qquad (t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathfrak{B}),$$

d. h. der zu $\{T_t^f\}_{t\geq 0}$ korrespondierende Prozeß $\{X_t^f\}_{t\geq 0}$ und der durch eine Zeittransformation hervorgegangene Prozeß $\{X(S_t)\}_{t\geq 0}$ stimmen überein.

Beweis. Auf Grund der Unabhängigkeit der Prozesse X_t und S_t finden wir nach den Rechenregeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x(X(S_t) \in B) &= \int_0^\infty \mathbb{P}^x(X_s \in B | S_t = s) \, ds \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}^x(X_s \in B) \, \mathbb{P}^0_{S_t}(ds) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}^x(X_s \in B) \, \mu_t(ds) \\
&= \int_0^\infty T_s 1_B(x) \, \mu_t(ds) \\
&= T_t^f 1_B(x).
\end{aligned}$$

für alle $B \in \mathfrak{B}$ und $x \in \mathbb{R}^d$. ////

2.19 Korollar. *Ist $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* MARKOV*–Prozeß mit Übergangsdichten $p(t,x,y)$ und $\{S_t\}_{t\geq 0}$ ein davon unabhängiger Subordinator, so besitzt auch der subordinierte Prozeß $\{X_t^f\}_{t\geq 0}$ Übergangsdichten. Diese sind durch*

$$p^f(t,x,y) = \int_0^\infty p(s,x,y) \mathbb{P}^0_{S_t}(ds) \qquad (t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d)$$

gegeben.

2.20 Korollar. *Ist in der Notation von Satz 2.18 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein* FELLER*–Prozeß bzw. starker* FELLER*–Prozeß so auch $\{X_t^f\}_{t\geq 0}$.*

Mit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ist auch $\{X_t^f\}_{t\geq 0}$ ein LÉVY*–Prozeß, dessen negativ definite Funktion $f \circ a$ ist; dabei ist a die $\{X_t\}_{t\geq 0}$ entsprechende negativ definite Funktion.*

Beweis. Ohne Verlust an Allgemeinheit beschränken wir uns auf den Fall, wo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ stark FELLERsch ist. Nach Voraussetzung sind für jedes $u \in B_b(\mathbb{R}^d)$ und alle $s \geq 0$ die Funktionen $T_s u \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Weil

$$|T_s u(x)| \leq \|T_s\|_\infty \|u\|_\infty = \|u\|_\infty < \infty$$

eine integrierbare Majorante besitzt, gilt nach dem Konvergenzsatz von LEBESGUE

$$\lim_{y\to x} \int_0^\infty T_s u(y)\, \mu_t(ds) = \int_0^\infty T_s u(x)\, \mu_t(ds),$$

und somit ist $T_t^f u$ stetig.

Daß $f \circ a$ der charakteristische Exponent des—damit notwendig LÉVYschen—Prozesses $\{X_t^f\}_{t\geq 0}$ ist, folgt entweder aus der Darstellungsformel von Satz 2.16 oder wie in BERG, FORST [6] p. 69, Abschnitt 9.20. ////

Kapitel 3

Elementare Pfadeigenschaften Lévyscher und mit diesen vergleichbarer Prozesse

3.1 Ein Reflexionsprinzip für Lévy–Prozesse

Das Reflexionsprinzip für eine reelle BROWNsche Bewegung $\{B_t\}_{t\geq 0}$ besagt, daß

$$\mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} B_s \geq a) \leq 2\,\mathbb{P}^0(B_t \geq a) \qquad (t \geq 0)$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt—Gleichheit erhalten wir für positive a, vgl. BAUER [5] pp. 467–468. Mit einer modifizierten Beweistechnik können wir ein ähnliches Resultat für symmetrische LÉVY–Prozesse zeigen.

3.1 Lemma. *Es seien $\{X_t, \mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ ein symmetrischer* LÉVY*–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $I \subset (-\infty, a]$ ein unbeschränktes Intervall, und $I^a = 2a - I$ das am Punkt a gespiegelte Intervall. Dann gilt für alle $x \geq a$*

$$\mathbb{P}^x(X_t \in I) \leq \mathbb{P}^x(X_t \in I^a) \qquad (t \geq 0).$$

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß $I = (-\infty, b)$ für ein $b \leq a$ ist. Dann finden wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x(X_t \in I) &= \mathbb{P}^x(X_t < b) = \mathbb{P}^0(X_t < b - x) = \mathbb{P}^0(X_t > x - b)\\ &= \mathbb{P}^x(X_t > 2x - b) = \mathbb{P}^x(X_t > (2x - 2a) + 2a - b).\end{aligned}$$

Wegen $2x - 2a \geq 0$ gilt schließlich

$$\mathbb{P}^x(X_t \in I) \leq \mathbb{P}^x(X_t > 2a - b) = \mathbb{P}^x(X_t \in I^a),$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ////

3.2 Satz. *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein symmetrischer* LÉVY*–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}$ und $\tau = \tau_{(a,\infty)}$ die erste Eintrittszeit in das offene Intervall (a, ∞). Für alle $a \in \mathbb{R}$*

bestehen die Ungleichungen

$$\mathbb{P}^0(\sup_{s\le t} X_s > a) \le \mathbb{P}^0(X_t \ge X_\tau) + \mathbb{P}^0(X_t > X_\tau) \qquad (t \ge 0) \tag{3.1}$$

und

$$2\,\mathbb{P}^0(X_t > X_\tau) \le \mathbb{P}^0(\sup_{s\le t} X_s > a) \qquad (t \ge 0). \tag{3.2}$$

Beweis. Für $\epsilon \ge 0$ bezeichne $\tau^\epsilon = \tau_{(a+\epsilon,\infty)}$ die erste Eintrittszeit in das Intervall $(a+\epsilon,\infty)$, wobei $\tau = \tau^0$ gilt.

Ist $\sup_{s\le t} X_s(\omega) > a+\epsilon$, so gibt es ein $s_0 \le t$ mit $X_{s_0}(\omega) > a+\epsilon$, also $\tau^\epsilon(\omega) \le t$. Umgekehrt folgt aus $\tau^\epsilon(\omega) \le t$ sofort $\sup_{s\le t} X_s(\omega) \ge a+\epsilon$. Somit erhalten wir die Inklusionen

$$\{\sup_{s\le t} X_s > a+\epsilon\} \subset \{\tau^\epsilon \le t\} \subset \{\sup_{s\le t} X_s \ge a+\epsilon\} \tag{3.3}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \ge 0$.

Im folgenden sei ein $\epsilon > 0$ fest vorgegeben. Die Eintrittszeit τ^ϵ ist wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade des Prozesses eine $\mathfrak{F}_t^X$–Optionszeit. Die erste Inklusion aus (3.3) und die starke Markov–Eigenschaft ergeben dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^0(\sup_{s\le t} X_s > a+\epsilon, X_t \le X_{\tau^\epsilon}) &\le \mathbb{P}^0(\tau^\epsilon \le t, X_t \le X_{\tau^\epsilon}) \\
&= \int_{\{\tau^\epsilon\le t\}} \mathbb{P}^{X_{\tau^\epsilon}(\omega)}(X_{t-\tau^\epsilon(\omega)} \le X_{\tau^\epsilon}(\omega))\,\mathbb{P}^0(d\omega) \\
&= \int_{\{\tau^\epsilon\le t\}} \mathbb{P}^0(X_{t-\tau^\epsilon(\omega)} \le 0)\,\mathbb{P}^0(d\omega) \\
&= \int_{\{\tau^\epsilon\le t\}} \mathbb{P}^0(X_{t-\tau^\epsilon(\omega)} \ge 0)\,\mathbb{P}^0(d\omega) \\
&= \int_{\{\tau^\epsilon\le t\}} \mathbb{P}^{X_{\tau^\epsilon}(\omega)}(X_{t-\tau^\epsilon(\omega)} \ge X_{\tau^\epsilon}(\omega))\,\mathbb{P}^0(d\omega) \\
&= \mathbb{P}^0(\tau^\epsilon \le t, X_t \ge X_{\tau^\epsilon}) \\
&\le \mathbb{P}^0(\tau \le t, X_t \ge X_{\tau^\epsilon}).
\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung resultiert aus der Tatsache, daß $\tau \le \tau^\epsilon$ und somit $\{\tau^\epsilon \le t\} \subset \{\tau \le t\}$ gilt.

Verwenden wir an Stelle der ersten Inklusion von (3.3) die zweite, so erhalten wir mit einer analogen Rechnung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^0(\sup_{s\le t} X_s \ge a+\epsilon, X_t < X_{\tau^\epsilon}) &\ge \mathbb{P}^0(\tau^\epsilon \le t, X_t < X_{\tau^\epsilon}) \\
&= \mathbb{P}^0(\tau^\epsilon \le t, X_t > X_{\tau^\epsilon}) \\
&\ge \mathbb{P}^0(\sup_{s\le t} X_s > a+\epsilon, X_t > X_{\tau^\epsilon}) \\
&= \mathbb{P}^0(X_t > X_{\tau^\epsilon}),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $X_{\tau^\epsilon} \geq a + \epsilon$ einging.

Wir finden also

$$
\begin{aligned}
(3.4) \qquad \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a+\epsilon) \; = & \\
= \; & \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a+\epsilon, X_t \leq X_{\tau^\epsilon}) + \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a+\epsilon, X_t > X_{\tau^\epsilon}) \\
= \; & \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a+\epsilon, X_t \leq X_{\tau^\epsilon}) + \mathbb{P}^0(X_t > X_{\tau^\epsilon}) \\
\leq \; & \mathbb{P}^0(X_t \geq X_{\tau^\epsilon}, \tau \leq t) + \mathbb{P}^0(X_t > X_{\tau^\epsilon})
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(3.5) \qquad \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s \geq a+\epsilon) \; = & \\
= \; & \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s \geq a+\epsilon, X_t < X_{\tau^\epsilon}) + \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s \geq a+\epsilon, X_t \geq X_{\tau^\epsilon}) \\
= \; & \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s \geq a+\epsilon, X_t < X_{\tau^\epsilon}) + \mathbb{P}^0(X_t \geq X_{\tau^\epsilon}) \\
\geq \; & \mathbb{P}^0(X_t > X_{\tau^\epsilon}) + \mathbb{P}^0(X_t \geq X_{\tau^\epsilon})
\end{aligned}
$$

für jedes fest gewählte $\epsilon > 0$.

Die Pfade des Prozesses sind rechtsseitig stetig. Somit folgt aus $\tau = \inf_{\epsilon>0} \tau^\epsilon$ auch $X_\tau = \inf_{\epsilon>0} X_{\tau^\epsilon}$ fast sicher und wir erhalten die folgenden Inklusionen:

$$\bigcup_{\epsilon>0} \{X_t > X_{\tau^\epsilon}\} = \{X_t > X_\tau\}$$

und

$$\{X_t > X_\tau\} \subset \bigcup_{\epsilon>0} \{X_t \geq X_{\tau^\epsilon}\} \subset \{X_t \geq X_\tau\}.$$

Der Grenzübergang $\epsilon \searrow 0$ in (3.4), (3.5) ergibt schließlich

$$\mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a) \leq \mathbb{P}^0(X_t \geq X_\tau, \tau \leq t) + \mathbb{P}^0(X_t > X_\tau) \tag{3.6}$$

bzw.

$$\mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a) \geq 2\,\mathbb{P}^0(X_t > X_\tau), \tag{3.7}$$

womit die Behauptung des Satzes folgt. ////

Für jedes Maß μ und jede reelle meßbare Funktion f gilt

$$\int |f|\, d\mu = \int_0^\infty \mu(|f| \geq t)\, dt = \int_0^\infty \mu(|f| > t)\, dt,$$

vgl. hierzu Bauer [4] p. 161, (23.10) und Hewitt, Stromberg [38] p. 421, Theorem (21.71).

Damit finden wir für reelle Lévy–Prozesse und alle $t \geq 0$ und $M \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathbb{P}^0(|X_t| \wedge M = a)\, da &= \int_0^\infty \Big(\mathbb{P}^0(|X_t| \wedge M \geq a) - \mathbb{P}^0(|X_t| \wedge M > a) \Big)\, da \\ &= \mathbb{E}^0(|X_t| \wedge M) - \mathbb{E}^0(|X_t| \wedge M) \;=\; 0.\end{aligned}$$

Das heißt, daß für jeden festen Zeitpunkt $t \geq 0$ wenigstens eine dichte, von t abhängige Teilmenge $D(t) \subset \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$\mathbb{P}^0(X_t = a) = 0 \qquad (t \geq 0, a \in D(t))$$

gilt.

Besitzt der Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.2 fast sicher stetige Pfade, so gilt wegen $X_\tau = a$, $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a) = 2\,\mathbb{P}^0(X_t > a) = 2\,\mathbb{P}^0(X_t \geq a)$$

zunächst für positive $a \in D(t)$; mittels eines einfachen Approximationsarguments zeigt man diese Identität dann für beliebige $a \geq 0$.

Allgemeiner erhalten wir für stark Fellersche Lévy–Prozesse Gleichheit in (3.1), (3.2). Dazu verwenden wir den folgenden Hilfssatz, der sich bei Hawkes [34] findet.

3.3 Lemma. ([34] p. 341, Theorem 2.2) *Ein d–dimensionaler* Lévy*–Prozeß mit Übergangshalbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ ist genau dann stark* Feller*sch, wenn die Übergangskerne T_t Dichten bezüglich des* Lebesgue*–Maßes auf $\mathbb{R}^d$ besitzen.*

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.2 sei nun $\{X_t\}_{t\geq 0}$ stark Fellersch. Aus Lemma 3.3 und der starken Markov–Eigenschaft folgt dann

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^0(X_t \geq X_\tau, \tau \leq t) - \mathbb{P}^0(X_t > X_\tau, \tau \leq t) \;= \\ &= \int_{\{\tau\leq t\}} \mathbb{P}^{X_\tau(\omega)}\big(X_{t-\tau(\omega)} = X_\tau(\omega)\big)\, \mathbb{P}^0(d\omega) \\ &= \int_{\{\tau\leq t\}} \mathbb{P}^0\big(X_{t-\tau(\omega)} = 0\big)\, \mathbb{P}^0(d\omega) \;=\; 0\end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Zusammen mit (3.6) aus dem Beweis von Satz 3.2 ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a) &\leq \mathbb{P}^0(X_t > X_\tau) + \mathbb{P}^0(X_t \geq X_\tau, \tau \leq t) \\ &= \mathbb{P}^0(X_t > X_\tau) + \mathbb{P}^0(X_t > X_\tau, \tau \leq t) \\ &= 2\,\mathbb{P}^0(X_t > X_\tau).\end{aligned}$$

3.4 Korollar. *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein stark* Feller*scher, symmetrischer* Lévy*–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}$ und $\tau = \tau_{(a,\infty)}$ die erste Eintrittszeit in das offene Intervall (a,∞). Dann gilt*

$$\mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a) = 2\,\mathbb{P}^0(X_t > X_\tau) \qquad (t \geq 0) \tag{3.8}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

Das folgende Korollar stellt eine formale Analogie zum Reflexionsprinzip für eine normale BROWNsche Bewegung her; wir werden daher (3.9) als *Reflexionsprinzip* für LÉVY–Prozesse bezeichnen.

3.5 Korollar. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein symmetrischer* LÉVY*–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(3.9)\quad \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a) \leq \mathbb{P}^0(X_t \geq a) + \mathbb{P}^0(X_t > a) \leq 2\,\mathbb{P}^0(X_t \geq a) \qquad (t \geq 0).$$

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 3.2.
Nach Definition ist $\tau = \inf\{s \geq 0 : X_s > a\}$ und somit $X_\tau \geq a$. Wir erhalten daher $\{X_t > X_\tau\} \subset \{X_t > a\}$ bzw. $\{X_t \geq X_\tau\} \subset \{X_t \geq a\}$. Die Behauptung folgt dann aus (3.1). ////

3.6 Korollar. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ wie in Korollar 3.5. Dann gilt*

$$(3.10)\quad \mathbb{P}^x(\sup_{s\leq t} |X_s - x| > a) \leq \mathbb{P}^x(|X_t - x| \geq a) + \mathbb{P}^x(|X_t - x| > a) \qquad (t \geq 0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $a \geq 0$ zu zeigen. Wenden wir Korollar 3.5 auf die Prozesse $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und $\{-X_t\}_{t\geq 0}$ an, erhalten wir einerseits

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x(\sup_{s\leq t}(X_s - x) > a) &= \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t} X_s > a) \\
&\leq \mathbb{P}^0(X_t \geq a) + \mathbb{P}^0(X_t > a) \\
&= \mathbb{P}^x(X_t - x \geq a) + \mathbb{P}^x(X_t - x > a)
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x(\sup_{s\leq t}(x - X_s) > a) &= \mathbb{P}^x(\sup_{s\leq t}(-(X_s - x)) > a) \\
&= \mathbb{P}^0(\sup_{s\leq t}(-X_s) > a) \\
&\leq \mathbb{P}^0(-X_t \geq a) + \mathbb{P}^0(-X_t > a) \\
&= \mathbb{P}^x(x - X_t \geq a) + \mathbb{P}^x(x - X_t > a).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^x(\sup_{s\leq t} |X_s - x| > a) = \\
&= \mathbb{P}^x(\sup_{s\leq t}(X_s - x) > a) + \mathbb{P}^x(\sup_{s\leq t}(x - X_s) > a) \\
&\leq \mathbb{P}^x(X_t - x \geq a) + \mathbb{P}^x(X_t - x > a) + \mathbb{P}^x(x - X_t \geq a) + \mathbb{P}^x(x - X_t > a) \\
&= \mathbb{P}^x(|X_t - x| \geq a) + \mathbb{P}^x(|X_t - x| > a),
\end{aligned}$$

also die Behauptung. ////

3.7 Korollar. *Es sei* $\{X_t\}_{t\ge 0}$ *wie in Korollar 3.5. Dann gilt*

$$(3.11)\quad \mathbb{P}^x(\sup_{r\le s\le t}|X_s-X_r|>a)\le \mathbb{P}^x(|X_t-X_r|\ge a)+\mathbb{P}^x(|X_t-X_r|>a)\quad (t\ge r\ge 0)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ *und* $a\in\mathbb{R}$.

Beweis. Der durch $Y_s := X_{s+r}-X_r$ erklärte Prozeß $\{Y_t\}_{t\ge 0}$ ist wiederum ein symmetrischer LÉVY–Prozeß. Die Behauptung folgt somit unmittelbar aus Korollar 3.5 und dem Beweis von Korollar 3.6. ////

3.8 Bemerkung. Der Beweis von Satz 3.2, und damit auch die Beweise der Korollare 3.4, 3.5 bis 3.7 übertragen sich auf reellwertige symmetrische MARKOV–Prozesse mit diskreter Zeitmenge. Dazu muß man lediglich beachten, daß jeder (reellwertige) MARKOVsche Prozeß $\{X_t\}_{t\ge 0}$ bezüglich einer Optionszeit τ mit Werten in einer diskreten Teilmenge M der Zeitmenge $[0,\infty)$ bereits *stark* MARKOV*sch* ist: es seien $B\in\mathfrak{B}$ und $C\in\mathfrak{F}^X_{\tau+}$ ($=\mathfrak{F}^X_\tau$ da τ diskret). Für alle $t\ge 0$ und $x\in\mathbb{R}$ gilt dann

$$\mathbb{P}^x(\{X_{t+\tau}\in B\}\cap C)=\mathbb{P}^x\Big(\bigcup_{m\in M}\{X_{t+m}\in B\}\cap\{\tau=m\}\cap C\Big).$$

Gemäß Voraussetzung ist $\{\tau=m\}\cap C\in\mathfrak{F}^X_m$, und mit Hilfe der einfachen MARKOV–Eigenschaft folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x(\{X_{t+\tau}\in B\}\cap C) &= \sum_{m\in M}\int_{\{\tau=m\}\cap C}\mathbb{P}^{X_m(\omega)}(X_t\in B)\,\mathbb{P}^x(d\omega)\\ &= \sum_{m\in M}\int_{\{\tau=m\}\cap C}\mathbb{P}^{X_\tau(\omega)}(X_t\in B)\,\mathbb{P}^x(d\omega)\\ &= \int_C \mathbb{P}^{X_\tau(\omega)}(X_t\in B)\,\mathbb{P}^x(d\omega),\end{aligned}$$

d. h. die starke MARKOV–Eigenschaft für Optionszeiten mit diskreter Wertemenge.

Diese Beobachtung erlaubt es, mit einem Approximationsargument Satz 3.2 und die daraus resultierenden Folgerungen für reelle rechtsstetige (allgemeiner: separable) symmetrische MARKOV–Prozesse zu zeigen.

Wir werden nunmehr ein Korollar 3.5 entsprechendes Ergebnis für *nicht notwendig symmetrische* LÉVY–Prozesse zeigen. Eine Möglichkeit ist dabei die Symmetrisierung. Hier werden wir jedoch einen anderen Weg beschreiten. Das folgende Lemma ist implizit in der Übungsaufgabe (10.25) bei BLUMENTHAL–GETOOR [11] pp. 60–61 enthalten.

3.9 Lemma. *Es sei* $\{X_t\}_{t\ge 0}$ *ein d–dimensionaler stark* MARKOV*scher Prozeß mit rechtsseitig stetigen Pfaden. Dann gilt*

$$\mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-x|\ge a)\le 2\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\sup_{0\le s\le t}\mathbb{P}^y(|X_s-y|\ge a/2)\qquad (t\ge 0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ *und* $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Auf Grund der Rechtsstetigkeit der Pfade des Prozesses ist

$$\tau(\omega) := \inf\{t \geq 0 : |X_t(\omega) - x| > a\} \qquad (\omega \in \Omega)$$

eine Optionszeit.

Die starke MARKOV–Eigenschaft zeigt

$$\mathbb{P}^x(\tau \leq t, |X_t - x| < a/2) = \int_{\{\tau \leq t\}} \mathbb{P}^{X_\tau(\omega)}(|X_{t-\tau(\omega)} - x| < a/2)\, \mathbb{P}^x(d\omega),$$

und weil $|X_{t-\tau(\omega)} - x| < a/2$

$$|X_{t-\tau(\omega)} - X_\tau(\omega)| \geq |X_\tau(\omega) - x| - |X_{t-\tau(\omega)} - x| \geq \frac{a}{2}$$

impliziert, folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(\tau \leq t, |X_t - x| < a/2) &\leq \int_{\{\tau \leq t\}} \mathbb{P}^{X_\tau(\omega)}(|X_{t-\tau(\omega)} - X_\tau(\omega)| \geq a/2)\, \mathbb{P}^x(d\omega) \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{P}^y(|X_s - y| \geq a/2)\, \mathbb{P}^x(\tau \leq t) \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{P}^y(|X_s - y| \geq a/2). \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - x| > a) &\leq \mathbb{P}^x(\tau \leq t, |X_t - x| < a/2) + \mathbb{P}^x(\tau \leq t, |X_t - x| \geq a/2) \\ &\leq \mathbb{P}^x(\tau \leq t, |X_t - x| < a/2) + \mathbb{P}^x(|X_t - x| \geq a/2) \end{aligned}$$

folgt schließlich die Behauptung. ////

3.10 Satz. *Es sei* $\{X_t\}_{t \geq 0}$ *ein translationsinvarianter reeller, stark* MARKOV*scher Prozeß mit rechtsseitig stetigen Pfaden. Dann gilt*

$$\mathbb{P}^x(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - y| \geq a + b) \leq 4\, \frac{\mathbb{P}^x(|X_t - z| \geq a/2)}{\mathbb{P}^x(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - y| \leq b)} \qquad (t \geq 0)$$

für jede Wahl von $x, y, z \in \mathbb{R}$ *und* $a, b \geq 0$.

Beweis. Mit $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ bezeichnen wir einen von $\{X_t\}_{t \geq 0}$ unabhängigen Prozeß, der jedoch dieselben endlich–dimensionalen Verteilungen wie $\{X_t\}_{t \geq 0}$ besitzt.

Wegen

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - Y_s| \geq \sup_{0 \leq s \leq t} (|X_s - y| - |Y_s - y|) \geq \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - y| - \sup_{0 \leq s \leq t} |Y_s - y|$$

finden wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-Y_s|\ge a) &\ge \mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-y|-\sup_{0\le s\le t}|Y_s-y|\ge a)\\
&\ge \mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-y|\ge a+b,\ \sup_{0\le s\le t}|Y_s-y|\le b)\\
&= \mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-y|\ge a+b)\,\mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|Y_s-y|\le b)\\
&= \mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-y|\ge a+b)\,\mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-y|\le b).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus einer Anwendung des Reflexionsprinzips 3.5 auf den symmetrischen Prozeß $\{X_t-Y_t\}_{t\ge 0}$. ////

3.11 Korollar. *Jeder reelle* LÉVY*–Prozeß* $\{X_t\}_{t\ge 0}$ *ist räumlich und zeitlich gleichmäßig stochastisch beschränkt, d. h. es gilt*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\sup_{0\le s\le t}\mathbb{P}^y(|X_s-y|\ge b)\le\delta<\frac{1}{2}\qquad(0\le t\le T_b)$$

für ein geeignetes $T_b>0$. *Insbesondere ist dann*

$$(3.12)\quad \mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-x|\ge a+b)\le\frac{4}{1-2\delta}\,\mathbb{P}^x(|X_t-x|\ge a/2)\qquad(0\le t\le T_b)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ *und* $a,b>0$.

Beweis. Für LÉVY–Prozesse gilt

$$\sup_{0\le s\le t}\sup_{y\in\mathbb{R}}\mathbb{P}^y(|X_s-y|\ge a)=\sup_{0\le s\le t}\mathbb{P}^0(|X_s|\ge a)\qquad(t\ge 0),$$

und die Behauptung folgt aus der gewöhnlichen stochastischen Stetigkeit bzw. Beschränktheit.

Nach Lemma 3.9 ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-x|\le b) &= 1-\mathbb{P}^x(\sup_{0\le s\le t}|X_s-x|>b)\\
&\ge 1-2\sup_{y\in\mathbb{R}}\sup_{0\le s\le t}\mathbb{P}^y(|X_s-y|\ge b)\\
&\ge 1-2\delta.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich (3.12) unmittelbar aus Satz 3.10. ////

Ehe wir das Reflexionsprinzip 3.5 für mehrdimensionale Prozesse beweisen, erinnern wir an einige elementare Ungleichungen.

3.12 Lemma. *Für beliebige reelle Zahlen* $x_1,x_2,\dots,x_n$, $n\in\mathbb{N}$, *gelten die folgenden Ungleichungen:*

$$\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\le|x_1|+\ldots+|x_n|\le n\max_{1\le j\le n}|x_j|$$

und

$$\max_{1\le j\le n}|x_j| \le |x_1|+\ldots+|x_n| \le \sqrt{n}\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

Die Koordinatenprozesse eines d–dimensionalen symmetrischen Lévy–Prozesses $\{X_t\}_{t\ge0}$ genügen dem Reflexionsprinzip von Korollar 3.5. Lemma 3.12 erlaubt uns, eine ähnliche Abschätzung für den Prozeß $\{|X_t|\}_{t\ge0}$ zu zeigen.

3.13 Satz. *Es sei $\{X_t\}_{t\ge0}$ ein symmetrischer* Lévy*–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Für alle $x\in\mathbb{R}^d$ und alle $a\in\mathbb{R}$ gilt*

$$\mathbb{P}^x\Big(\sup_{r\le s\le t}|X_s-X_r|>a\Big) \le 2d\cdot\mathbb{P}^x\Big(|X_t-X_r|\ge\frac{a}{d}\Big) \qquad (t\ge r\ge 0). \tag{3.13}$$

Ist der Prozeß $\{X_t\}_{t\ge0}$ nicht symmetrisch, so gibt es Zahlen $T=T_b>0$ und $\delta<\frac{1}{2}$, so daß

$$\mathbb{P}^x\Big(\sup_{r\le s\le t}|X_s-X_r|>a+b\Big) \le \frac{4\,d}{1-2\delta}\,\mathbb{P}^x\Big(|X_t-X_r|\ge\frac{a}{2d}\Big) \tag{3.14}$$

für alle $0\le r\le t$ mit $t-r\le T_b$ gilt.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß alle Koordinatenprozesse $\big\{X_t^{(j)}\big\}_{t\ge0}$, $1\le j\le d$, ebenfalls symmetrische Lévy–Prozesse sind. Ist nämlich $a(\xi)$ der (reellwertige) charakteristische Exponent des Lévy–Prozesses, so gilt für alle $1\le j\le d$ und $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)\in\mathbb{R}^d$

$$\log\mathbb{E}^0\Big(\mathrm{e}^{iX_1^{(j)}\xi_j}\Big) = a((0,\ldots,\xi_j,\ldots,0)) \ge 0.$$

Somit können wir Korollar 3.7 auf die Koordinatenprozesse anwenden und finden für $x\in\mathbb{R}^d$, $t\ge r\ge0$ und $a\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}^x(\sup_{r\le s\le t}|X_s^{(j)}-X_r^{(j)}|>a) \le 2\,\mathbb{P}^x(|X_t^{(j)}-X_r^{(j)}|\ge a). \tag{3.15}$$

Auf Grund der Isotonie des Maßes $\mathbb{P}^x$ ergeben sich aus Lemma 3.12 folgende Abschätzungen:

$$\mathbb{P}^x(\sup_{r\le s\le t}|X_s^{(j)}-X_r^{(j)}|\ge a) \;\le\; \mathbb{P}^x(\sup_{r\le s\le t}|X_s-X_r|\ge a), \tag{3.16}$$

$$\mathbb{P}^x\left(\sum_{j=1}^d\sup_{r\le s\le t}|X_s^{(j)}-X_r^{(j)}|\ge a\right) \;\le\; \mathbb{P}^x\left(\bigcup_{j=1}^d\Big\{\sup_{r\le s\le t}|X_s^{(j)}-X_r^{(j)}|\ge\frac{a}{d}\Big\}\right) \tag{3.17}$$

$$\le\; \sum_{j=1}^d\mathbb{P}^x\left(\sup_{r\le s\le t}|X_s^{(j)}-X_r^{(j)}|\ge\frac{a}{d}\right), \tag{3.18}$$

$$\mathbb{P}^x\left(\sup_{r\le s\le t}\sum_{j=1}^d|X_s^{(j)}-X_r^{(j)}|\ge a\right) \;\le\; \mathbb{P}^x\left(\sum_{j=1}^d\sup_{r\le s\le t}|X_s^{(j)}-X_r^{(j)}|\ge a\right), \tag{3.19}$$

$$\mathbb{P}^x\left(\sup_{r\le s\le t}|X_s-X_r|\ge a\right) \;\le\; \mathbb{P}^x\left(\sup_{r\le s\le t}\sum_{j=1}^d|X_s^{(j)}-X_r^{(j)}|\ge a\right). \tag{3.20}$$

Die Abschätzung (3.13) folgt dann direkt aus den Ungleichungen (3.15) und (3.16) bis (3.20).

Verwendet man an Stelle von (3.15) die Ungleichung (3.12), so findet man mit derselben Überlegung die Abschätzung (3.14). ////

3.14 Korollar. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein symmetrischer d-dimensionaler stochastischer Prozeß wie in Satz 3.13. Dann gilt*

$$\mathbb{E}^x\big(\sup_{r\leq s\leq t}(|X_s - X_r|^\lambda)\big) \leq 2d^{1+\lambda}\,\mathbb{E}^x\left(|X_t - X_r|^\lambda\right) \qquad (t\geq r\geq 0) \tag{3.21}$$

für alle $x\in\mathbb{R}^d$ und alle $\lambda\geq 0$.

Ist der Prozeß nicht symmetrisch, so gilt für alle $\lambda\geq 0$, $b>0$ und kurze Zeitspannen $t-r\leq T$

$$\mathbb{E}^x\big(\sup_{r\leq s\leq t}(|X_s - X_r|^\lambda)\big) \leq \frac{(4d)^{\lambda+1}}{1-2\delta}\,\mathbb{E}^x\left(|X_t - X_r|^\lambda\right) + b \qquad (t\geq r\geq 0). \tag{3.22}$$

Dabei ist $T = T_{b^{1/\lambda}/2}$ wie in Satz 3.13.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\lambda > 0$. Für jedes Maß μ und jede reelle meßbare Funktion f gilt

$$\int f\vee 0\,d\mu = \int_0^\infty \mu(f\geq t)\,dt = \int_0^\infty \mu(f>t)\,dt,$$

vgl. hierzu Bauer [4] p. 161, (23.10) und Hewitt, Stromberg [38] p. 421, Theorem (21.71). Somit folgt aus (3.13)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x\left(\sup_{r\leq s\leq t}\left(|X_s - X_r|^\lambda\right)\right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}^x\left(\sup_{r\leq s\leq t}|X_s - X_r| > a^{\frac{1}{\lambda}}\right) da \\
&\leq \int_0^\infty 2d\,\mathbb{P}^x\left(|X_t - X_r| \geq \frac{a^{\frac{1}{\lambda}}}{d}\right) da \\
&= \int_0^\infty 2d^{1+\lambda}\,\mathbb{P}^x\left(|X_t - X_r| \geq \alpha^{\frac{1}{\lambda}}\right) d\alpha \\
&= 2d^{1+\lambda}\,\mathbb{E}^x\left(|X_t - X_r|^\lambda\right).
\end{aligned}$$

Im nicht–symmetrischen Fall verwenden wir statt (3.13) die Abschätzung (3.14) und rechnen für festes $b>0$ ähnlich wie im symmetrischen Fall:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x\left(\sup_{r\leq s\leq t}\left(|X_s - X_r|^\lambda - b\right)\right) &\leq \mathbb{E}^x\left(\sup_{r\leq s\leq t}\left(|X_s - X_r|^\lambda - b\right)\vee 0\right) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}^x\left(\sup_{r\leq s\leq t}|X_s - X_r| > (a+b)^{\frac{1}{\lambda}}\right) da \\
&\leq \int_0^\infty \mathbb{P}^x\left(\sup_{r\leq s\leq t}|X_s - X_r| > \frac{a^{\frac{1}{\lambda}} + b^{\frac{1}{\lambda}}}{2}\right) da.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Abschätzung ging $(\alpha+\beta)^\lambda \le 2^\lambda(\alpha^\lambda+\beta^\lambda)$ mit $\alpha = a^{\frac{1}{\lambda}}$ und $\beta = b^{\frac{1}{\lambda}}$ ein. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x\left(\sup_{r\le s\le t}|X_s-X_r|^\lambda\right)-b &\le \frac{4d}{1-2\delta}\int_0^\infty \mathbb{P}^x\left(|X_t-X_r|\ge \frac{a^{\frac{1}{\lambda}}}{4d}\right)da \\
&= \frac{(4d)^{1+\lambda}}{1-2\delta}\int_0^\infty \mathbb{P}^x\left(|X_t-X_r|\ge \alpha^{\frac{1}{\lambda}}\right)d\alpha \\
&= \frac{(4d)^{1+\lambda}}{1-2\delta}\,\mathbb{E}^x\left(|X_t-X_r|^\lambda\right),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung des Korollars folgt. ////

3.15 Bemerkung. Die Aussage von Korollar 3.5 gilt auch für den Prozeß $\{-X_t\}_{t\ge 0}$. Wir erhalten daher für $b=-a\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}^0(\inf_{s\le t} X_s < b) \le \mathbb{P}^0(X_t\le b)+\mathbb{P}^0(X_t<b),$$

und entsprechend gelten (3.10), (3.11) und (3.13), wenn wir $(\sup\ldots>\ldots)$ durch $(\inf\ldots<\ldots)$ und auf den rechten Seiten $(\ldots\ge\ldots)$ durch $(\ldots\le\ldots)$ ersetzen. Insbesondere gilt (3.21) nunmehr für *alle* $\lambda\in\mathbb{R}$.

3.2 Vergleichbare Prozesse und ihre Übergangswahrscheinlichkeiten

3.16 Definition. Zwei Markovsche Prozesse $(\Omega,\mathfrak{A},\{\mathbb{P}^x\}_{x\in\mathbb{R}^d},\mathbb{R}^d,X_t,\mathfrak{F}_t,t\ge 0)$ und $(\tilde\Omega,\tilde{\mathfrak{A}},\{\tilde{\mathbb{P}}^x\}_{x\in\mathbb{R}^d},\mathbb{R}^d,\tilde X_t,\tilde{\mathfrak{F}}_t,t\ge 0)$ heißen *halbseitig vergleichbar*, wenn für jeden Startpunkt $x\in\mathbb{R}^d$ *eine* der beiden Bedingungen

$$(\prec)\qquad \mathbb{P}^x_{X_t}(B)\le K_{t,x}\,\tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde X_t}(B)\qquad (B\in\mathfrak{B},t\ge 0)$$

bzw.

$$(\succ)\qquad \mathbb{P}^x_{X_t}(B)\ge k_{t,x}\,\tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde X_t}(B)\qquad (B\in\mathfrak{B},t\ge 0)$$

mit strikt positiven Konstanten $0<k_{t,x}\le K_{t,x}<\infty$ erfüllt ist. Wir schreiben dann $\{X_t\}_{t\ge0}\prec\{\tilde X_t\}_{t\ge0}$ bzw. $\{X_t\}_{t\ge0}\succ\{\tilde X_t\}_{t\ge0}$ und sagen, daß $\{\tilde X_t\}_{t\ge0}$ *nach unten* bzw. *nach oben* mit $\{X_t\}_{t\ge0}$ *vergleichbar* ist.

Wir nennen die Prozesse *vergleichbar*, wenn *sowohl* $(\prec)$ *als auch* $(\succ)$ gelten. Abkürzend schreiben wir dafür $\{X_t\}_{t\ge0}\sim\{\tilde X_t\}_{t\ge0}$.

Wir vereinbaren noch folgende Notation: für *Mengen* $E\subset[0,\infty)$ bzw. $B\subset\mathbb{R}^d$ sei stets

$$k_{E,x}=k(E,x):=\inf_{t\in E}k_{t,x}\quad\text{bzw.}\quad k_{t,B}=k(t,B):=\inf_{x\in B}k_{t,x}$$

und
$$K_{E,x} = K(E,x) := \sup_{t\in E} K_{t,x} \quad \text{bzw.} \quad K_{t,B} = K(t,B) := \sup_{x\in B} K_{t,x}.$$

3.17 Beispiel. **(1)** Durch
$$A(x,D)\phi(x) := \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)\Big) \qquad (x\in\mathbb{R}^d, \phi\in C^2(\mathbb{R}^d))$$
ist ein gleichmäßig stark elliptischer Differentialoperator in Divergenzform mit einer symmetrischen Koeffizientenmatrix $\{a_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^d$ mit C_b^2–Einträgen $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt. Dabei verstehen wir unter *gleichmäßig stark elliptisch*, daß die Matrix $\{a_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^d$ die Ungleichungen

$$\kappa^{-1}|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \kappa|\xi|^2 \qquad (x,\xi\in\mathbb{R}^d) \tag{3.23}$$

mit einer von x unabhängigen *Elliptizitätskonstante* $\kappa\in[1,\infty)$ erfüllt.

Der Operator $A(x,D)$ ist dann der infinitesimale Erzeuger eines *Diffusionsprozesses*, d. h. eines d–dimensionalen stark MARKOVschen Prozesses $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge0}$ mit stetigen Pfaden, vgl. ITÔ, MCKEAN [45] pp. 302–303. Dieses Ergebnis gilt auch dann, wenn die Funktionen $a_{ij}(\cdot)$ nur als meßbar vorausgesetzt werden—wie üblich ist dann die Differentiation im schwachen Sinne zu verstehen—, vgl. STROOCK [73] p. 341, Theorem II.3.1. STROOCK zeigt weiterhin, daß der Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge0}$ die starke FELLER–Eigenschaft im Sinne der Definition 1.6 besitzt.

Im Fall von C_b^2–Koeffizienten existiert ein Fundamentalkern $p(t,x,y)$. ARONSON zeigte in [1] folgende Abschätzungen des Fundamentalkerns

$$c(c\pi)^{d/2}\,(ct\pi)^{-d/2}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{ct}} \le p(t,x,y) \le C(C\pi)^{d/2}\,(Ct\pi)^{-d/2}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{Ct}}, \tag{3.24}$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}^d$ und $t\ge0$ mit nur von der Raumdimension d und der Elliptizitätskonstanten κ abhängenden Konstanten $c := C^{-1}$ und $C, C\in[1,\infty)$; siehe [1] p. 891, Theorem 1, für die Unabhängigkeit der Konstanten von der Zeit p. 895, Remark 5. Ein ausführlicher Beweis findet sich bei STROOCK [73] §§ I.1 und I.2.

Offensichtlich stehen auf der linken bzw. rechten Seite von (3.24) die Übergangsdichten von LÉVY–Prozessen $\{\underline{X}_t\}_{t\ge0}$ bzw. $\{\overline{X}_t\}_{t\ge0}$, deren Erzeuger durch Vielfache des LAPLACE–Operators Δ, $\frac{c}{4}\Delta$ bzw. $\frac{C}{4}\Delta$, gegeben sind. Wir finden somit

$$k^{-1}\,\mathbb{P}^x(\underline{X}_t\in B) \le \mathbb{P}^x(\tilde{X}_t\in B) \le K^{-1}\,\mathbb{P}^x(\overline{X}_t\in B) \tag{3.25}$$

für alle $x\in\mathbb{R}^d$, $t\ge0$ und $B\in\mathfrak{B}$ mit $K = C^{-1}(C\pi)^{-d/2}$ und $k = K^{-1}$. Mithin gilt $\{\underline{X}_t\}_{t\ge0} \prec \{\tilde{X}_t\}_{t\ge0} \prec \{\overline{X}_t\}_{t\ge0}$. Da offensichtlich $\underline{X}_t = \overline{X}_{\frac{c}{C}t}$ in Verteilung gilt, können wir auch $\{\overline{X}_{\frac{c}{C}t}\}_{t\ge0} \prec \{\tilde{X}_t\}_{t\ge0} \prec \{\overline{X}_t\}_{t\ge0}$ schreiben.

Durch Subordination mit einer Faltungshalbgruppe $\{\mu_t\}_{t\ge0}$, die durch die BERNSTEIN–Funktion f gegeben ist, können wir uns von lokalen Erzeugern lösen. Auf

Grund von Satz 2.18 übertragen sich die Abschätzungen (3.25) auf die subordinierten Prozesse $\{\underline{X}^f_t\}_{t\geq 0}$, $\{\overline{X}^f_t\}_{t\geq 0}$, und $\{\tilde{X}^f_t\}_{t\geq 0}$: Für alle $B \in \mathfrak{B}$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \geq 0$ gelten

$$\begin{aligned}
k^{-1}\mathbb{P}^x\big(\underline{X}^f_t \in B\big) &= \int_0^\infty k^{-1}\mathbb{P}^x\big(\underline{X}_s \in B\big)\,\mu_t(ds) \\
&\leq \int_0^\infty \tilde{\mathbb{P}}^x\big(\tilde{X}_s \in B\big)\,\mu_t(ds) \\
&= \tilde{\mathbb{P}}^x\big(\tilde{X}^f_t \in B\big)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}^x\big(\tilde{X}^f_t \in B\big) &= \int_0^\infty \tilde{\mathbb{P}}^x\big(\tilde{X}_s \in B\big)\,\mu_t(ds) \\
&\leq \int_0^\infty K^{-1}\mathbb{P}^x\big(\overline{X}_s \in B\big)\,\mu_t(ds) \\
&= K^{-1}\mathbb{P}^x\big(\overline{X}^f_t \in B\big).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Die Feller–Stetigkeit bleibt gemäß Korollar 2.20 erhalten.

Ist $f(x) = |x|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, d. h. ist der Subordinator ein α-stabiler Prozeß, dann kann, ggf. durch Vergrößerung der Konstante C, stets $\underline{X}^f_t = \overline{X}^f_t$ erreicht werden, vgl. Selmi [71] pp. 27–28, Théorème 4.

(2) Der Operator

$$\begin{aligned}
A(x,D)\phi(x) &:= \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)\Big) + \sum_{i,j=1}^d b_i(x)a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\tilde{b}_j(x)a_{ij}(x)\phi(x)\Big) + c(x)\phi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^d, \phi \in C^2(\mathbb{R}^d)),
\end{aligned}$$

wo $a_{ij}, b_j, \tilde{b}_j, c \in C^2_b(\mathbb{R})$, $i,j = 1,\ldots,d$, mit der symmetrischen und gleichmäßig stark strikt positiv definiten Koeffizientenmatrix $(a_{ij}(\cdot))^d_{i,j=1}$, erzeugt einen (i. allg. nicht symmetrischen) Feller–stetigen Diffusionsprozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$, dessen Übergangskerne $p(t,x,y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^d$ und $t \in [0,T]$ den Abschätzungen (3.25) genügen. Dabei hängt die dort auftretende Vergleichskonstante C auch von T ab, genauer gilt $C = m\,\mathrm{e}^{mT}$ mit einem geeigneten $m > 0$; vgl. Stroock [73] pp. 335–338, für die Abhängigkeit der Konstanten C insbesondere pp. 338 oben, in Step 3.

Man beachte, daß in diesem Fall Subordination nicht möglich ist, es sei denn mit beschränkten—und damit bereits konstanten—Subordinatoren, für die $\operatorname{supp}\mu_t \subset [0,T]$ ist.

3.18 Lemma. *Es seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^d, X_t, \mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ *und* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathbb{P}}, \mathbb{R}^d, \tilde{X}_t, \tilde{\mathfrak{F}}_t, t \geq 0)$ *vergleichbare* Markov*–Prozesse. Für die gemeinsamen Verteilungen von* $X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ *und* $\tilde{X}_{t_0}, \tilde{X}_{t_1}, \ldots, \tilde{X}_{t_n}$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, *und für alle Mengen* $E_j \in \mathfrak{B}$,

$0 \leq j \leq n$, *gelten folgende Abschätzungen*

$$\text{(3.28)} \qquad \mathbb{P}^x_{\bigotimes_{j=0}^n X_{t_j}}(E_0 \times \ldots \times E_n) \geq$$
$$\geq \; k(t_0, x) \prod_{j=1}^n k(t_j - t_{j-1}, E_j)\, \tilde{\mathbb{P}}^x_{\bigotimes_{j=0}^n \tilde{X}_{t_j}}(E_0 \times \ldots \times E_n)$$

und

$$\text{(3.29)} \qquad \mathbb{P}^x_{\bigotimes_{j=0}^n X_{t_j}}(E_0 \times \ldots \times E_n) \leq$$
$$\leq \; K(t_0, x) \prod_{j=1}^n K(t_j - t_{j-1}, E_j)\, \tilde{\mathbb{P}}^x_{\bigotimes_{j=0}^n \tilde{X}_{t_j}}(E_0 \times \ldots \times E_n).$$

Beweis. Offensichtlich genügt es, den Beweis für den Fall $n = 2$, $s := t_0$ und $t := t_1$ zu führen. Auf Grund der CHAPMAN-KOLMOGOROV–Gleichungen und wegen der Vergleichbarkeit der Prozesse gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x_{X_s \otimes X_t}(E \times F) &= \int_{z\in E} \int_{y \in F} \mathbb{P}^y_{X_{t-s}}(dz)\, \mathbb{P}^x_{X_s}(dy) \\
&\leq \int_{z\in E} \int_{y \in F} K_{t-s,y}\, \tilde{\mathbb{P}}^y_{\tilde{X}_{t-s}}(dz)\, K_{s,x}\, \tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_s}(dy) \\
&\leq K_{s,x} K_{t-s,F} \int_{z\in E} \int_{y \in F} \tilde{\mathbb{P}}^y_{\tilde{X}_{t-s}}(dz)\, \tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_s}(dy) \\
&= K_{s,x} K_{t-s,F}\, \tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_s \otimes \tilde{X}_t}(E \times F).
\end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man (3.28). ////

3.19 Korollar. *Es seien* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *und* $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *zwei vergleichbare* MARKOV–*Prozesse wie in Lemma 3.18. Dann gilt für alle* $t \geq s \geq 0$, *alle* $B \in \mathfrak{B}$ *und alle* $x \in \mathbb{R}^d$

$$\text{(3.30)} \qquad \mathbb{P}^x_{X_t - X_s}(B) \geq k_{s,x} k_{t-s,\mathbb{R}^d}\, \tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_t - \tilde{X}_s}(B)$$

und

$$\text{(3.31)} \qquad \mathbb{P}^x_{X_t - X_s}(B) \leq K_{s,x} K_{t-s,\mathbb{R}^d}\, \tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_t - \tilde{X}_s}(B).$$

Insbesondere gilt dann für jede reelle $\mathfrak{B}$*–meßbare Funktion* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\text{(3.32)} \qquad \mathbb{E}^x\left(\left|f\left(X_t - X_s\right)\right|\right) \geq k_{s,x} k_{t-s,\mathbb{R}^d}\, \tilde{\mathbb{E}}^x\left(\left|f\left(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s\right)\right|\right)$$

und

$$\text{(3.33)} \qquad \mathbb{E}^x\left(\left|f\left(X_t - X_s\right)\right|\right) \leq K_{s,x} K_{t-s,\mathbb{R}^d}\, \tilde{\mathbb{E}}^x\left(\left|f\left(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s\right)\right|\right).$$

Insbesondere besagt Korollar 3.19, daß für jede Zahl $r \geq 0$ aus $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0} \prec \{X_t\}_{t\geq 0}$ auch $\{\tilde{X}_{r+t} - \tilde{X}_r\}_{t\geq 0} \prec \{X_{r+t} - X_r\}_{t\geq 0}$ folgt. Die neue Vergleichskonstante $k^r_{t,x}$ berechnet sich als

$$k^r_{t,x} = k_{r,x} k_{t,\mathbb{R}^d}.$$

Interessiert man sich für Differenzen von Zufallsvariablen, erlaubt diese Bemerkung, Aussagen der Art $k_{[0,T],\cdot} > 0$ für *ein* $T > 0$ auf $k_{[0,\epsilon],\cdot} > 0$, $\epsilon > 0$ *klein*, zurückzuführen.

Beweis von Korollar 3.19. Aus Lemma 3.18 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x_{X_t - X_s}(B) &= \int\!\!\int 1_B(z-y)\,\mathbb{P}^x_{X_t \otimes X_s}(dz \times dy) \\ &\le K_{s,x} K_{t-s,\mathbb{R}^d} \int\!\!\int 1_B(z-y)\,\tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_t \otimes \tilde{X}_s}(dz \times dy) \\ &= K_{s,x} K_{t-s,\mathbb{R}^d}\,\tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_t - \tilde{X}_s}(B). \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man (3.30). Die Abschätzungen (3.32) und (3.33) folgen aus den schon bewiesenen Beziehungen und

$$\int |f|\,d\mu = \int_0^\infty \mu(|f| \ge t)\,dt = \int_0^\infty \mu(|f| > t)\,dt,$$

wobei μ ein positives Maß ist—vgl. auch den Beweis zu Korollar 3.14. ////

3.20 Korollar. *Es seien $\{X_t\}_{t\ge 0}$ und $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$ zwei vergleichbare* Markov*–Prozesse wie in Lemma 3.18. Hat der Prozeß $\{X_t\}_{t\ge 0}$ stationäre Zuwächse, dann gilt für alle $t \ge s \ge 0$, jede Wahl von $x, y \in \mathbb{R}^d$ und alle $B \in \mathfrak{B}$*

$$\frac{k(t-s,x)}{K(s,y)K(t-s,\mathbb{R}^d)}\,\tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_{t-s}-x}(B) \le \tilde{\mathbb{P}}^y_{\tilde{X}_t - \tilde{X}_s}(B) \le \frac{K(t-s,x)}{k(s,y)k(t-s,\mathbb{R}^d)}\,\tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_{t-s}-x}(B).$$

Als erste Anwendung der Vergleichbarkeit von Prozessen werden wir einige elementare Regularitätseigenschaften der Pfade untersuchen.

3.21 Satz. *Es seien $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0} \prec \{X_t\}_{t\ge 0}$ zwei halbseitig vergleichbare* Markov*–Prozesse mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Ist $\liminf_{s\to t} k_{|t-s|,\mathbb{R}^d} > 0$ für alle $t \ge 0$, dann impliziert die stochastische Stetigkeit des Prozesses $\{X_t\}_{t\ge 0}$ die des Prozesses $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$.*

Beweis. Auf Grund von (3.30) finden wir für alle $s, t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $\epsilon > 0$

$$\tilde{\mathbb{P}}^x(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| > \epsilon) \le (k_{s,x}^{-1} \vee k_{t,x}^{-1})\,k^{-1}_{|t-s|,\mathbb{R}^d}\,\mathbb{P}^x(|X_t - X_s| > \epsilon).$$

Nach Voraussetzung sind die Familien $\{k_{s,x}^{-1}\}_{s\to t}$ und $\{k^{-1}_{|t-s|,\mathbb{R}^d}\}_{s\to t}$ beschränkt; daher gilt

$$\begin{aligned} &\limsup_{s\to t} \tilde{\mathbb{P}}^x(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| > \epsilon) \le \\ &\le \limsup_{s\to t} \Big((k_{s,x}^{-1} \vee k_{t,x}^{-1})\,k^{-1}_{|t-s|,\mathbb{R}^d}\,\mathbb{P}^x(|X_t - X_s| > \epsilon) \Big) \\ &\le \Big(k_{t,x}^{-1} \vee \limsup_{s\to t} k_{s,x}^{-1} \Big) \limsup_{s\to t} k^{-1}_{|t-s|,\mathbb{R}^d}\, \limsup_{s\to t} \mathbb{P}^x(|X_t - X_s| > \epsilon), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. ////

Für das folgende erinnern wir an einige Regularitätskriterien für die Pfade MARKOVscher Prozesse mit Werten in $\mathbb{R}^d$.

KOLMOGOROVS Kriterium (vgl. BAUER [5] pp. 341–342, Satz 39.1): Jeder Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$, der

$$\mathbb{E}^x(|X_s - X_t|^\alpha) \leq C\,|t-s|^{1+\beta} \qquad (s,t \geq 0) \tag{3.34}$$

für reelle Zahlen $\alpha, \beta > 0$ und eine von der Zeit unabhängige Konstante $C > 0$ genügt, hat fast sicher HÖLDER–stetige Pfade bis zur Ordnung $\frac{\beta}{\alpha}$.

DYNKIN und KINNEYS Kriterium (vgl. DYNKIN [22] 136–139, Satz 6.5 und [70]): Jeder Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$, der

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sup_{y\in B_\delta(x)} \sup_{0\leq t\leq h} \mathbb{P}^y(|X_t - y| \geq \epsilon) = 0 \tag{3.35}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, ein $\delta = \delta_x > 0$ und jedes beliebige $\epsilon > 0$ genügt, hat fast sicher stetige Pfade. Ist der Prozeß FELLERsch, so können wir (3.35) abschwächen zu

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}^x(|X_t - x| \geq \epsilon) = 0 \tag{3.36}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $\epsilon > 0$—siehe ETHIER, KURTZ p. 171, Proposition 2.9 oder auch [70].

DYNKIN ([22] p. 127, Satz 6.3): Ein Prozeß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ hat fast sicher càdlàg–Pfade, wenn

$$\lim_{h\to 0} \sup_{y\in B_\delta(x)} \sup_{0\leq t\leq h} \mathbb{P}^y(|X_t - y| \geq \epsilon) = 0 \tag{3.37}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, ein $\delta = \delta_x > 0$ und jedes beliebige $\epsilon > 0$ genügt.

Auf Grund ihrer Invarianz unter Translationen erfüllen alle LÉVY–Prozesse das Kriterium (3.37), LÉVY–Prozesse mit stetigen Pfaden (3.35) und (3.36).

Die drei oben angeführten Regularitätskriterien vererben sich auf halbseitig vergleichbare Prozesse, deren Vergleichskonstanten gleichmäßig von 0 und ∞ wegbeschränkt sind. Insbesondere erfüllen die Prozesse aus Beispiel 3.17 **(1)** diese Anforderung.

3.22 Satz. *Es seien $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0} \prec \{X_t\}_{t\geq 0}$ zwei halbseitig vergleichbare* MARKOV–*Prozesse mit Werten in $\mathbb{R}^d$.*

(1) *Erfüllt $\{X_t\}_{t\geq 0}$ das* KOLMOGOROV*sche Kriterium, und ist $k_{[0,T],\mathbb{R}^d} \geq c > 0$ für einen festen Zeitpunkt $T > 0$ und $k_{[0,n],x} \geq c_{n,x} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so genügt auch $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ diesem Kriterium.*

(2) *Erfüllt $\{X_t\}_{t\geq 0}$ das* DYNKIN–KINNEY *Kriterium, und ist $k_{[0,h],B_\delta(x)} \geq c_x > 0$ für einen festen Zeitpunkt $h > 0$, alle $x \in \mathbb{R}^d$ und nur von x abhängenden Zahlen $\delta = \delta_x > 0$, so genügt auch $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ diesem Kriterium.*

Ist zudem $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein Feller*–Prozeß, dann genügt die Forderung, daß $k_{[0,h],x} \geq c_x > 0$ für ein $h > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.*

(3) *Erfüllt $\{X_t\}_{t\geq 0}$* Dynkins *Bedingung, und ist $k_{[0,h],B_\delta(x)} \geq c_x > 0$ für einen festen Zeitpunkt $h > 0$, alle $x \in \mathbb{R}^d$ und nur von x abhängenden Zahlen $\delta = \delta_x > 0$, so genügt auch $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ dieser Bedingung.*

Ist zudem $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein Feller*–Prozeß, dann genügt die Forderung, daß $k_{[0,h],x} \geq c_x > 0$ für ein $h > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.*

Beweis. Die Beweise der Kriterien **(1)** bis **(3)** stützen sich ausnahmslos auf Korollar 3.19 (3.30) bzw. (3.32); wir greifen daher exemplarisch den Fall **(2)** heraus.

Es seien $x \in \mathbb{R}^d$, $\delta = \delta_x > 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\sup_{y\in B_\delta(x)} \sup_{0\leq t\leq h} \tilde{\mathbb{P}}^y(\tilde{X}_t \in B_\epsilon(y)^c) &\leq \sup_{y\in B_\delta(x)} \sup_{0\leq t\leq h} \Big(k_{t,y}^{-1}\, \mathbb{P}^y(X_t \in B_\epsilon(y)^c)\Big) \\
&\leq \Big(\sup_{y\in B_\delta(x)} \sup_{0\leq t\leq h} k_{t,y}^{-1}\Big) \sup_{y\in B_\delta(x)} \sup_{0\leq t\leq h} \mathbb{P}^y(X_t \in B_\epsilon(y)^c) \\
&\leq c_x^{-1} \sup_{y\in B_\delta(x)} \sup_{0\leq t\leq h} \mathbb{P}^y(X_t \in B_\epsilon(y)^c) \\
&= c_x^{-1}\, \mathrm{o}(h) \qquad \text{für } h \to 0
\end{aligned}
$$

Ist der Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ Feller–stetig, dann gilt $\lim_{y\to x} \tilde{\mathbb{E}}^y(f \circ \tilde{X}_t) = \tilde{\mathbb{E}}^x(f \circ \tilde{X}_t)$ für alle $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere konvergiert $\tilde{\mathbb{P}}^y_{\tilde{X}_t}$ für $y \to x$ vag gegen $\tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_t}$. Beachten wir noch, daß $\tilde{\mathbb{P}}^y(\tilde{X}_t \in B_\epsilon(y)^c) \leq \tilde{\mathbb{P}}^y(\tilde{X}_t \in B_{\epsilon/2}(x)^c)$ für alle $|x-y| \leq \epsilon/2$ gilt, so finden wir

$$
\begin{aligned}
\limsup_{y\to x} \tilde{\mathbb{P}}^y(\tilde{X}_t \in B_\epsilon(y)^c) &\leq \limsup_{y\to x} \tilde{\mathbb{P}}^y(\tilde{X}_t \in B_{\epsilon/2}(x)^c) \\
&\leq \tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t \in B_{\epsilon/2}(x)^c).
\end{aligned}
$$

Analog zur oben angestellten Rechnung ergibt sich somit—ggf. nach Verkleinerung von $\delta = \delta_x$—

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h} \sup_{y\in B_\delta(x)} \sup_{0\leq t\leq h} \tilde{\mathbb{P}}^y(\tilde{X}_t \in B_\epsilon(y)^c) &\leq \frac{1}{h} \sup_{0\leq t\leq h} \tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t \in B_{\epsilon/2}(x)^c) \\
&\leq \frac{1}{h} \sup_{0\leq t\leq h} \Big(k_{t,x}^{-1}\, \mathbb{P}^x(X_t \in B_{\epsilon/2}(x)^c)\Big) \\
&\leq \Big(\sup_{0\leq t\leq h} k_{t,x}^{-1}\Big) \sup_{0\leq t\leq h} \Big(\frac{1}{t}\, \mathbb{P}^x(X_t \in B_{\epsilon/2}(x)^c)\Big) \\
&= c_x^{-1} \sup_{0\leq t\leq h} \Big(\frac{1}{t}\, \mathbb{P}^x(X_t \in B_{\epsilon/2}(x)^c)\Big)
\end{aligned}
$$

Durch den Übergang zum Infimum über alle $h > 0$, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \Big(\frac{1}{h} \sup_{y\in B_\delta(x)} \sup_{0\leq t\leq h} \tilde{\mathbb{P}}^y(\tilde{X}_t \in B_\epsilon(y)^c)\Big) &\leq c_x^{-1} \limsup_{t\to 0} \Big(\frac{1}{t}\, \mathbb{P}^x(X_t \in B_{\epsilon/2}(x)^c)\Big) \\
&= c_x^{-1} \lim_{t\to 0} \Big(\frac{1}{t}\, \mathbb{P}^x(X_t \in B_{\epsilon/2}(x)^c)\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

was den Beweis von **(2)** beschließt. ////

Im vorausgehenden Abschnitt 3.1 zeigten wir ein Reflexionsprinzip für (symmetrische) LÉVY–Prozesse; damit vergleichbare stark MARKOVsche Prozesse genügen ebenso diesem Prinzip. Man beachte, daß auf Grund von Satz 3.22 **(2)** diese Prozesse fast sicher càdlàg–Pfade besitzen.

3.23 Satz. *Es seien* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *ein symmetrischer* LÉVY*–Prozeß mit Werten in* $\mathbb{R}$ *und* $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *ein damit vergleichbarer stark* MARKOV*scher Prozeß. Für jedes* $a \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\tilde{\mathbb{P}}^x(\sup_{s\leq t}(\tilde{X}_s - x) > a) \leq (C'+1)\,\tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t - x \geq a) \qquad (t \geq 0), \tag{3.38}$$

wobei die Konstante C' *durch*

$$C' := \sup\left\{\frac{K\big(t-\tau^x_{(a,\infty)}(\omega), \tilde{X}(\tau^x_{(a,\infty)}(\omega),\omega)\big)}{k\big(t-\tau^x_{(a,\infty)}(\omega), \tilde{X}(\tau^x_{(a,\infty)}(\omega),\omega)\big)} : \omega \in \{\tau^x_{(a,\infty)} < t\}\right\} \leq \frac{K_{[0,t],\mathbb{R}^d}}{k_{[0,t],\mathbb{R}^d}} \tag{3.39}$$

gegeben und $\tau^x_{(a,\infty)} := \inf\{t : \tilde{X}_t - x > a\}$ *ist.*

Beweis. Analog zum Beweis von Korollar 3.5 setzen wir $I := (-\infty, a+x]$, $I^{a+x} = [a+x, \infty)$ und $\tau^x := \tau^x_{(a,\infty)} = \tau_{(a+x,\infty)}$.

Aus der Vergleichbarkeit der Prozesse erhalten wir mit Lemma 3.1 für alle $s \geq 0$ und alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq a+x$

$$k_{s,y}\,\tilde{\mathbb{P}}^y(\tilde{X}_s \in I) \leq \mathbb{P}^y(X_s \in I) \leq \mathbb{P}^y(X_s \in I^{a+x}) \leq K_{s,y}\,\tilde{\mathbb{P}}^y(\tilde{X}_s \in I^{a+x}).$$

Wir wählen $s = t - \tau^x(\omega)$ und $y = \tilde{X}_{\tau^x}(\omega)$ für $\omega \in \{\tau^x < t\}$ und finden

$$\tilde{\mathbb{P}}^{\tilde{X}_{\tau^x}(\omega)}(\tilde{X}_{t-\tau^x(\omega)} \in I) \leq \frac{K\big(t-\tau^x(\omega), \tilde{X}_{\tau^x}(\omega)\big)}{k\big(t-\tau^x(\omega), \tilde{X}_{\tau^x}(\omega)\big)}\,\tilde{\mathbb{P}}^{\tilde{X}_{\tau^x}(\omega)}(\tilde{X}_{t-\tau^x(\omega)} \in I^{a+x}).$$

Eine ähnliche Überlegung wie im Beweis von Satz 3.2 ergibt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t \in I, \sup_{s\leq t}(\tilde{X}_s - x) > a) &\leq \int_{\{\tau^x<t\}} \tilde{\mathbb{P}}^{\tilde{X}_{\tau^x}(\omega)}(\tilde{X}_{t-\tau^x(\omega)} \in I)\,\tilde{\mathbb{P}}^x(d\omega) \\
&\leq C' \int_{\{\tau^x<t\}} \tilde{\mathbb{P}}^{\tilde{X}_{\tau^x}(\omega)}(\tilde{X}_{t-\tau^x(\omega)} \in I^{a+x})\,\tilde{\mathbb{P}}^x(d\omega) \\
&\leq C'\,\tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t \in I^{a+x}, \sup_{s\leq t}(\tilde{X}_s - x) \geq a) \\
&= C'\,\tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t \in I^{a+x}),
\end{aligned}$$

wobei C' die durch (3.39) gegebene Konstante ist. Schließlich sieht man wie im Beweis von Satz 3.2 (z. B. in (3.4))

$$\tilde{\mathbb{P}}^x(\sup_{s\leq t}\tilde{X}_s > a+x) \leq (C'+1)\,\tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t \geq a+x),$$

was die Behauptung beweist. ////

Wie schon im Abschnitt 3.2 ergeben sich aus dem Reflexionsprinzip eine Reihe von Folgerungen.

3.24 Korollar. *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ wie in Satz 3.23. Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\tilde{\mathbb{P}}^x(\sup_{s\leq t} |\tilde{X}_s - x| > a) \leq (C' + 1)\, \tilde{\mathbb{P}}^x(|\tilde{X}_t - x| \geq a) \qquad (t \geq 0), \tag{3.40}$$

wobei C' die Konstante (3.39) *ist.*

Beweis. Da mit $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ auch der Prozeß $\{-\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ mit $\{-X_t\}_{t\geq 0}$ vergleichbar ist, zeigt eine offensichtliche Modifikation von Satz 3.23, daß einerseits

$$\tilde{\mathbb{P}}^x(\sup_{s\leq t} \tilde{X}_s > a + x) \leq (C' + 1)\, \tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{X}_t \geq a + x)$$

und andererseits

$$\tilde{\mathbb{P}}^x(\sup_{s\leq t}(-\tilde{X}_s) > a - x) \leq (C' + 1)\, \tilde{\mathbb{P}}^x(-\tilde{X}_t \geq a - x)$$

gilt. Die Behauptung folgt nun mit dem Argument aus dem Beweis von Korollar 3.6. ////

3.25 Korollar. *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ wie in Satz 3.23. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\tilde{\mathbb{P}}^x(\sup_{r\leq s\leq t} |\tilde{X}_s - \tilde{X}_r| > a) \leq (C'_r + 1)\, \tilde{\mathbb{P}}^x(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_r| \geq a) \qquad (t \geq r \geq 0), \tag{3.41}$$

wobei C'_r das Analogon zur Konstanten (3.39) *bezüglich der Vergleichskonstanten $k^r_{t,x} = k_{r,x}k_{t,\mathbb{R}}$ und $K^r_{t,x} = K_{r,x}K_{t,\mathbb{R}}$ ist.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem des Korollars 3.7: $\{X_t\}_{t\geq 0} \sim \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ impliziert $\{X_{r+t} - X_r\}_{t\geq 0} \sim \{\tilde{X}_{r+t} - \tilde{X}_r\}_{t\geq 0}$ für jede Wahl von $h \geq 0$ mit den im Satz angegebenen Vergleichskonstanten $k^r_{t,x}$ und $K^r_{t,x}$, vgl. auch die Bemerkung nach Korollar 3.19. ////

3.26 Korollar. *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein symmetrischer* LÉVY*–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein damit vergleichbarer stark* MARKOV*scher Prozeß. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\tilde{\mathbb{P}}^x\Big(\sup_{r\leq s\leq t} |\tilde{X}_s - \tilde{X}_r| > a\Big) \leq d(C'_r + 1)\, \tilde{\mathbb{P}}^x\left(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_r| \geq \frac{a}{d}\right) \qquad (t \geq r \geq 0), \tag{3.42}$$

wobei C'_r die Konstante aus Korollar 3.25 ist. Insbesondere ist

$$\tilde{\mathbb{E}}^x\Big(\sup_{r\leq s\leq t} (|\tilde{X}_s - \tilde{X}_r|^\lambda)\Big) \leq d^{1+\lambda}(C'_r + 1)\, \tilde{\mathbb{E}}^x\Big(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_r|^\lambda\Big) \qquad (t \geq r \geq 0) \tag{3.43}$$

für alle $\lambda \geq 0$.

3.27 Bemerkung. Die Aussage von Satz 3.23 kann in der vorliegenden Form noch nicht für unser Standardbeispiel 3.17 verwendet werden, da der Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ mit zwei *verschiedenen* Prozessen, $\{\underline{X}_t\}_{t\geq 0}$, $\{\overline{X}_t\}_{t\geq 0}$ verglichen wird.

Beachten wir jedoch, daß $\underline{X}_{\frac{C}{c}t} = \overline{X}_t$ für alle $t \geq 0$ gilt—die Konstanten C, c und K, k sind dieselben wie in Beispiel 3.17—, so finden wir für alle $y \geq a+x$ und $s \geq 0$ (o. E. dürfen wir $d = 1$ annehmen)

$$\begin{aligned}
k\,\tilde{\mathbb{P}}^y\big(\tilde{X}_s \in (-\infty, a+x]\big) &\leq \mathbb{P}^y\big(\overline{X}_s \in (-\infty, a+x]\big)\\
&\leq \mathbb{P}^y\big(\overline{X}_s \in [a+x, \infty)\big)\\
&= \mathbb{P}^y\big(\underline{X}_{\frac{C}{c}s} \in [a+x, \infty)\big)\\
&= \sqrt{\frac{c}{C}}\int_{a+x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{cs\pi}} \exp\left(-\frac{|y-z|^2}{(C/c)\,cs}\right) dz\\
&= \int_{\sqrt{c/C}\,(a+x-y)+y}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{cs\pi}} \exp\left(-\frac{|y-z|^2}{cs}\right) dz\\
&\leq \int_{a+x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{cs\pi}} \exp\left(-\frac{|y-z|^2}{cs}\right) dz\\
&= \mathbb{P}^y\big(\underline{X}_s \in [a+x, \infty)\big)\\
&\leq K\,\tilde{\mathbb{P}}^y\big(\tilde{X}_s \in [a+x, \infty)\big).
\end{aligned}$$

Da das gerade die Stelle im Beweis von Satz 3.23 ist, wo die beidseitige Vergleichbarkeit benutzt wurde, erhalten wir das Reflexionsprinzip (3.38) auch für unser Standardbeispiel.

Die soeben angestellte Rechnung zeigt insbesondere, daß

$$\mathbb{P}^y\big(\overline{X}_s \in (-\infty, a+x]\big) \leq \mathbb{P}^y\big(\underline{X}_s \in [a+x, \infty)\big)$$

gilt. Aus Satz 2.18 bzw. Lemma 2.19 folgt dann für einen beliebigen Subordinator $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ mit Bernstein–Funktion f

$$\mathbb{P}^y\big(\overline{X}^f_s \in (-\infty, a+x]\big) \leq \mathbb{P}^y\big(\underline{X}^f_s \in [a+x, \infty)\big)$$

Da aus der halbseitigen Vergleichbarkeit von $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ mit $\{\overline{X}_t\}_{t\geq 0}$ bzw. $\{\underline{X}_t\}_{t\geq 0}$ auch die der subordinierten Prozesse folgt, vgl. Beispiel 3.17 (3.26) und (3.27), erhalten wir wie oben das Reflexionsprinzip (3.38) für die Prozesse, die durch Subordination aus unserem Standardbeispiel hervorgehen.

Betrachten wir abschließend den nicht–symmetrischen Fall. Im Gegensatz zu den bisherigen Ausführungen zum Reflexionsprinzip sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ nun ein beliebiger reeller Lévy–Prozeß und $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein damit vergleichbarer, stark Markovscher und—a fortiori—càdlàg–Prozeß. Mit $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ und $\{\tilde{Y}_t\}_{t\geq 0}$ bezeichnen wir von den oben genannten Prozessen unabhängige Prozesse, die jedoch dieselben endlich–dimensionalen Verteilungen wie $\{X_t\}_{t\geq 0}$ bzw. $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ haben.

Die symmetrisierten Prozesse $\{X_t - Y_t\}_{t\geq 0}$ und $\{\tilde{X}_t - \tilde{Y}_t\}_{t\geq 0}$ sind dann wiederum vergleichbar, und die Vergleichskonstanten berechnen sich aus

$$\tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_t - \tilde{Y}_t} = \tilde{\mathbb{P}}^x_{\tilde{X}_t} \star \tilde{\mathbb{P}}^x_{-\tilde{Y}_t} \leq k^{-1}_{t,x} k^{-1}_{t,x}\, \mathbb{P}^x_{X_t} \star \mathbb{P}^x_{-Y_t} = k^{-1}_{t,x}\, \mathbb{P}^x_{X_t - Y_t}.$$

Satz 3.10—die Translationsinvarianz in der Voraussetzung wurde lediglich für das Reflexionsprinzip benötigt—und die Version 3.23 des Reflexionsprinzips zeigen daher

$$\tilde{\mathbb{P}}^x\big(\sup_{0\leq s\leq t} |\tilde{X}_s - y| \geq a + b\big) \leq 2(C'^2 + 1)\, \frac{\tilde{\mathbb{P}}^x\big(\sup_{0\leq s\leq t} |\tilde{X}_s - z| \geq a/2\big)}{\tilde{\mathbb{P}}^x\big(\sup_{0\leq s\leq t} |\tilde{X}_s - y| \leq b\big)}$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ und $t \geq 0$ mit der Konstanten C' aus (3.39).

Wegen der Vergleichbarkeit der Prozesse ist $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ mit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ räumlich und zeitlich gleichmäßig stochastisch stetig (vgl. den Beweis von Satz 3.21), und es gelten nach Lemma 3.9 die Entsprechungen von (3.12) und (3.22) (Notation siehe dort).

3.28 Satz. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* Lévy*–Prozeß und $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0} \sim \{X_t\}_{t\geq 0}$ ein damit vergleichbarer stark* Markov*scher Prozeß. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle $a, b \geq 0$*

$$\tilde{\mathbb{P}}^x\big(\sup_{0\leq s\leq t} |\tilde{X}_s - x| \geq a + b\big) \leq \frac{2(C'^2 + 1)}{1 - 2\delta}\, \tilde{\mathbb{P}}^x\Big(|\tilde{X}_t - x| \geq \frac{a}{2d}\Big) \quad (T \geq t \geq 0), \tag{3.44}$$

wobei $T = T(b, k(\cdot,\cdot), K(\cdot,\cdot)) > 0$ wie in Korollar 3.11 gewählt und C' die Konstante (3.39) ist. Für kurze Zeitspannen $t - r \leq T$, $T = T(b, k(\cdot,\cdot), K(\cdot,\cdot)) > 0$, und alle $\lambda \geq 0$ gilt

$$\tilde{\mathbb{E}}^x\left(\sup_{r\leq s\leq t} |\tilde{X}_s - \tilde{X}_r|^\lambda\right) \leq \frac{(4d)^{1+\lambda}(C'^2_r + 1)}{1 - 2\delta}\, \tilde{\mathbb{E}}^x\left(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_r|^\lambda\right) + b \quad (t \geq r \geq 0), \tag{3.45}$$

mit der C' entsprechenden Konstanten C'_r aus Korollar 3.25.

Kapitel 4

Pfadeigenschaften vergleichbarer Prozesse: Variation und Hausdorffsche Dimension

In diesem Kapitel zeigen wir, daß einige für LÉVYsche Prozesse bekannte Eigenschaften der Pfade auch für MARKOV–Prozesse gelten, die im Sinne von Definition 3.16 mit LÉVY–Prozessen vergleichbar sind. Die von uns getroffene Auswahl der Themen kann—und will auch nicht—umfassend sein. Einen Überblick über Breite und Variationen des Themas *Pfadeigenschaften von* LÉVY*–Prozessen* bieten die Übersichtsartikel von FRISTEDT [25] und TAYLOR [74].

Unsere Beweise knüpfen an Ideen aus Arbeiten über das Pfadverhalten von LÉVY–Prozessen aus den späten vierziger bis zu den frühen siebziger Jahren an: allen voran seien die grundlegenden Arbeiten von BOCHNER [12] (1947), MCKEAN (JR.) [55] (1955) und BLUMENTHAL und GETOOR [8], [9], [10] (1960/61) erinnert.

Keinesfalls von geringerer Bedeutung sind—wegen des originären Charakters der dort verwendeten Methoden—die Arbeiten von HAWKES [32], [33] und HAWKES und PRUITT [35]. Die Beweise für die dort erzielten gleichmäßigen—und damit optimalen—Abschätzungen für die HAUSDORFF–Dimension der Pfade stützen sich wesentlich auf strukturelle Besonderheiten LÉVYscher Prozesse, so z. B. die Unabhängigkeit der Zuwächse und damit verbundene Konsequenzen für erste Eintrittszeiten. Weil wir im Augenblick über kein Äquivalent derartiger Strukturen bei vergleichbaren Prozessen verfügen, müssen wir auf eine Verbesserung unserer Ergebnisse im Sinne von HAWKES verzichten.

Da jeder LÉVY–Prozeß mit sich selbst vergleichbar ist—die Vergleichskonstanten sind in diesem Fall $k_{x,t} = K_{x,t} = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \geq 0$—, gelten alle unten aufgeführten Ergebnisse insbesondere für diese Klasse von Prozessen. Wenn daher die hier gezeigten Resultate nicht von den für LÉVY–Prozesse bekannten Ergebnissen abweichen, erwähnen wir diese nicht gesondert.

Literaturangaben beziehen sich stets auf den LÉVY–Fall.

4.1 Die Variation vergleichbarer Prozesse

Es seien $I \subset [0,\infty)$ ein Zeitintervall und Π eine *Partition* des Intervalls I, d. h. $\Pi = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_n\} \subset I$, $n \in \mathbb{N}$. Für eine auf I erklärte Funktion f mit Werten in $\mathbb{R}^d$ bezeichne

$$\mathrm{var}_\lambda(f,\Pi,I) := \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^\lambda$$

die Variationssumme zur Partition Π mit dem Exponenten $\lambda > 0$.

Als *Feinheit* der Partition Π bezeichnen wir $\max_{1\le j\le n}\{t_j - t_{j-1}\}$.

Wir sagen, daß eine Familie $\mathcal{P}$ von Partitionen des Intervalls I *dicht* in I ist, wenn die Familie der Feinheiten der Elemente in $\mathcal{P}$ *gegen* 0 *absteigen*. Stets seien die Elemente in $\mathcal{P}$ durch ihre Feinheiten angeordnet.

4.1 Definition. Es seien $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion, $I \subset [0,\infty)$ ein Intervall und $\mathcal{P}$ eine Familie von Partitionen, die dicht in I ist. Für $\lambda > 0$ ist die *untere* bzw. *obere* λ*–Variation* von f auf I durch

$$\underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(f,I) := \liminf_{\Pi\in\mathcal{P}} \mathrm{var}_\lambda(f,\Pi,I).$$

bzw. durch

$$\overline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(f,I) := \limsup_{\Pi\in\mathcal{P}} \mathrm{var}_\lambda(f,\Pi,I).$$

erklärt. Stimmen $\underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(f,I)$ und $\overline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(f,I)$ überein, so sprechen wir von der λ*–Variation* und schreiben dafür $\mathrm{var}_{\lambda,\mathcal{P}}(f,I)$. Die *starke* λ*–Variation* $\mathrm{VAR}_\lambda(f,I)$ ist das Supremum über *alle* möglichen Partitionen von I.

Offensichtlich gilt

$$0 \le \underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(f,I) \le \overline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(f,I) \le \mathrm{VAR}_\lambda(f,I) \le \infty \tag{4.1}$$

für jede Familie von Partitionen $\mathcal{P}$ eines Intervalls I und alle $\lambda > 0$.

Im folgenden werden wir die Frage nach der Endlichkeit der (starken) λ–Variation von stochastischen Prozessen untersuchen, die mit Lévy–Prozessen vergleichbar sind. *Dabei bezeichnet* $\{X_t\}_{t\ge 0}$ *stets einen* Lévy*–Prozeß.*

Ist $\{Y_t, \mathfrak{G}_t\}_{t\ge0}$ ein beliebiger stochastischer Prozeß, so ist i. allg. weder die untere noch die obere noch die starke λ–Variation eines Pfades

$$\omega \mapsto \underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(Y(\cdot,\omega),I), \quad \omega \mapsto \overline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(Y(\cdot,\omega),I) \quad \text{bzw.} \quad \omega \mapsto \mathrm{VAR}_\lambda(Y(\cdot,\omega),I)$$

eine meßbare Funktion in ω. Im Falle halbseitig stetiger Prozesse, also insbesondere bei càdlàg–Prozessen, können wir uns jedoch auf Partitionen mit Stützstellen in $I\cap\mathbb{Q}$ beschränken, und daher die Variation als $\mathfrak{G}_I := \sigma\left(\bigcup_{t\in I}\mathfrak{G}_t\right)$–meßbare Zufallsvariable betrachten.

Die Variation der Pfade von reellwertigen Lévy–Prozessen wurde bereits 1947 von Bochner [12] pp. 1031–1037, Section 7, Section 8, insbesondere pp. 1035–1036, Theorem 14, vgl. auch [13] pp. 127–133, Section 5.3, studiert. In einer Reihe nachfolgender Arbeiten verschiedener Autoren, wurden immer wieder BOCHNERS Beweisideen aufgegriffen, verallgemeinert und variiert. MCKEAN [55] p. 568, Theorem (3.3) betrachtete die starke λ–Variation eindimensionaler (symmetrisch) stabiler Prozesse, BLUMENTHAL und GETOOR die mehrdimensionaler symmetrisch stabiler Prozesse [8] p. 269, Theorem 4.1 und, mit der Einschränkung $\lambda < 1$, die einer großen Klasse von LÉVY–Prozessen [10] p. 499, Theorem 4.1 und 4.2. Den noch verbleibenden Fall behandelten MILLAR [57] p. 59, Theorem 3.1 für die λ–Variation, und für die starke λ–Variation MONROE [58] p. 1218, Theorem 2. Weiterhin sei noch auf die Arbeit von GREENWOOD [27] hingewiesen, wo Konvergenzeigenschaften von λ–Variationen stabiler Prozesse behandelt werden.

4.2 Satz. (Vgl. [10] p. 499, Theorem 4.1) *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein* LÉVY*–Prozeß mit Index $0 < \beta \leq 2$ und charakteristischem Exponenten a. Ferner sei $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein damit einseitig vergleichbarer Prozeß mit $\{X_t\}_{t\geq 0} \succ \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$. Dann gilt*

$$\operatorname{var}_{\lambda,\mathcal{P}}(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) = \operatorname{VAR}_\lambda(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) = \infty \qquad (\tilde{\mathbb{P}}^x\text{-f. s.}) \tag{4.2}$$

für alle $0 < \lambda < \beta$, $x \in \mathbb{R}^d$ und jede Familie $\mathcal{P}$ äquidistanter Partitionen von $[0,1]$.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Nachweis von $\operatorname{VAR}_\lambda(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) = \infty$. Aus unserem Beweis folgt dann unmittelbar die Behauptung für die λ–Variation.

Wie wir oben bemerkt haben, können wir $\operatorname{VAR}_\lambda$ als meßbar voraussetzen. Für die äquidistante Partition $\Pi_n := \{0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,\pi_n} = 1\}$ mit Feinheit δ_n, $\delta_n := {\pi_n}^{-1}$, finden wir mit der verallgemeinerten HÖLDERschen Ungleichung $\|f_1 \cdot \ldots \cdot f_{\pi_n}\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{1/\delta_n}} \cdot \ldots \cdot \|f_{\pi_n}\|_{L^{1/\delta_n}}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}^x\Big(\exp\Big(-\operatorname{VAR}_\lambda(\tilde{X},[0,1])\Big)\Big) &\leq \tilde{\mathbb{E}}^x\left(\exp\left(-\sum_{j=1}^{\pi_n}|\tilde{X}(t_{n,j})-\tilde{X}(t_{n,j-1})|^\lambda\right)\right)\\
&= \tilde{\mathbb{E}}^x\left(\prod_{j=1}^{\pi_n}\Big[\exp\Big(-\pi_n|\tilde{X}(t_{n,j})-\tilde{X}(t_{n,j-1})|^\lambda\Big)\Big]^{\delta_n}\right)\\
&\leq \prod_{j=1}^{\pi_n}\Big[\tilde{\mathbb{E}}^x\Big(\exp\Big(-\pi_n|\tilde{X}(t_{n,j})-\tilde{X}(t_{n,j-1})|^\lambda\Big)\Big)\Big]^{\delta_n}.
\end{aligned}$$

Wir schätzen nun jeden Faktor mit Hilfe von (3.32) ab und verwenden die Tatsache, daß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ stationäre Zuwächse hat:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}}^x\left(\exp\left(-\sum_{j=1}^{\pi_n}|\tilde{X}(t_{n,j})-\tilde{X}(t_{n,j-1})|^\lambda\right)\right) \leq\\
&\leq \prod_{j=1}^{\pi_n}\left[\frac{1}{k(t_{n,j},x)\,k(\delta_n,\mathbb{R}^d)}\mathbb{E}^x\Big(\exp\Big(-\pi_n|X(t_{n,j})-X(t_{n,j-1})|^\lambda\Big)\Big)\right]^{\delta_n}\\
&\leq \frac{1}{k([0,1],x)\,k(\delta_n,\mathbb{R}^d)}\prod_{j=1}^{\pi_n}\Big[\mathbb{E}^x\Big(\exp\Big(-\pi_n|X(\delta_n)-X(0)|^\lambda\Big)\Big)\Big]^{\delta_n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k([0,1],x)\,k(\delta_n,\mathbb{R}^d)}\,\mathbb{E}^x\Big(\exp\Big(-\pi_n|X(\delta_n)-X(0)|^\lambda\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{k([0,1],x)\,k(\delta_n,\mathbb{R}^d)}\,\mathbb{E}^0\left(\exp\left(-\left[|X(\delta_n)|\,{\delta_n}^{-\frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda\right)\right),
\end{aligned}
$$

wobei wir die Translationsinvarianz des Prozesses $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ausnutzten. Blumenthal und Getoor haben in [10] p. 498, Theorem 3.3

$$
\limsup_{t\to 0} t^{-\frac{1}{\lambda}}|X(t)| = \infty \qquad (\mathbb{P}^0\text{-f. s.})
$$

für alle $\lambda < \beta$ gezeigt. Ihr Beweis zeigt sogar die Existenz einer Nullfolge $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $\mathbb{P}^0$–fast sicher $\liminf_{n\to\infty} \delta_n^{-\frac{1}{\lambda}}|X(\delta_n)| = \infty$ gilt. Zusammen erhalten wir

$$
\lim_{t\to 0} t^{-\frac{1}{\lambda}}|X(t)| = \infty \qquad (\mathbb{P}^0\text{-f. s.}).
$$

Wir wählen nun eine derartige Folge als Folge der Feinheiten unserer Partitionen. Aus dem Lemma von Fatou folgt schließlich

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}^0\left(\exp\left(-\left[|X(\delta_n)|\,{\delta_n}^{-\frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda\right)\right) \leq\\
&\leq \mathbb{E}^0\left(\limsup_{n\to\infty}\exp\left(-\left[|X(\delta_n)|\,{\delta_n}^{-\frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda\right)\right)\\
&= \mathbb{E}^0\left(\exp\left(-\left[\lim_{n\to\infty}|X(\delta_n)|\,{\delta_n}^{-\frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda\right)\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

und daraus die Behauptung. ////

4.3 Bemerkung. Das soeben gezeigte Resultat gilt für symmetrisch β–stabile Prozesse auch, wenn $\lambda = \beta$ ist, vgl. Blumenthal, Getoor [8] p. 269, Theorem 4.1. Wegen der etwas gröberen Abschätzung mit der Hölderschen Ungleichung müssen wir den Fall $\lambda = \beta$ für vergleichbare Prozesse offen lassen.

Für beliebige, nicht symmetrisch stabile Lévy–Prozesse mit Index β ist die Frage nach dem Verhalten der Variation im Falle $\lambda = \beta$ noch offen.

4.4 Satz. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein Lévy–Prozeß mit Index $0 < \beta < 2$ und charakteristischem Exponenten a. Ferner sei $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein damit einseitig vergleichbarer Prozeß mit $\{X_t\}_{t\geq 0} \succ \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ und*

$$
\liminf_{n\to\infty} k(\delta_n,\mathbb{R}^d)^{-\frac{1}{\delta_n}} < \infty \qquad \textit{für eine Nullfolge } \{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,.
$$

Dann gilt

$$
\mathrm{VAR}_\lambda(J^{\tilde{X}}(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty \qquad (\tilde{\mathbb{P}}^x\text{-f. s.}) \tag{4.3}
$$

für alle $\lambda > \beta$, wobei wir $J_t^{\tilde{X}} := \tilde{X}_t - \tilde{X}_{t-}$ setzen.

Insbesondere ist dann

$$\underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(J^{\tilde{X}}(\cdot,\omega),[0,1]) \le \overline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(J^{\tilde{X}}(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty \qquad (\tilde{\mathbb{P}}^x\text{-}f.\,s.) \tag{4.4}$$

für alle $\lambda > \beta$ und jede Familie $\mathcal{P}$ von Partitionen des Intervalls $[0,1]$.

4.5 Bemerkung. Die Aussage von Satz 4.4 ist von besonderem Interesse für Lévy–Prozesse ohne Gausssche Komponente und mit einem Lévy-Maß ν, das

$$\int_{\{0<|y|\le 1\}} |y|\,\nu(dy) < \infty$$

erfüllt. Legen wir die Definition der Indices, Definition 1.19 (1.22), zugrunde, sind das gerade die Prozesse mit $\beta < 1$. In diesem Fall vereinfacht sich nämlich Itôs Darstellung (1.14) des Prozesses zu

$$X(t,\omega) = \left(\ell - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y}{1+|y|^2}\,\nu(dy)\right)t + \sum_{s\le t} J^X(s,\omega) \qquad (t \ge 0),$$

vgl. Fristedt [25] pp. 259–260. In diesem Fall finden wir dann, daß

$$\mathrm{VAR}_\lambda(J^X(\cdot,\omega),[0,1]) = \mathrm{VAR}_\lambda(\Sigma J^X(\cdot,\omega),[0,1])$$

mit $\Sigma J_t^X := \sum_{s\le t} J_t^X$ gilt, und wir erhalten aus Satz 4.4 bereits Informationen über die Variation des Prozesses selbst.

Beweis von Satz 4.4. Die Ungleichungen (4.4) folgen mit Hilfe von (4.1) sofort aus (4.3). Offenbar gilt

$$\mathrm{VAR}_\lambda(J^{\tilde{X}}(\cdot,\omega),[0,1]) = \sum_{t\le 1} |J^{\tilde{X}}(t,\omega)|^\lambda \qquad (\tilde{\mathbb{P}}^x\text{-f. s.}).$$

Da der Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$ o. B. d. A. ausschließlich càdlàg–Pfade besitzt, hat jeder Pfad auf dem Intervall $[0,1]$ höchstens endlich viele Sprünge, die größer als $\epsilon > 0$ sind. Die dazu korrespondierenden Sprungzeiten bezeichnen wir mit $\tau_1(\omega) < \ldots < \tau_N(\omega)$, wo $N = N(\omega) \in \mathbb{N}$ ist. Wählen wir eine Folge äquidistanter Partitionen $\Pi_n := \{0 \le t_{n,1} < \ldots < t_{n,\pi_n} \le 1\}$, die in $[0,1]$ dicht ist, so gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ $\tau_j(\omega) \in (t_{n,k_j}, t_{n,k_j+1}]$ bzw. $\tau_1(\omega) \in [0, t_{n,k_1}]$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{s\le 1;|J_s^{\tilde{X}}|>\epsilon} |J_s^{\tilde{X}}(\omega)|^\lambda &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \liminf_{n\to\infty} |\tilde{X}_{t_{n,k_j+1}}(\omega) - \tilde{X}_{t_{n,k_j}}(\omega)|^\lambda \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N(\omega)} |\tilde{X}_{t_{n,k_j+1}}(\omega) - \tilde{X}_{t_{n,k_j}}(\omega)|^\lambda \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{var}_\lambda(\tilde{X}(\cdot,\omega),\Pi_n,[0,1]).
\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist unabhängig von ϵ. Da für jede Wahl von $M > 0$

$$\left\{\omega : \liminf_{n\to\infty} \mathrm{var}_\lambda(\tilde{X}(\cdot,\omega), \Pi_n, [0,1]) = \infty\right\} \subset \liminf_{n\to\infty} \left\{\omega : \mathrm{var}_\lambda(\tilde{X}(\cdot,\omega), \Pi_n, [0,1]) \geq M\right\}$$

gilt, finden wir mit dem Lemma von FATOU

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}^x\left(\sum_{s\leq 1} |J_s^{\tilde{X}}|^\lambda = \infty\right) &\leq \tilde{\mathbb{P}}^x\left(\liminf_{n\to\infty} \mathrm{var}_\lambda(\tilde{X}, \Pi_n, [0,1]) = \infty\right) \\
&\leq \tilde{\mathbb{P}}^x\left(\liminf_{n\to\infty} \left\{\mathrm{var}_\lambda(\tilde{X}, \Pi_n, [0,1]) \geq M\right\}\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}^x\left(\mathrm{var}_\lambda(\tilde{X}, \Pi_n, [0,1]) \geq M\right).
\end{aligned}$$

Wir wählen nun die Folge der Feinheiten der Partitionen $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wo $\delta_n = \pi_n^{-1}$ ist, wie in der Voraussetzung des Satzes. Mit Hilfe von Ungleichung (3.28) sehen wir dann

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{P}}^x\left(\sum_{s\leq 1} |J_s^{\tilde{X}}|^\lambda = \infty\right) \leq \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \left(k(\pi_n^{-1}, \mathbb{R}^d)^{-\pi_n}\, \mathbb{P}^x\left(\mathrm{var}_\lambda(X, \Pi_n, [0,1]) \geq M\right)\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} k(\pi_n^{-1}, \mathbb{R}^d)^{-\pi_n} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^x\left(\mathrm{var}_\lambda(X, \Pi_n, [0,1]) \geq M\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} k(\pi_n^{-1}, \mathbb{R}^d)^{-\pi_n}\, \mathbb{P}^x\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{\mathrm{var}_\lambda(X, \Pi_n, [0,1]) \geq M\right\}\right),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung wiederum das FATOUsche Lemma verwendete. Beachten wir noch, daß einerseits

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{\omega : \mathrm{var}_\lambda(X(\cdot,\omega), \Pi_n, [0,1]) \geq M\right\} \subset \left\{\omega : \limsup_{n\to\infty} \mathrm{var}_\lambda(X(\cdot,\omega), \Pi_n, [0,1]) \geq M\right\}$$

gilt und andererseits für $\lambda > \beta$ die Folge der Variationssummen $\mathrm{var}_\lambda(X, \Pi_n, [0,1])$ in Wahrscheinlichkeit gegen einen *endlichen* Grenzwert konvergiert—siehe MILLAR [57] p. 62, Theorem 3.2 in Verbindung mit Theorem 3.3—, so folgt

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{P}}^x\left(\sum_{s\leq 1} |J_s^{\tilde{X}}|^\lambda = \infty\right) \leq \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} k(\pi_n^{-1}, \mathbb{R}^d)^{-\pi_n}\, \mathbb{P}^x\left(\limsup_{n\to\infty} \mathrm{var}_\lambda(X, \Pi_n, [0,1]) \geq M\right) \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

für $M \to \infty$. ////

4.6 Satz. (Vgl. [8] p. 269, Theorem 4.1) *Es sei* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *ein symmetrisch stabiler* LÉVY*–Prozeß mit Index* $0 < \beta < 1$ *und charakteristischem Exponenten* a*. Ferner sei* $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *ein damit einseitig vergleichbarer Prozeß mit* $\{X_t\}_{t\geq 0} \succ \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *und*

$$\liminf_{n\to\infty} k(\delta_n, \mathbb{R}^d)^{-\frac{1}{\delta_n}} < \infty \qquad \textit{für eine Nullfolge } \{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dann gelten

$$\mathrm{VAR}_\lambda(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty \qquad (\tilde{\mathbb{P}}^x\text{-}f.\,s.) \tag{4.5}$$

und

$$\underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) \leq \overline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty \qquad (\tilde{\mathbb{P}}^x\text{-}f.\,s.) \tag{4.6}$$

für alle $\beta < \lambda < 1$*,* $x \in \mathbb{R}^d$ *und jede Familie von Partitionen* $\mathcal{P}$ *des Intervalls* $[0,1]$*.*

Beweis. Wegen (4.1) folgt (4.6), sobald (4.5) bewiesen ist.

Die grundlegende Idee zum Nachweis von (4.5) ist, den Beweis mit Hilfe von Subordination auf den Fall einer BROWNsche Bewegung zurückzuführen. Sei dazu $\{B_t\}_{t\geq 0}$ eine BROWNsche Bewegung, also ein symmetrisch stabiler Prozeß mit Index 2, und $\{S_t\}_{t\geq 0}$ ein einseitig stabiler Subordinator mit Index $\frac{\beta}{2}$. Dann ist auch der Prozeß

$$Y(t,\omega) := B(S(t,\omega),\omega) \qquad (t \geq 0, \omega \in \Omega)$$

ein symmetrisch stabiler LÉVY–Prozeß mit Index β, vgl. FELLER [24] p. 336, Example (c). Wir können daher die Prozesse $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ identifizieren. Die Pfade einer BROWNschen Bewegung $\{B_t\}_{t\geq 0}$ sind fast sicher HÖLDER–stetig für alle Exponenten $\eta < \frac{1}{2}$. Genauer gilt, vgl. BAUER [5] p. 344, Satz 39.4 in Verbindung mit p. 351, Satz 40.5,

$$|B(t,\omega) - B(s,\omega)| \leq C|t-s|^\eta \qquad (\mathbb{P}^x\text{-f. s.})$$

für alle $\eta < \frac{1}{2}$, alle Startpunkte $x \in \mathbb{R}^d$, alle $s,t \in [0,T]$ mit $|t-s| < \delta(\omega)$ und mit einer geeigneten, nur von η abhängenden Konstanten C.

Wir dürfen nach Übergang zu einer Menge $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) \leq \epsilon$

$$\delta(\omega) > \delta > 0 \qquad (\omega \in \Omega_\epsilon)$$

für ein hinreichend kleines δ annehemen, wie der Beweis von Satz 39.3 bei BAUER [5] p. 341, Formel (39.3) zeigt.

LÉVY–Prozesse sind fast sicher beschränkt auf beschränkten Zeitintervallen. Daher gibt es ein $\Omega_{2\epsilon} \subset \Omega_\epsilon$ mit $\mathbb{P}^x(\Omega \setminus \Omega_{2\epsilon}) \leq 2\epsilon$, so daß für geeignete Konstanten $K, L > 0$

$$S(1,\omega) \leq K \qquad (\omega \in \Omega_{2\epsilon})$$

und

$$\sup_{t\leq K} |B(t,\omega)| \leq L \qquad (\omega \in \Omega_{2\epsilon})$$

gelten.

Es sei nun $\Pi := \{0 = t_0 < \ldots < t_n = 1\}$ eine Partition von $[0,1]$. Auf $\Omega_{2\epsilon}$ haben wir dann

$$K \geq S(1,\cdot) = \sum_{j=1}^{n} (S(t_j,\cdot) - S(t_{j-1},\cdot)) \geq \#\mathcal{A}\,\delta$$

wobei $\mathcal{A} := \{j : 1 \leq j \leq n, S(t_j,\cdot) - S(t_{j-1},\cdot) \geq \delta\}$ gesetzt wurde.

Schließlich sei $\eta < \frac{1}{2}$ so gewählt, daß $\lambda\eta > \frac{\beta}{2}$ ist. Das ist wegen $\lambda > \beta$ stets möglich. Daraus erhalten wir für alle $M > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^x\left(\sum_{j=1}^{n} |X(t_j,\cdot) - X(t_{j-1},\cdot)|^\lambda \geq M\right) = \\
&= \mathbb{P}^x\left(\sum_{j=1}^{n} |B(S(t_j,\cdot),\cdot) - B(S(t_{j-1},\cdot),\cdot)|^\lambda \geq M\right) \\
&\leq \mathbb{P}^x\left(\left\{\sum_{j\notin\mathcal{A}} C^\lambda |S(t_j,\cdot) - S(t_{j-1},\cdot)|^{\lambda\eta} \geq \frac{M}{2}\right\} \cap \Omega_{2\epsilon}\right) + \\
&\quad + \mathbb{P}^x\left(\left\{\sum_{j\in\mathcal{A}} |B(S(t_j,\cdot),\cdot) - B(S(t_{j-1},\cdot),\cdot)|^\lambda \geq \frac{M}{2}\right\} \cap \Omega_{2\epsilon}\right) + 2\epsilon \\
&\leq \mathbb{P}^x\left(C^\lambda \sum_{j=1}^{n} |S(t_j,\cdot) - S(t_{j-1},\cdot)|^{\lambda\eta} \geq \frac{M}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{2}{M}\int_{\Omega_{2\epsilon}} \sum_{j\in\mathcal{A}} |B(S(t_j,\cdot),\cdot) - B(S(t_{j-1},\cdot),\cdot)|^\lambda \, d\mathbb{P}^x + 2\epsilon \\
&\leq \mathbb{P}^x\left(C^\lambda \mathrm{VAR}_{\lambda\eta}(S,[0,1]) \geq \frac{M}{2}\right) + \frac{2\,(2L)^\lambda\, K}{M\,\delta} + 2\epsilon
\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist unabhängig von der Wahl der Partition des Intervalls $[0,1]$. Nach Konstruktion ist $\lambda\eta > \frac{\beta}{2}$ und daher ist die starke $\lambda\eta$–Variation des $\frac{\beta}{2}$–stabilen Subordinators $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *fast sicher endlich*, vgl. Blumenthal, Getoor [8] pp. 266–267, Theorem 3.1.

Ohne Einschränkung können wir wegen $\beta < 1$ auch $\lambda \leq 1$ wählen. Da dann die Variationssummen $\mathrm{var}_\lambda(X,\Pi,[0,1])$ bezüglich der Inklusion der Partitionen aufsteigend sind, dürfen wir eine Folge $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ äquidistanter und dicht in $[0,1]$ liegender Partitionen wählen, deren Feinheiten die Glieder der Folge $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind. Somit finden wir für alle $M > 0$ unter Verwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz für aufsteigend filtrierende Familien und von (3.28)

$$\begin{aligned}
(4.7)\qquad &\tilde{\mathbb{P}}^x\big(\mathrm{VAR}_\lambda(\tilde{X},[0,1]) > M\big) \leq \\
&\leq \sup_{\Pi\in\mathcal{P}} \tilde{\mathbb{P}}^x\big(\mathrm{var}_\lambda(\tilde{X},\Pi,[0,1]) > M\big) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mathbb{P}}^x\big(\mathrm{var}_\lambda(\tilde{X},\Pi_n,[0,1]) > M\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; k(0,x)^{-1} \liminf_{n\to\infty} k(\delta_n,\mathbb{R}^d)^{-\frac{1}{\delta_n}} \; \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^x\big(\mathrm{var}_\lambda(X,\Pi_n,[0,1]) > M\big) \\
&\leq \; k(0,x)^{-1} \liminf_{n\to\infty} k(\delta_n,\mathbb{R}^d)^{-\frac{1}{\delta_n}} \; \mathbb{P}^x\left(\mathrm{VAR}_{\lambda\eta}(S,[0,1]) > \frac{M}{2\,C^\lambda}\right) + \\
&\qquad + \frac{2\,|2L|^\lambda\,K}{M\,\delta} + 2\epsilon \\
&\to \; 0,
\end{aligned}
$$

wenn wir zuerst zum Limes $M \to \infty$ und dann zu $\epsilon \to 0$ übergehen. ////

Um uns in der Situation von Satz 4.6 von der Annahme, daß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ symmetrisch stabil sei, zu befreien, benötigen wir die folgende Hilfsüberlegung.

4.7 Lemma. *Es sei $\{P_t\}_{t\geq 0}$ ein (reellwertiger)* POISSON*–Prozeß mit Intensität $\rho > 0$. Dann gilt*

$$
\mathrm{var}_{\lambda,\mathcal{P}}(P(\cdot,\omega),[0,1]) = \mathrm{VAR}_\lambda(P(\cdot,\omega),[0,1]) = P(1,\omega) \qquad (\mathbb{P}^0\text{-}f.\,s.)
$$

für alle $\lambda > 0$ und jede Familie von Partitionen $\mathcal{P}$, die in $[0,1]$ dicht liegt.

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{P} = \{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Partitionen, die dicht in $[0,1]$ liegt. Da ein POISSON–Prozeß mit Wahrscheinlichkeit 1 in jedem beschränkten Zeitintervall höchstens endlich viele Sprünge besitzt, gibt es für jedes $\omega \in \Omega$ ein $N(\omega) \in \mathbb{N}$, so daß die Sprungzeiten des Prozesses $\tau_1(\omega) < \ldots < \tau_{n(\omega)}(\omega)$ von den Stützstellen der Partition $\Pi_{N(\omega)} = \{0 = t_{N,0} < t_{N,1} < \ldots < t_{N,\pi_N} = 1\}$ getrennt werden, d. h. daß

$$
\tau_j(\omega) \in (t_{N,k_j}, t_{N,k_j+1}] \qquad (k_1 < k_2 < \ldots < k_{n(\omega)} < \pi_{N(\omega)})
$$

für $j = 1,\ldots,n(\omega)$ gilt.

Da die Sprünge stets die Höhe 1 haben, finden wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}_\lambda(P(\cdot,\omega),\Pi_M,[0,1]) &= \sum_{j=1}^{\pi_M} |P(t_{M,j},\omega) - P(t_{M,j-1},\omega)|^\lambda \\
&= \sum_{j=1}^{\pi_M} P(t_{M,j},\omega) - P(t_{M,j-1},\omega) \\
&= P(1,\omega)
\end{aligned}
$$

für $\mathbb{P}^0$-fast alle ω und alle $M \geq N(\omega)$. Der Grenzübergang $M \to \infty$ zeigt daher die Behauptung. ////

Im Beweis von Satz 4.6 ging die Forderung, daß $\{X_t\}_{t\geq 0}$ symmetrisch und β–stabil sei, nur bei der Darstellung $X(t,\cdot) = B(S(t,\cdot),\cdot)$ ein. MONROE zeigt in [59] eine entsprechende Darstellungsformel für zentrierte LÉVY–Prozesse $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

4.8 Satz. ([59] pp. 1300–1301, Theorem 11) *Für jedes Martingal $\{M_t\}_{t\geq 0}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und fast sicher rechtsseitig stetigen Pfaden gibt es eine d–dimensionale*

BROWN*sche Bewegung* $\{B_t, \mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ *und eine Familie* $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *von* $\mathfrak{F}_t$*–Optionszeiten, so daß die Prozesse* $\{M_t(\cdot)\}_{t\geq 0}$ *und* $\{B(S(t,\cdot),\cdot)\}_{t\geq 0}$ *dieselben endlichdimensionalen Verteilungen besitzen.*

Die Pfade des Prozesses $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *sind fast sicher rechtsseitig stetig und isoton. Besitzt* $\{M_t\}_{t\geq 0}$ *unabhängige und stationäre Zuwächse, so trifft dies auch für* $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *zu.*

Darüber hinaus zeigt MONROE, daß der Prozeß $\{S_t\}_{t\geq 0}$ eindeutig ist: ist $\{R_t\}_{t\geq 0}$ eine weitere Familie von Optionszeiten, die die Aussage von Satz 4.8 erfüllen, dann impliziert $R_t \leq S_t$ (f. s.) schon $R_t = S_t$ (f. s.) für alle $t \geq 0$.

Im allgemeinen ist der im Satz 4.8 konstruierte Prozeß $\{S_t\}_{t\geq 0}$ nicht von der BROWNschen Bewegung $\{B_t, \mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ unabhängig; d. h. daß $\{S_t\}_{t\geq 0}$ im Sinne der Lemma 2.2 folgenden Bemerkung zwar ein *Subordinator* ist, daß aber $\{M_t\}_{t\geq 0}$ *nicht* der BROWNschen Bewegung $\{B_t, \mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ *subordiniert* ist.

Jeder zentrierte LÉVY–Prozeß ist ein rechtsstetiges Martingal. Gemäß Satz 4.8 finden wir $X(t,\cdot) = B(S(t,\cdot),\cdot)$ (f. s.) für einen geeigneten Subordinator $\{S_t\}_{t\geq 0}$ (und eine geeignete Filtration $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$, was aber im weiteren unerheblich ist).

Im Fall $\mathbb{E}^0(X_t) \neq 0$ schließen wir wie MONROE [58] p. 1219, Beweis von Theorem 2: es sei $Y_t := \sum_{s\leq t, |J_s^X|>1} J_s^X$. Die Pfade dieses Prozesses haben nur endlich viele Sprünge im Intervall $[0,1]$. Daher ist die λ–Variation von X_t genau dann endlich, wenn die des gestrippten Prozesses $X_{(1)}(t) = X_t - Y_t$ endlich ist. Wegen $\mathbb{E}^0\big(X_{(1)}(t)\big) < \infty$ dürfen wir sogar $\mathbb{E}^0\big(X_{(1)}(t)\big) = 0$ annehmen, anderenfalls subtrahieren wir einen d–dimensionalen Prozeß $\{P_t\}_{t\geq 0}$, dessen Komponenten POISSONsche Sprungprozesse mit Intensitäten $\mathbb{E}^0\big(X_{(1)}(1)\big)$ und Erwartungswerten $\mathbb{E}^0\big(X_{(1)}(t)\big) = t\,\mathbb{E}^0\big(X_{(1)}(1)\big)$ sind. Der daraus resultierende Prozeß ist wiederum ein LÉVY–Prozeß, und es gilt für jede Partition Π von $[0,1]$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}_\lambda(X_{(1)}(\cdot,\omega) - P(\cdot,\omega), \Pi, [0,1]) = \\
&\quad= \sum_{j=1}^{n} |X_{(1)}(t_j,\omega) - P(t_j,\omega) - X_{(1)}(t_{j-1},\omega) + P(t_{j-1},\omega)|^\lambda \\
&\quad\leq 2^\lambda \sum_{j=1}^{n} \big(|X_{(1)}(t_j,\omega) - X_{(1)}(t_{j-1},\omega)|^\lambda + |P(t_j,\omega) - P(t_{j-1},\omega)|^\lambda\big) \\
&\quad= 2^\lambda \big(\mathrm{var}_\lambda(X_{(1)}(\cdot,\omega), \Pi, [0,1]) + \mathrm{var}_\lambda(P(\cdot,\omega), \Pi, [0,1])\big)
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}_\lambda(X_{(1)}(\cdot,\omega), \Pi, [0,1]) \leq \\
&\quad\leq 2^\lambda \big(\mathrm{var}_\lambda(X_{(1)}(\cdot,\omega) - P(\cdot,\omega), \Pi, [0,1]) + \mathrm{var}_\lambda(P(\cdot,\omega), \Pi, [0,1])\big)\,.
\end{aligned}$$

Gemäß Lemma 4.7 ist daher die (starke bzw. obere bzw. untere) Variation des Prozesses $\{X_{(1)}(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ genau dann endlich, wenn die des Differenzprozesses $\{X_{(1)}(t,\cdot) - P(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ endlich ist.

4.9 Korollar. *Die Aussage von Satz 4.6 gilt für alle* LÉVY*–Prozesse* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *mit Index* $0 < \beta < 1$.

4.10 Korollar. *Es seien* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *ein* LÉVY*–Prozeß mit Index* $0 < \beta < 2$ *und* $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *ein damit einseitig vergleichbarer Prozeß mit* $\{X_t\}_{t\geq 0} \succ \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$. *Gilt für die Folge der Feinheiten* $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *einer Familie äquidistanter Partitionen* $\mathcal{P} = \{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *die dicht in* $[0,1]$ *ist,*

$$\liminf_{n\to\infty} k(\delta_n, [0,1])^{-\frac{1}{\delta_n}} < \infty,$$

so ist

$$\underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty \qquad (\tilde{\mathbb{P}}^x\text{-}f.\,s.) \tag{4.8}$$

für alle $\lambda > \beta$.

Beweis. Ist $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein symmetrisch stabiler Prozeß, so verwenden wir in (4.7) an Stelle des Satzes von der monotonen Konvergenz das Lemma von FATOU.

Im Falle allgemeiner LÉVY–Prozesse $\{X_t\}_{t\geq 0}$ argumentieren wir wie in Korollar 4.9. ////

4.11 Bemerkung. Es bezeichne $N \subset \Omega$ die Nullmenge, für die (4.8) *nicht* gilt, d. h. es ist

$$\underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega \setminus N.$$

Der Beweis von Satz 4.6 zeigt, daß N nur von den Ausnahmemengen für die HÖLDER–Stetigkeit der BROWNschen Pfade und für das Wachstumsverhalten des Subordinators abhängt, *nicht* aber von der Wahl der Folge der Partitionen $\mathcal{P}$.

Insbesondere finden wir also

$$\underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}(\omega)}(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega \setminus N, \tag{4.9}$$

für vom Pfad abhängende äquidistante Folgen von Partitionen $\mathcal{P}(\omega) = \{\Pi_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$, wenn die Bedingung an die Vergleichskonstanten

$$\liminf_{n\to\infty} k(\delta_n, [0,1])^{-\frac{1}{\delta_n}} < \infty$$

für *jede* Nullfolge $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt ist.

4.12 Bemerkung. Ohne weitere Änderungen lassen sich die hier geführten Beweise für die Variation auf $[0,1]$ auch auf Zeitintervalle der Form $[0,T]$, $T > 0$, übertragen; ist der Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ MARKOVsch, so gelten die Aussagen auch für die Variation auf beliebigen Intervallen $[S,T]$, $0 \leq S < T$.

4.2 Die Hausdorff–Dimension vergleichbarer Prozesse

Eine Überdeckung $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einer beliebigen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^d$ mit Mengen S_n nennen wir (BORELsche) δ*–Überdeckung*, $\delta > 0$, wenn $S_n \in \mathfrak{B}$ und $\operatorname{diam} S_n \leq \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei bezeichnet $\operatorname{diam} S_n$ den *Durchmesser* der Menge $S_n \subset \mathbb{R}^d$, also

$$\operatorname{diam} S_n := \sup_{x,y \in S_n} |x-y|.$$

Für jede Kombination von Zahlen $\lambda > 0$ und $\delta > 0$ definieren wir auf der Potenzmenge von $\mathbb{R}^d$ die Mengenfunktion

$$\Lambda_\delta^\lambda(B) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{diam} S_n|^\lambda \; : \; \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \delta\text{–Überdeckung von } B \right\}.$$

Offenbar wächst Λ_δ^λ für $\delta \searrow 0$.

4.13 Definition. Die für $\lambda > 0$ durch

$$\Lambda^\lambda(B) := \sup_{\delta>0} \Lambda_\delta^\lambda(B) \qquad (B \subset \mathbb{R}^d)$$

auf der Potenzmenge von $\mathbb{R}^d$ erklärte Funktion mit Werten in $[0,\infty]$ heißt *λ–dimensionales* HAUSDORFF*–Maß.*

Wählt man in der Definition der Funktion Λ_δ^λ nicht BORELsche Überdeckungen, sondern offene, abgeschlossene oder beliebige Überdeckungen oder Ausschöpfungen, führt das auf dasselbe λ–dimensionale HAUSDORFF–Maß, vgl. hierzu ROGERS [67] p. 51, Theorem 28.

Daß Λ^λ wohldefiniert ist, haben wir bereits gesehen. Das HAUSDORFF–Maß ist ein *von außen reguläres, metrisches, translationsinvariantes äußeres Maß* (bezüglich des Meßbarkeitsbegriffes von CARATHEODORY), und seine Einschränkung auf die BORELschen Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ ist ein (*σ–additives*) *Maß*—vgl. ROGERS [67] p. 50, Theorem 27 und p. 51 Theorem 28. ROGERS zeigt in [67] p. 97, Theorem 48, daß die Einschränkung auf die *analytischen* Teilmengen—und damit auch die Einschränkung auf die BORELschen Mengen—sogar *von innen kompakt regulär* ist. Unter einer *analytischen Menge* (oder auch SOUSLIN–Menge bzw. SOUSLIN–$\mathcal{F}$–Menge) verstehen wir eine Menge, die durch die SOUSLIN–Operation, vgl. CARLESON [14] p. 1, aus den abgeschlossenen Mengen hervorgeht. Für unsere Zwecke genügt jedoch folgende schwächere Regularitätsaussage, die auf R. O. DAVIES zurückgeht:

4.14 Lemma. ([19] p. 489, Corollary) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine analytische Teilmenge mit unendlichem* HAUSDORFF*–Maß $\Lambda^\lambda(A) = \infty$, $\lambda > 0$. Dann findet sich zu jeder Zahl $r > 0$ eine abgeschlossene Teilmenge $F_r \subset A$ mit* HAUSDORFF*–Maß $\Lambda^\lambda(F_r) \geq r$.*

Gilt $\Lambda^\lambda(B) < \infty$ für eine Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ und ein $\lambda > 0$, so sieht man mit Hilfe der HÖLDERschen Ungleichung, daß $\Lambda^{\lambda'}(B) = 0$ für alle $\lambda' > \lambda$ ist, vgl. auch ROGERS [67] p. 79, Corollary. Mithin haben wir für alle Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$

$$\sup\left\{\lambda > 0 : \Lambda^\lambda(B) = \infty\right\} = \inf\left\{\lambda > 0 : \Lambda^\lambda(B) = 0\right\}. \tag{4.10}$$

4.15 Definition. Die für jede Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ durch (4.10) eindeutig erklärte Zahl aus $[0, \infty]$ heißt HAUSDORFF*sche Dimension* der Menge B. Wir schreiben dafür $\dim B$.

Man beachte, daß sowohl $0 < \Lambda^{\dim B}(B) < \infty$ als auch $\Lambda^{\dim B}(B) = \infty$ oder $\Lambda^{\dim B}(B) = 0$ möglich ist. Offensichtlich ist die HAUSDORFF–Dimension *positiv*, *isoton*, und es gelten $\dim \emptyset = 0$ und $\dim G = d$ für alle offenen Mengen $G \subset \mathbb{R}^d$. (Letzteres folgt aus der Tatsache, daß das eindimensionale LEBESGUEsche Maß λ^1 und das HAUSDORFF–Maß Λ^1 auf den BORELschen Mengen, oder bei Vervollständigung von λ^1 auf den LEBESGUE–meßbaren und damit auch den analytischen Mengen, bis auf eine Konstante übereinstimmen. Mit Hilfe der Produktbildung überträgt man dieses Ergebnis auf Räume der Dimension $d \in \mathbb{N}$.) Die *Translationsinvarianz* des HAUSDORFFschen Maßes überträgt sich auf die HAUSDORFF–Dimension.

4.16 Lemma. *Für jede Folge $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von Mengen $B_j \subset \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\dim B = \sup_{j\in\mathbb{N}} \{\dim B_j\} \,,$$

wobei $B := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ ist.

Beweis. Da $B \supset B_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch $\dim B \geq \dim B_j$ für alle j, und es folgt die Richtung " $\geq$".

Für $\lambda < \dim B$ ist $\Lambda^\lambda(B) = \infty$, und auf Grund der σ–Subadditivität des λ–dimensionalen HAUSDORFF–Maßes folgt, daß $\Lambda^\lambda(B_{j'}) > 0$ für ein $j' \in \mathbb{N}$ gilt, d. h. daß $\lambda \leq \dim B_{j'} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \{\dim B_j\}$ ist. ////

Auskunft über das HAUSDORFF–Maß einer Bildmenge gibt der folgende Hilfssatz, der sich für den Spezialfall $f = \mathrm{id}$ bereits bei FROSTMAN [26] p. 89, Théorème 2 findet.

4.17 Lemma. (Vgl. BLUMENTHAL, GETOOR [8] pp. 265–266, Theorem 2.2) *Es seien $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^d$ eine meßbare Funktion auf einem metrischen Raum $(\mathcal{X}, d(\cdot,\cdot))$ und $E \subset \mathcal{X}$ eine* BOREL*sche Teilmenge. Existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{X}$ mit $\mu(E) = 1$ und*

$$\int_E \int_E |f(x) - f(y)|^{-\lambda} \, \mu(dx) \, \mu(dy) < \infty \tag{4.11}$$

für ein $\lambda > 0$, so gilt $\Lambda^\lambda(f(E)) > 0$.

Beweis. BLUMENTHAL und GETOOR zeigten das Lemma für den Fall $\mathcal{X} = [0, 1]$. Ihr Beweis läßt sich fast wörtlich übertragen: wegen (4.11) gibt es eine BORELsche Teilmenge $X \subset E$ mit strikt positivem Maß $\mu(X) > 0$ und eine Konstante $M > 0$, so daß

$$\sup_{x\in X} \int_E |f(x) - f(y)|^{-\lambda} \, \mu(dy) < M \tag{4.12}$$

gilt.

Wir wählen nun zu festem $\delta > 0$ eine beliebige BORELsche δ–Überdeckung $\{\Xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ der Menge $f(X)$. Offenbar ist $\{X \cap f^{-1}(\Xi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine BORELsche Überdeckung von X. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X \cap f^{-1}(\Xi_j)$ finden wir

$$\begin{aligned}
\mu(X \cap f^{-1}(\Xi_j)) &= \int 1_{X\cap f^{-1}(\Xi_j)}(y)\,\mu(dy) \\
&\leq \int_{X\cap f^{-1}(\Xi_j)} \left(\frac{|f(x)-f(y)|}{\operatorname{diam}\Xi_j}\right)^{-\lambda} \mu(dy) \\
&= (\operatorname{diam}\Xi_j)^{\lambda} \int_{X\cap f^{-1}(\Xi_j)} |f(x)-f(y)|^{-\lambda}\,\mu(dy).
\end{aligned}$$

Zusammen mit (4.12) ergibt sich

$$\mu(X \cap f^{-1}(\Xi_j)) \leq M\,(\operatorname{diam}\Xi_j)^{\lambda}$$

und nach Summation über $j \in \mathbb{N}$

$$0 < \mu(X) \leq M \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam}\Xi_j)^{\lambda}.$$

Die Behauptung folgt nach Übergang zum Infimum über alle möglichen δ–Überdeckungen $\{\Xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ durch den Grenzwert $\delta \to 0$. ////

Mit Hilfe des Begriffs der λ–*Kapazität* läßt sich das Lemma teilweise umkehren.

4.18 Definition. Die λ–*Kapazität*, $\lambda > 0$, einer BORELschen Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ ist durch

$$\operatorname{cap}_\lambda(B) := \left(\inf\left\{\int_B\int_B |x-y|^{-\lambda}\,\mu(dx)\,\mu(dy) : \mu \in \mathcal{M}_+^1(B)\right\}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \tag{4.13}$$

erklärt.

Insbesondere sagen wir, $B \in \mathfrak{B}$ sei von *positiver Kapazität*, wenn für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit $\mu(B) = 1$

$$\int_B\int_B |x-y|^{-\lambda}\,\mu(dx)\,\mu(dy) < \infty$$

gilt.

Den Zusammenhang zwischen HAUSDORFF–Maß und Kapazität zeigt ein Satz von FROSTMAN.

4.19 Satz. ([26] pp. 86–88, Théorème 1) *Ist* $F \subset \mathbb{R}^d$ *eine* abgeschlossene *Menge mit positivem* HAUSDORFF–*Maß* $\Lambda^\lambda(F) > 0$, $\lambda > 0$, *so gilt*

$$\operatorname{cap}_{\lambda'}(F) > 0$$

für alle $\lambda' < \lambda$.

Verallgemeinerungen der Aussagen von Lemma 4.17 und Satz 4.19 findet man bei Carleson [14] pp. 28–39, § iv, insbesondere pp. 28–29, Theorem 1, wo die Aussage des Satzes 4.19 für *analytische* und die des Lemmas 4.17 (f = id) für alle *beschränkten* Mengen gezeigt wird. Wir bemerken, daß für eine unbeschränkte analytische Menge $f(E) = B \subset \mathbb{R}^d$ mit strikt positiver Kapazität $\operatorname{cap}_\lambda(B) > 0$ ein Kompaktum $K \subset B$ mit $\operatorname{cap}_\lambda(K) > 0$ existiert; somit gilt Carlesons Satz allgemein für analytische Mengen.

Wir erklären nun analog zur Hausdorff–Dimension eine *kapazitäre Dimension*

$$\dim_c B := \inf \{\lambda > 0 : \operatorname{cap}_\lambda(B) = 0\}.$$

Andere Definitionen sind ebenfalls möglich, führen aber bei kompakten Mengen zum selben Begriff, vgl. Kahane [50] p. 394, (F) bzw. p. 395, (F').

Lemma 4.17 und Satz 4.19 besagen, daß

$$\dim F = \dim_c F$$

für jede abgeschlossene (sogar σ–kompakte) Menge F—und nach unserer Bemerkung sogar für alle analytischen Mengen F—gilt, vgl. dazu Frostman [26] p. 90, Séction 48, und für σ–kompakte Mengen Kahane [51] p. 133, Theorem 2 und Remark 1.

Im folgenden interessieren wir uns für die Hausdorffsche Dimension von Teilmengen der Pfadmenge gewisser stochastischer Prozesse. Vorab benötigen wir einige neue Begriffe.

4.20 Definition. Es sei $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ ein beliebiger Markov–Prozeß auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Dann heißen

$$\beta'(Y,x) := \sup\left\{\lambda \geq 0 \,:\, \mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right) = \mathcal{O}\left(|t-s|^{-1}\right) \text{ für } s-t \to 0\right\} \tag{4.14}$$

(verallgemeinerter) unterer Index und

$$\gamma_\delta(Y,x) := \sup\left\{\lambda \geq 0 \,:\, \int_0^\delta \mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right) dt < \infty \;\forall s \in [0,\delta]\right\} \quad (\delta > 0) \tag{4.15}$$

(verallgemeinerter) γ–Index des Prozesses.

4.21 Lemma. (Vgl. Pruitt [65] p. 374, Theorem 1) *Der verallgemeinerte γ–Index $\gamma_\delta(Y,x)$ eines d–dimensionalen* Markov*schen Prozesses $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ ist auch durch*

$$\gamma_\delta(Y,x) = \tilde{\gamma}_\delta(Y,x) \qquad (\delta > 0, x \in \mathbb{R}^d) \tag{4.16}$$

gegeben, wobei

$$\tilde{\gamma}_\delta(Y,x) = \sup\left\{\lambda \geq 0 : \limsup_{r \searrow 0} \frac{1}{r^\lambda} \int_0^\delta \mathbb{P}^x(|Y_t - Y_s| \leq r)\, dt < \infty \;\forall s \in [0,\delta]\right\},$$

ist.

Beweis. Für jedes $s \in [0,\delta]$ gilt

$$\begin{aligned}
(4.17)\qquad \int_0^\delta \mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right)\,dt &= \int_0^\delta\int_0^\infty \mathbb{P}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda} \geq \rho\right)\,d\rho\,dt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\delta \mathbb{P}^x\left(|Y_t - Y_s| \leq \rho^{-\frac{1}{\lambda}}\right)\,dt\,d\rho \\
&= \lambda\int_0^\infty\int_0^\delta r^{-1-\lambda}\,\mathbb{P}^x\left(|Y_t - Y_s| \leq r\right)\,dt\,dr.
\end{aligned}$$

Ist $\lambda < \tilde{\gamma}_\delta(Y,x)$, so gilt für $\lambda < \lambda' < \tilde{\gamma}_\delta(Y,x)$ und kleine Zahlen $r \leq \epsilon = \epsilon_s$

$$\int_0^\delta \mathbb{P}^x\left(|Y_t - Y_s| \leq r\right)\,dt \leq c_s\,r^{\lambda'},$$

woraus

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\delta r^{-1-\lambda}\,\mathbb{P}^x\left(|Y_t - Y_s| \leq r\right)\,dt\,dr \leq \\
&\leq c_s\int_0^\epsilon r^{-1+(\lambda'-\lambda)}\,dr + \delta\int_\epsilon^\infty r^{-1-\lambda}\,dr < \infty
\end{aligned}$$

für alle $s \in [0,\delta]$ folgt, was $\lambda \leq \gamma_\delta(Y,x)$ und damit $\tilde{\gamma}_\delta(Y,x) \leq \gamma_\delta(Y,x)$ zeigt.

Nehmen wir andererseits $\lambda < \gamma_\delta(Y,x)$ an, so finden wir in (4.17) für jede Wahl von $s \in [0,\delta]$ und $\epsilon > 0$ wegen der Isotonie der Funktion $r \mapsto \mathbb{P}^x(|Y_t - Y_s| \leq r)$

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta \mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right)\,dt &\geq \lambda\int_\epsilon^\infty r^{-1-\lambda}\int_0^\delta \mathbb{P}^x\left(|Y_t - Y_s| \leq r\right)\,dt\,dr \\
&\geq \int_0^\delta \mathbb{P}^x\left(|Y_t - Y_s| \leq \epsilon\right)\,dt\,\lambda\int_\epsilon^\infty r^{-1-\lambda}\,dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^\lambda}\int_0^\delta \mathbb{P}^x\left(|Y_t - Y_s| \leq \epsilon\right)\,dt.
\end{aligned}$$

Mithin ist $\lambda \leq \tilde{\gamma}_\delta(Y,x)$, also auch $\gamma_\delta(Y,x) \leq \tilde{\gamma}_\delta(Y,x)$. ////

4.22 Lemma. *Für jeden* Markov*schen Prozeß* $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ *mit Werten in* $\mathbb{R}^d$ *gilt*

$$(4.18)\qquad \beta'(Y,x) \leq \gamma_\delta(Y,x) \qquad (0 < \delta \leq \delta_0)$$

mit einem geeignet gewählten $\delta_0 > 0$.

Beweis. Gemäß der Definition des unteren Index gibt es eine Zahl $\delta_0 > 0$, so daß für jedes $\lambda < \beta'(Y,x)$

$$\mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right) \leq C|t-s|^{-1} \qquad (|t-s| \leq \delta_0)$$

mit einer geeigneten Konstanten $C = C(\delta_0) > 0$ gilt. Die Jensensche Ungleichung für *konkave* Funktionen—den analogen Beweis für *konvexe* Funktionen findet man bei Bauer [5] pp. 22–23, Satz 3.9—zeigt nun für jedes $\theta < 1$

$$\mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda\theta}\right) \leq \left(\mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right)\right)^\theta \leq C^\theta\,|t-s|^{-\theta} \quad (|t-s| \leq \delta_0),$$

woraus für alle $\delta \leq \delta_0$ und $s \in [0,\delta]$

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta \mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda\theta}\right) dt &\leq C^\theta \int_0^\delta |t-s|^{-\theta}\, dt \\
&= C^\theta \int_0^s (s-t)^{-\theta}\, dt + C^\theta \int_s^{\delta - s} (t-s)^{-\theta}\, dt \\
&\leq 2C^\theta \int_0^\delta r^{-\theta}\, dr \;<\; \infty
\end{aligned}$$

folgt. Da $\theta < 1$ beliebig gewählt war, erhalten wir für alle $\lambda' < \beta'(Y,x)$

$$\int_0^\delta \mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda'}\right) dt < \infty \qquad (s \in [0,\delta]),$$

d. h. $\lambda' < \gamma_\delta(Y,x)$, und daraus die Behauptung. ////

4.23 Bemerkung. Ist insbesondere $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ ein d-dimensionaler Lévy–Prozeß mit den in Definition 1.19 erklärten Indices β, β', β'' und γ, dann sind die Indices $\beta'(Y,x)$ und $\gamma_\delta(Y,x)$ vom Startpunkt $x \in \mathbb{R}^d$ unabhängig, und es gilt einerseits

$$\beta' \wedge d \leq \beta'(Y,x) \leq \beta \tag{4.19}$$

und andererseits

$$\gamma \leq \gamma_\delta(Y,x) \qquad (\delta \leq 1). \tag{4.20}$$

Ist außerdem der charakteristische Exponent des Prozesses **(1)** reellwertig—und damit der Prozeß symmetrisch—, so ist

$$\gamma_\delta(Y,x) \leq \beta' \wedge d \qquad (\delta \leq 1), \tag{4.21}$$

also insbesondere

$$\gamma = \beta' \wedge d \leq \beta'(Y,x) \leq \gamma_\delta(Y,x) \leq \beta' \wedge d = \gamma. \tag{4.22}$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß im Falle von Lévy–Prozessen $\beta' \wedge d \leq \gamma_\delta(Y,x)$ für jede Wahl von $\delta > 0$ gilt.

Zu (4.19) Für $\lambda < \beta' \wedge d$ zeigten Blumenthal, Getoor [10] p. 501, Theorem 5.3 (a),

$$\limsup_{t \searrow 0} t\, \mathbb{E}^0\left(|Y_t|^{-\lambda}\right) = 0.$$

Insbesondere folgt dann

$$\limsup_{t-s\to 0} |t-s| \mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right) = \limsup_{t-s\to 0} |t-s| \mathbb{E}^0\left(|Y_{|t-s|}|^{-\lambda}\right) = 0,$$

mithin $\lambda \leq \beta'(Y,x)$.

Für $\lambda > \beta$ gilt, vgl. Blumenthal, Getoor [10] p. 497, Theorem 3.1,

$$\lim_{t \searrow 0} t^{-\frac{1}{\lambda}} Y_t = 0 \qquad (\mathbb{P}^0\text{–f. s.}).$$

Das Lemma von Fatou impliziert daher

$$\liminf_{t \searrow 0} t\, \mathbb{E}^0 \left(|Y_t|^{-\lambda} \right) = \infty$$

also auch

$$\lim_{t-s \to 0} |t-s|\, \mathbb{E}^x \left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda} \right) = \infty,$$

also $\lambda \geq \beta'(Y,x)$.

Zu (4.20) Für alle $0 < \delta \leq 1$ und $s \in [0,\delta]$ finden wir

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta \mathbb{P}^x \left(|Y_t - Y_s| \leq r \right) dt &= \int_0^\delta \mathbb{P}^0 \left(|Y_t - Y_s| \leq r \right) dt \\
&= \int_0^s \mathbb{P}^x \left(|Y_{s-t}| \leq r \right) dt + \int_s^{\delta - s} \mathbb{P}^x \left(|Y_{t-s}| \leq r \right) dt \\
&= \int_0^{\delta - s} \mathbb{P}^x \left(|Y_\theta| \leq r \right) d\theta + \int_0^s \mathbb{P}^x \left(|Y_\theta| \leq r \right) d\theta \\
&\leq 2 \int_0^1 \mathbb{P}^x \left(|Y_\theta| \leq r \right) d\theta.
\end{aligned}$$

Ist nun $\lambda < \gamma$, so gilt, nach Division mit r^λ und Übergang zum Limes superior für $r \to 0$,

$$\limsup_{r \to 0} \frac{1}{r^\lambda} \int_0^\delta \mathbb{P}^x \left(|Y_t - Y_s| \leq r \right) dt < \infty \qquad (s \in [0,\delta]),$$

was $\lambda \leq \gamma_\delta(Y,x)$ impliziert und damit $\gamma \leq \gamma_\delta(Y,x)$ für $\delta \leq 1$.

Zu (4.21) Nun sei der charakteristische Exponent des Prozesses $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ reellwertig. Eine ähnliche Rechnung wie in Pruitt [65] p. 375, Lemma 3 (dort ist $\theta = 1$) ergibt, daß

$$\int_0^\theta \mathbb{E}^0 \Big(|X_t|^{-\lambda} \Big) dt = \theta \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} p_\lambda(t,\xi) \, \frac{1 - \mathrm{e}^{-\theta a(\xi)}}{\theta a(\xi)} \, d\xi \, dt \tag{4.23}$$

gilt, wobei $p_\lambda(t,\xi)$ die Übergangsdichte eines symmetrisch λ–stabilen, $0 \leq \lambda \leq 2$, d–dimensionalen Prozesses ist.

Da mit $a(\xi) \geq 0$ auch $\frac{1-\mathrm{e}^{-\theta a(\xi)}}{\theta a(\xi)} \geq 0$ ist, können wir die Reihenfolge der Integration auf der rechten Seite von (4.23) vertauschen.

Beachten wir noch, daß

$$\int_0^\infty p_\lambda(t,\xi)\, dt = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\big((d-\lambda)/2\big)}{2^\lambda \pi^{d/2} \Gamma\big(\lambda/2\big)} |\xi|^{\lambda - d}, & \text{falls } \lambda < d \\ \infty, & \text{falls } \lambda \geq d \end{cases}$$

gilt, vgl. Berg, Forst [6] pp. 135–136, Example 14.30, dann finden wir für $\lambda \geq d$

$$\int_0^\theta \mathbb{E}^0\left(|X_t|^{-\lambda}\right)\,dt = \infty \qquad (\lambda \geq d, 0 < \theta \leq 1).$$

Im anderen Fall, $\lambda < d$, erhalten wir, wenn wir die Abschätzung

$$1 - \mathrm{e}^{-\theta a(\xi)} \geq \theta\left(1 - \mathrm{e}^{-a(\xi)}\right) \qquad (0 \leq \theta \leq 1, \xi \in \mathbb{R}^d)$$

—sie folgt auf Grund der Konkavität der Funktion $\theta \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\theta a(\xi)}$—verwenden

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \mathbb{E}^0\left(|X_t|^{-\lambda}\right)\,dt &= c_{\lambda,d}\,\theta \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{\lambda-d}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\theta a(\xi)}}{\theta a(\xi)}\right)\,d\xi,\\ &\geq c_{\lambda,d}\,\theta \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{\lambda-d}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-a(\xi)}}{a(\xi)}\right)\,d\xi.\end{aligned}$$

Nach der Definition des Index β' divergiert dieses Integral für alle $\lambda > \beta'$.

Daher folgt für alle $s \in [0, \delta]$ und $\lambda > \beta' \wedge d$

$$\begin{aligned}\int_0^\delta \mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right)\,dt &= \int_0^s \mathbb{E}^0\left(|Y_{s-t}|^{-\lambda}\right)\,dt + \int_s^\delta \mathbb{E}^0\left(|Y_{t-s}|^{-\lambda}\right)\,dt\\ &= \int_0^{\delta-s} \mathbb{E}^0\left(|Y_\theta|^{-\lambda}\right)\,d\theta + \int_0^s \mathbb{E}^0\left(|Y_\theta|^{-\lambda}\right)\,d\theta\\ &= \infty,\end{aligned}$$

was $\lambda \geq \gamma_\delta(Y, x)$ und damit $\gamma_\delta(Y, x) \leq \beta' \wedge d$ beweist.

Die Beziehungen (4.22) sind nunmehr offensichtlich, der Zusatz folgt im wesentlichen aus dem Beweis von (4.20), wo man die Obergrenzen der Integrale entsprechend modifiziert und wie in Blumenthal, Getoor [10] p. 501, Theorem 5.2 schließt.

4.24 Lemma. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* Lévy*–Prozeß und $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein damit halbseitig vergleichbarer* Markov*–Prozeß.*

Ist $\{X_t\}_{t\geq 0} \prec \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ mit $K(|t-s|, \mathbb{R}^d) = \mathcal{O}(1)$ für $|t-s| \to 0$, so gilt

$$\beta'(\tilde{X}, x) \leq \beta'(X, x) \qquad (x \in \mathbb{R}^d). \tag{4.24}$$

Genügen die Vergleichskonstanten $K([0,\delta], \mathbb{R}^d) < \infty$ für ein $\delta > 0$, dann gilt auch

$$\gamma_\delta(\tilde{X}, x) \leq \gamma_\delta(X, x) \qquad (x \in \mathbb{R}^d). \tag{4.25}$$

Ist $\{X_t\}_{t\geq 0} \succ \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ mit $k(|t-s|, \mathbb{R}^d)^{-1} = \mathcal{O}(1)$ für $|t-s| \to 0$, so gilt

$$\beta'(X, x) \leq \beta'(\tilde{X}, x) \qquad (x \in \mathbb{R}^d). \tag{4.26}$$

Genügen die Vergleichskonstanten $k([0,\delta], \mathbb{R}^d) > 0$ für ein $\delta > 0$, dann gilt auch

$$\gamma_\delta(X, x) \leq \gamma_\delta(\tilde{X}, x) \qquad (x \in \mathbb{R}^d). \tag{4.27}$$

Insbesondere stimmen dann diese Indices für vergleichbare Prozesse überein.

Beweis. Aus Korollar 3.19 (3.33) folgt für alle $\lambda > 0$

$$|t-s|\,\mathbb{E}^x\left(|X_t - X_s|^{-\lambda}\right) \le K_{s,x}K_{|t-s|,\mathbb{R}^d}|t-s|\,\tilde{\mathbb{E}}^x\left(|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|^{-\lambda}\right). \tag{4.28}$$

Diese Ungleichung und die Definition des Index $\beta'(\cdot,\cdot)$ zeigen, daß $\lambda < \beta'(\tilde{X}, x)$ auch $\lambda \le \beta'(X, x)$ impliziert, was (4.24) beweist. Mit Hilfe von (3.32) sieht man entsprechend (4.26).

Um (4.25) einzusehen, integrieren wir (4.28) nach Division durch $|t-s|$ in t über den Bereich $[0, \delta]$ gegen dt, schätzen die Vergleichskonstanten in offensichtlicher Weise ab und schließen wie im Beweis von (4.24). Entsprechend zeigt man (4.27). ////

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, die HAUSDORFF–Dimension von gewissen Pfadmengen abzuschätzen. Die grundlegenden Ideen der folgenden Beweise sind den Arbeiten von BLUMENTHAL und GETOOR [10], insbesondere pp. 507–509, Beweis von Theorem 8.1, und PRUITT [65] pp. 375–376 entlehnt.

4.25 Satz. *Es seien $\{Y_t\}_{t\ge 0}$ ein* MARKOV*scher Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}^d$, $\delta_0 > 0$ die Konstante aus Lemma 4.22 und $E \subset [0, \delta_0]$ eine Menge von* HAUSDORFF*scher Dimension* $\dim E$. *Dann gilt*

$$\dim Y(E, \omega) \ge \beta'(Y, x)\, \dim E \tag{4.29}$$

für $\mathbb{P}^x$–fast alle $\omega \in \Omega$.

Noch vor dem Beweis des Satzes notieren wir einige einfache Folgerungen. Wir erinnern nochmals daran, daß β' den unteren Index für LÉVY–Prozesse—vgl. Definition 1.19—und $\beta'(\cdot, x)$ den in Definition 4.20 für MARKOVsche Prozesse erklärten verallgemeinerten unteren Index bezeichnet.

4.26 Korollar. *Die Aussage von Satz 4.25 gilt für beliebige Teilmengen $E \subset [0, \infty)$.*

Beweis. Die Mengen $[j\delta_0, (j+1)\delta_0)$, $j \in \mathbb{N}_0$, überdecken die Zeitmenge $[0, \infty)$. Daher gilt für $E_j := E \cap [j\delta_0, (j+1)\delta_0)$

$$E = \bigcup_{j=0}^{\infty} E_j \quad \text{und} \quad Y(E) = \bigcup_{j=0}^{\infty} Y(E_j).$$

Die durch

$$Z_{(j)}(t, \omega) := Y(t + j\delta_0, \omega) \qquad (j \in \mathbb{N}_0, t \ge 0)$$

definierten und wiederum MARKOVschen Prozesse besitzen offensichtlich dieselben verallgemeinerten unteren Indices

$$\beta'(Z_{(j)}, x) = \beta'(Y, x)$$

und auch dieselbe Konstante δ_0 aus Lemma 4.22. Ferner gilt

$$Z_{(j)}(E_j - j\delta_0, \omega) = Y(E_j, \omega) \qquad (j \in \mathbb{N}_0),$$

und wegen $E_j - j\delta_0 \subset [0, \delta_0]$ und der Translationsinvarianz der HAUSDORFFschen Dimension zeigt Satz 4.25

$$\dim Y(E_j, \omega) = \dim Z_{(j)}(E_j - j\delta_0, \omega) \geq \beta'(Y, x) \dim E_j \qquad (j \in \mathbb{N}_0)$$

$\mathbb{P}^x$–fast sicher. Nach Lemma 4.16 gilt

$$\dim E = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \{\dim E_j\} \quad \text{und} \quad \dim Y(E, \omega) = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \{\dim Y(E_j, \omega)\},$$

was die Aussage des Korollars zeigt. ////

Als Spezialfall von Satz 4.25 ergibt sich aus (4.26) und mit (4.19) das folgende Korollar:

4.27 Korollar. (Vgl. BLUMENTHAL, GETOOR [10] p. 507, Theorem 8.1) *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* LÉVY*–Prozeß, $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein* MARKOV*scher Prozeß, der $\{X_t\}_{t\geq 0} \succ \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ mit $k(|t-s|, \mathbb{R}^d)^{-1} = \mathcal{O}(1)$ für $|t-s| \to 0$ erfüllt. Für alle Teilmengen $E \subset [0, \infty)$, von* HAUSDORFF*scher Dimension* $\dim E$ *gilt dann*

$$\dim \tilde{X}(E, \omega) \geq \beta'(X, x) \dim E \geq (\beta' \wedge d) \dim E \tag{4.30}$$

$\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast sicher.

Beweis von Satz 4.25. Wir wählen $\lambda < \beta'(Y, x)$ und $\alpha < \alpha' < \dim E$. Wie im Beweis von Lemma 4.22 finden wir wegen $\lambda < \beta'(Y, x)$ mit der JENSENschen Ungleichung für konkave Funktionen für kleines $\delta_0 > 0$ und eine Konstante $C = C(\delta_0)$

$$\mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda\alpha}\right) \leq \left(\mathbb{E}^x\left(|Y_t - Y_s|^{-\lambda}\right)\right)^{\alpha} \leq C\,|t-s|^{-\alpha} \quad (|t-s| \leq \delta_0). \tag{4.31}$$

Wegen $\alpha' < \dim E$ ist $\Lambda^{\alpha'}(E) = \infty$, und die innere Regularität des HAUSDORFF–Maßes, vgl. DAVIES Satz, Lemma 4.14, garantiert die Existenz einer *abgeschlossenen* Teilmenge $F \subset E$ mit positivem Maß $\Lambda^{\alpha'}(F) > 0$. FROSTMANS Satz, Satz 4.19, zeigt, daß für $\alpha < \alpha'$

$$\operatorname{cap}_\alpha(F) > 0$$

gilt. Entsprechend der Definition der Kapazität existiert daher ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit Träger in F und

$$\int_F \int_F |t-s|^{-\alpha}\, \mu(dt)\, \mu(ds) < \infty.$$

Daraus und mit (4.31) finden wir nach einer Anwendung des Satzes von FUBINI

$$\mathbb{E}^x\left(\int_F \int_F |Y_t - Y_s|^{-\alpha\lambda}\, \mu(dt)\, \mu(ds)\right) < \infty,$$

und somit

$$\int_F \int_F |Y_t - Y_s|^{-\alpha\lambda} \, \mu(dt) \, \mu(ds) < \infty \qquad (\mathbb{P}^x\text{–f. s.}).$$

Lemma 4.17 zeigt schließlich

$$\Lambda^{\alpha\lambda}(Y(E,\omega)) \geq \Lambda^{\alpha\lambda}(Y(F,\omega)) > 0$$

$\mathbb{P}^x$–fast sicher. Da $\alpha < \dim E$ und $\lambda < \beta'(Y,x)$ bliebig gewählt waren, folgt die Behauptung durch den Übergang zu den Limiten $\alpha_n \nearrow \dim E$ und $\lambda_n \nearrow \beta'(Y,x)$ für $n \to \infty$. ////

Mit der Methode von Pruitt [65] p. 372, Theorem 1 erhalten wir schärfere Abschätzungen für die Dimension des Bildes eines Zeitintervalls. Zunächst benötigen wir das von C. A. Rogers und S. J. Taylor [68] pp. 6–8, Lemma 3 bewiesene *density theorem*, das wir in einer für unser Vorhaben adaptierten Version angeben.

4.28 Satz. (Ciesielski, Taylor [15] p. 435, Theorem B) *Es seien m ein endlich–additives Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha > 0$ und*

$$E_{\frac{1}{n}} := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \limsup_{r \to 0} \frac{m(\overline{B_r(y)})}{r^\alpha} > \frac{1}{n} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann sind die Mengen $E_{\frac{1}{n}}$ Borelsch, und für jede Menge $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $E \cap E_{\frac{1}{n}} = \emptyset$ gilt

$$\Lambda^\alpha(E) \geq C \, n \, m(E) \tag{4.32}$$

mit einer nur von der Raumdimension abhängenden Konstanten $C = C_d > 0$.

Die *Aufenthaltszeit* der Zuwächse eines d–dimensionalen Prozesses $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ in einer Kugel $B_r(0)$ bis zum Zeitpunkt δ bezeichnen wir mit

$$T(\delta, r, Y_s(\omega))(\omega) = \int_0^\delta 1_{B_r(0)}(Y_t(\omega) - Y_s(\omega)) \, dt \qquad (s \in [0,\delta]).$$

Ist $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ stetig in Wahrscheinlichkeit, dann gilt

$$\mathbb{E}^x\Big(\int_0^\delta 1_{B_r(0)}(Y_t - Y_s) \, dt \Big) = \int_0^\delta \mathbb{P}^x(Y_t - Y_s \in B_r(0)) \, dt > 0$$

für alle $s \in [0,\delta]$, $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Das besagt, daß $\mathbb{E}^x(T(\delta, 2r, Y_s)) > 0$ für alle $s \in [0,\delta]$. Daher genügen diese Prozesse der Ungleichung

$$\mathbb{P}^x\Big(T(\delta, r, Y_s) \geq \epsilon^\lambda \, \mathbb{E}^x\big(T(\delta, 2r, Y_s)\big) \Big) \leq \epsilon^{-\lambda} \qquad (\lambda > 0, s \in [0,\delta]), \tag{4.33}$$

die man mit Hilfe der Chebychev–Markov–Ungleichung und aus $\mathbb{E}^x\big(T(\delta, r, Y_s)\big) \leq \mathbb{E}^x\big(T(\delta, 2r, Y_s)\big)$ gewinnt.

4.29 Satz. *Es seien $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* MARKOV*scher Prozeß mit càdlàg–Pfaden und $\delta_0' = \delta_0'(x)$ die durch*

$$\delta_0'(x) := \sup\{\delta > 0 : \beta'(Y,x) \leq \gamma_\delta(Y,x)\}$$

gegebene Konstante. Dann gilt

$$\dim Y([0,\delta],\omega) \geq \gamma_\delta(Y,x) \geq \gamma_{\delta_0'}(Y,x) \qquad (0 \leq \delta \leq \delta_0') \tag{4.34}$$

für $\mathbb{P}^x$–fast alle $\omega \in \Omega$.

4.30 Bemerkung. Bezeichnet δ_0 die Konstante aus Lemma 4.22, dann gilt $\delta_0' \geq \delta_0$. Für den Beweis des Satzes ist die Konstante δ_0' unwesentlich; sie gibt lediglich an, für welche Intervalle eine Verschärfung der Aussage von Satz 4.25 vorliegt.

Beweis von Satz 4.29. Im Falle $\gamma_\delta(Y,x) = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen daher $\gamma_\delta(Y,x) > 0$ an, wählen $0 < \alpha < \alpha' < \gamma_\delta(Y,x)$ und setzen in Ungleichung (4.33) $\lambda > 1$, $\epsilon = n \in \mathbb{N}$ und $r = r_n = n^{-2\lambda/(\alpha'-\alpha)}$. Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}^x\Big(T(\delta,r_n,Y_s) \geq n^\lambda\, \mathbb{E}^x\big(T(\delta,2r_n,Y_s)\big)\Big) \leq n^{-\lambda},$$

und aus dem BOREL–CANTELLI–Lemma folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{T(\delta,r_n,Y_s)}{n^\lambda\, \mathbb{E}^x\big(T(\delta,2r_n,Y_s)\big)} < \infty \qquad (\mathbb{P}^x\text{–f. s.}).$$

Nach Lemma 4.21 gilt aber für $\alpha' < \gamma_\delta(Y,x)$ und $s \in [0,\delta]$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}^x\big(T(\delta,2r_n,Y_s)\big)}{r_n^{\alpha'}} < \infty,$$

und mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ folgt

$$C \limsup_{n\to\infty} \frac{T(\delta,r_n,Y_s)}{n^\lambda\, r_n^{\alpha'}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{T(\delta,r_n,Y_s)}{n^\lambda\, \mathbb{E}^x\big(T(\delta,2r_n,Y_s)\big)} < \infty \qquad (\mathbb{P}^x\text{–f. s.}).$$

Aus

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{T(\delta,r_n,Y_s)}{r_n^\alpha}\, n^{-\lambda}\, r_n^{\alpha-\alpha'}\right) < \infty \qquad (\mathbb{P}^x\text{–f. s.})$$

und aus der Tatsache, daß

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\lambda}\, r_n^{\alpha-\alpha'} = \lim_{n\to\infty} n^{-\lambda}\, n^{2\lambda} = \infty$$

gilt, schließen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{T(\delta,r_n,Y_s)}{r_n^\alpha} = 0 \qquad (\mathbb{P}^x\text{–f. s.}).$$

Da die Funktion $r \mapsto T(\delta, r, Y_s)(\omega)$ isoton und die Folge $\left\{\frac{r_n}{r_{n+1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gilt sogar

$$\limsup_{r\to 0} \frac{T(\delta, r, Y_s)}{r^\alpha} = 0 \qquad (\mathbb{P}^x\text{–f. s.}),$$

und wir können die Argumentation von Ciesielski und Taylor [15] p. 448 übernehmen: um Satz 4.28 anwenden zu können, setzen wir für $y \in \mathbb{R}^d$

$$m_\omega(B_r(y)) := \int_0^\delta 1_{B_r(y)}(Y_t(\omega))\, dt \qquad (\omega \in \Omega),$$

insbesondere ist also

$$m_\omega(B_r(Y_s)) = T(\delta, r, Y_s)(\omega).$$

Für die in Satz 4.28 auftretenden Mengen $E_{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt nach Konstruktion $\mathbb{P}^x$–fast sicher $E_{\frac{1}{n}} \cap Y([0,\delta], \omega) = \emptyset$ für jede Wahl von n, und wir finden somit

$$\Lambda^\alpha(Y([0,\delta],\omega)) \geq C\, n\, m_\omega(Y([0,\delta],\omega)) = C\, n \int_0^\delta 1_{Y([0,\delta],\omega)}(Y_t(\omega))\, dt = C\, \delta\, n,$$

woraus $\alpha \leq \dim Y([0,\delta],\omega)$ $\mathbb{P}^x$–fast sicher und mithin $\gamma_\delta(Y,x) \leq \dim Y([0,\delta],\omega)$ $\mathbb{P}^x$–fast sicher folgt. ////

4.31 Korollar. *Es seien $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* Markov*scher Prozeß mit càdlàg–Pfaden und $I \subset [0,\infty)$ ein Intervall mit $0 \in I$. Dann gilt*

$$\dim Y(I,\omega) \geq \sup_{\delta>0} \gamma_\delta(Y,x) = \lim_{\delta\to 0} \gamma_\delta(Y,x) \tag{4.35}$$

für $\mathbb{P}^x$–fast alle $\omega \in \Omega$.

Beweis. Das Intervall I enthält den Nullpunkt und somit gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ auch $[0, \frac{1}{n}] \subset I$. Aus Satz 4.29 wissen wir, daß dann

$$\dim Y(I,\omega) \geq \dim Y([0,\tfrac{1}{n}],\omega) \geq \gamma_{\frac{1}{n}}(Y,x)$$

$\mathbb{P}^x$–f. s. gilt. Der Übergang zum Supremum über alle $n \in \mathbb{N}$ zeigt daher

$$\dim Y(I,\omega) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_{\frac{1}{n}}(Y,x) = \lim_{n\to\infty} \gamma_{\frac{1}{n}}(Y,x),$$

was wiederum $\mathbb{P}^x$–f. s. gilt. ////

Da der Index $\gamma_\delta(Y,x)$ nicht ausschließlich von der Zeitdifferenz $|t-s|$ abhängt, scheint i. allg. keine Entsprechung von Korollar 4.26 möglich zu sein. Für Lévy–Prozesse gilt jedoch $\gamma_\delta(Y,x) \geq \beta' \wedge d$ für alle $\delta > 0$; daher gibt es in diesem Fall ein Analogon zu Korollar 4.27.

4.32 Korollar. (Vgl. Pruitt [65] p. 373, Theorem 1) *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* Lévy*–Prozeß, $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein* Markov*scher Prozeß, der $\{X_t\}_{t\geq 0}$ $\succ$*

$\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *mit* $k(|t-s|,\mathbb{R}^d)=\mathcal{O}(1)$ *für* $|t-s|\to 0$ *erfüllt. Für alle Intervalle* $I\subset[0,\infty)$ *mit* $0\in I$ *und alle hinreichend kleinen* $\delta>0$ *gilt dann*

$$\dim \tilde{X}(I,\omega)\geq \gamma_\delta(X,x)\geq\gamma\geq\beta'\wedge d \tag{4.36}$$

$\tilde{\mathbb{P}}^x$*–fast sicher.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 4.29, Lemma 4.24 (4.27) und Bemerkung 4.23 (4.20) bzw. der Definition 1.19 folgenden Bemerkung, daß $\gamma\geq\beta'\wedge d$ gilt. ////

Nunmehr wenden wir uns Abschätzungen der HAUSDORFFschen Dimension nach oben zu.

Fragen nach der Dimension gewisser Bildmengen und nach der Variation auf den entsprechenden Urbildmengen sind eng verwandt, wie uns folgendes Lemma zeigt.

4.33 Lemma. *Die Funktion* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^d$ *sei in jedem Punkt rechtsseitig stetig und besitze endliche Limiten bei Annäherung von links. Dann gilt für jede Wahl von* $\delta>0$ *und* $\lambda>0$ *und jede Familie* $\mathcal{P}$ *von endlichen Partitionen, die im Intervall* $[0,\delta]$ *dicht ist,*

$$\Lambda^\lambda(f([0,\delta]))\leq 2^\lambda\overline{\mathrm{var}}_{\mathcal{P}}(f,[0,\delta])\leq 2^\lambda\mathrm{VAR}(f,[0,\delta]). \tag{4.37}$$

Darüberhinaus existiert eine von f *abhängende Folge* $\mathcal{P}(f)=\left\{\Pi_n^f\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *von Partitionen, die im Intervall* $[0,\delta]$ *dicht ist, so daß*

$$\Lambda^\lambda(f([0,\delta]))\leq 2^\lambda\liminf_{n\to\infty}\mathrm{var}_\lambda(f,\Pi_n^f,[0,\delta])+1=2^\lambda\underline{\mathrm{var}}_{\mathcal{P}(f)}(f,[0,\delta])+1 \tag{4.38}$$

gilt.

Beweis. Es sei $\{E_j\}_{j=1}^n$ eine Überdeckung des Intervalls $[0,\delta]$ durch rechtsseitig halboffene Intervalle der Länge $\leq\eta$. (Dabei sei das Intervall, welches δ enthält, abgeschlossen.) Für jedes $1\leq j\leq n$ wählen wir einen festen Zeitpunkt $t_j\in E_j$ derart, daß $|t_j-t_{j-1}|\leq 2\eta$ erfüllt ist. Wir finden dann

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\sup_{s,t\in E_j}|f(s)-f(t)|^\lambda &\leq \sum_{j=1}^n\Big(\sup_{s\in E_j}|f(s)-f(t_j)|+\sup_{t\in E_j}|f(t)-f(t_j)|\Big)^\lambda\\ &= 2^\lambda\sum_{j=1}^n\sup_{t\in E_j}|f(t)-f(t_j)|^\lambda\end{aligned}$$

Da die Funktion f càdlàg ist, existieren zu jedem fest vorgegebenen $\epsilon>0$ Zahlen $\tau_j=\tau_j^{n,\epsilon}\in E_j$, so daß

$$\sup_{t\in E_j}|f(t)-f(t_j)|^\lambda\leq|f(\tau_j)-f(t_j)|^\lambda+\frac{\epsilon}{n}$$

für alle $1\leq j\leq n$ gilt. Da auch $\Pi_{n,\epsilon}:=\left\{0,\tau_1^{n,\epsilon},t_1,\ldots,\tau_n^{n,\epsilon},t_n,\delta\right\}$ eine Partition von $[0,\delta]$ ist, gilt

$$\Lambda_\eta^\lambda(f([0,\delta]))\leq\sum_{j=1}^n\sup_{s,t\in E_j}|f(s)-f(t)|^\lambda\leq 2^\lambda\left(\mathrm{var}_\lambda(f,\Pi_{n,\epsilon},[0,\delta])+\epsilon\right). \tag{4.39}$$

Bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_{2\eta}$ die Menge aller Partitionen von $[0,\delta]$ mit Feinheit $\leq 2\eta$, dann erhalten wir

$$\Lambda^\lambda_\eta(f([0,\delta])) \leq 2^\lambda \big(\sup_{\Pi\in\mathcal{P}_{2\eta}} \operatorname{var}_\lambda(f,\Pi,[0,\delta]) + \epsilon\big),$$

und aus $\eta \to 0$ und danach $\epsilon \to 0$ folgt dann (4.37).

Wählen wir in (4.39) $\eta \leq \frac{2\delta}{n}$, $\epsilon = 2^{-\lambda}$ und $\Pi_n := \Pi_{n,2^{-\lambda}}$, $n \in \mathbb{N}$, so finden wir

$$\Lambda^\lambda_{\frac{2\delta}{n}}(f([0,\delta])) \leq 2^\lambda \operatorname{var}(f,\Pi_n,[0,\delta]) + 1.$$

Die Beziehung (4.38) folgt daher aus dem Übergang zum Limes inferior über $n \in \mathbb{N}$.

Da wir später in einem etwas anderen Zusammenhang auf diese Konstruktion zurückkommen werden, bemerken wir an dieser Stelle, daß für alle aufeinanderfolgenden Punkte $s_j, s_{j+1} \in \Pi_n$ stets $|s_j - s_{j+1}| \leq \operatorname{diam} E_j \vee 2\eta \leq \frac{4\delta}{n}$ gilt. Somit ist

$$\max_j |s_j - s_{j+1}| \leq \frac{12\delta}{\#\Pi_n}. \tag{4.40}$$

////

Das soeben gezeigte Lemma 4.33 läßt sich insbesondere auf die Pfade von vergleichbaren Prozessen oder die der zugeordneten Sprungprozesse anwenden. In Verbindung mit Satz 3.22 (càdlàg–Pfade) und Satz 4.6 bzw. Satz 4.4 (Endlichkeit der starken Variation) erhalten wir aus (4.37) Abschätzungen für die Hausdorffsche Dimension eines Intervalls.

4.34 Satz. *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* Lévy*–Prozeß mit Index $0 < \beta < 2$ und $\{\tilde X_t\}_{t\geq 0}$ ein* Markov*scher Prozeß mit $\{X_t\}_{t\geq 0} \succ \{\tilde X_t\}_{t\geq 0}$ und*

$$\liminf_{n\to\infty} k(\delta_n,\mathbb{R}^d)^{-\frac{1}{\delta_n}} < \infty \qquad \textit{für eine Nullfolge } \{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Dann gilt

$$\dim J^{\tilde X}([0,1],\omega) \leq \beta \tag{4.41}$$

für $\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast alle $\omega \in \Omega$. Ist zudem $\beta < 1$, so finden wir

$$\dim \tilde X([0,1],\omega) \leq \beta \tag{4.42}$$

für $\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast alle $\omega \in \tilde\Omega$.

Mit Hilfe von Lemma 4.33 (4.38) und Korollar 4.10 läßt sich (4.42) ohne die Einschränkung $\beta < 1$ zeigen.

4.35 Satz. *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* Lévy*–Prozeß mit Index $0 < \beta < 2$ und $\{\tilde X_t\}_{t\geq 0}$ ein* Markov*scher Prozeß mit $\{X_t\}_{t\geq 0} \succ \{\tilde X_t\}_{t\geq 0}$. Gilt*

$$\liminf_{t\to 0} k(t,\mathbb{R}^d)^{-\frac{1}{t}} < \infty$$

dann ist

$$\dim \tilde{X}([0,1],\omega) \le \beta \tag{4.43}$$

für $\tilde{\mathbb{P}}^x$*–fast alle* $\omega \in \tilde{\Omega}$.

Beweis. Korollar 4.10 und die darauffolgende Bemerkung 4.11 besagen, daß

$$\underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}(\omega)}(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty \qquad (\lambda > \beta)$$

für fast alle $\omega \in \tilde{\Omega}$ gilt. Hierbei ist $\mathcal{P}(\omega)$ eine vom betrachteten Pfad abhängende, äquidistante Partition des Intervalls $[0,1]$.

Der Beweis von Satz 4.6 (auf den sich Korollar 4.10 stützt) läßt sich fast wörtlich für *beliebige* Partitionen $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = 1\}$ von $[0,1]$ mit Feinheit δ übertragen. Dabei ändern sich lediglich die Vergleichskonstanten: an Stelle von $k(0,x)^{-1}\, k(\delta_n, \mathbb{R}^n)^{-\frac{1}{\delta_n}}$ erhalten wir in (4.7) nunmehr

$$k(0,x)^{-1}\,\left(k(t_0 - t_1, \mathbb{R}^d)\ldots k(t_{n+1} - t_n, \mathbb{R}^d)\right)^{-1}.$$

Aus der Konstruktion der Partitionen Π_n, vgl. Lemma 4.33 (4.40), finden wir, daß

$$\max_{0\le j\le n} |t_j - t_{j+1}| \le \frac{C}{n+2}$$

für eine Konstante $C > 0$ gilt. Mithin folgt

$$\begin{aligned}\left(k(t_0 - t_1, \mathbb{R}^d)\cdots k(t_{n+1} - t_n, \mathbb{R}^d)\right)^{-1} &\le \left(\max_{0\le j\le n}(k(t_j - t_{j+1}, \mathbb{R}^d)^{-1})\right)^{n+1}\\ &\le \left((k(t_{j_0} - t_{j_0+1}, \mathbb{R}^d)^{-1})\right)^{\frac{C'}{t_{j_0} - t_{j_0+1}}}\end{aligned}$$

für den Index $j_0 = j_0(\Pi_n)$, für den das Maximum angenommen wird.

Da nach Voraussetzung $t_{j_0} - t_{j_0+1} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, folgt die Behauptung des Satzes aus der Abschätzung (4.38) in Lemma 4.33, der Bemerkung 4.11 und der wie oben angegeben modifizierten Fassung von Satz 4.6 bzw. Korollar 4.10. ////

Da die Hausdorff–Dimension isoton ist, erhalten wir ohne weiteren Beweis folgende Verallgemeinerung:

4.36 Korollar. *Die Aussagen der Sätze 4.34 und 4.35 gelten für alle Teilmengen* $E \subset [0,1]$.

Im Falle $\dim E < 1$ ergibt Korollar 4.36 keine scharfe Abschätzung der Dimension des Bildes $\tilde{X}(E,\omega)$. Um bessere Schranken für derartige Mengen zu erhalten, wenden wir eine Version von des Reflexionsprinzips für vergleichbare Prozesse, Korollar 3.23 in der Form von Korollar 3.25, an. Schon hier sei bemerkt, daß wir uns auf Prozesse $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge 0}$ beschränken werden, die mit *symmetrischen* Lévy–Prozessen vergleichbar sind, obschon Verallgemeinerungen mit Hilfe von Symmetrisierung im Sinne der Bemerkung vor Lemma 3.9 ohne *methodischen* Mehraufwand möglich sind.

Vorab notieren wir noch einige Hilfssätze.

4.37 Lemma. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein* LÉVY*–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und* LÉVY*–Maß ν. Für alle $R > 0$ gilt*

$$\frac{1}{t}\,\mathbb{P}^0(|X_t| > R) \leq c_R \qquad (t \leq 1)$$

mit einer von $t \in [0,1]$ unabhängigen Konstanten c_R, die $\lim_{R\to\infty} c_R = 0$ erfüllt.

Beweis. Wir zerlegen X_t in zwei LÉVY–Prozesse $X_t := X'_t + X''_t$,

$$X'_t(\omega) := \sum_{0<s\leq t} J^X(s,\omega)\,1_{\{|J^X(s,\cdot)|>c\}}(\omega), \quad X''_t(\omega) := X_t(\omega) - X'_t(\omega) = X_{(c)}(t,\omega),$$

wobei $c > 0$ so groß gewählt ist, daß für ein beliebig vorgegebenes $\epsilon > 0$

$$\nu(\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_c(0)}) \leq \epsilon$$

gilt.

Mit diesen Bezeichnungen finden wir für alle $R > 0$ und $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^0(|X_t| > 2R) &= \mathbb{P}^0(|X'_t + X''_t| > 2R)\\
&\leq \mathbb{P}^0(|X'_t| + |X''_t| > 2R)\\
&\leq \mathbb{P}^0(|X'_t| > R) + \mathbb{P}^0(|X''_t| > R).
\end{aligned}$$

Da einerseits X'_t seinen Wert nur durch Sprünge verändern kann—diese sind POISSON–verteilt mit Intensität $\nu(\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_c(0)})$—und andererseits X''_t als Prozeß mit beschränkten Sprüngen alle Momente besitzt, finden wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^0(|X_t| > 2R) &\leq \mathbb{P}^0(X'_t \text{ hat mindestens 1 Sprung}) + \frac{1}{R^2}\,\mathbb{E}^0(|X''_t|^2)\\
&= 1 - \mathrm{e}^{-t\nu(\mathbb{R}^d\setminus\overline{B_c(0)})} + \frac{1}{R^2}\big(\mathbb{E}^0(|X''_t - \mathbb{E}^0(X''_t)|^2) + |\mathbb{E}^0(X''_t)|^2\big)\\
&\leq t\,\nu(\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_c(0)}) + \frac{t}{R^2}\big(\mathbb{E}^0(|X''_1 - \mathbb{E}^0(X''_1)|^2) + |\mathbb{E}^0(X''_1)|^2\big),
\end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Abschätzung $1-\mathrm{e}^{-\alpha} \leq |\alpha|$, eine Folgerung aus der Identität von BIENAYMÉ—Varianz $(X''_t) = t\,$Varianz (X''_1)—und $\mathbb{E}^0(X''_t) = t\,\mathbb{E}^0(X''_1)$ verwendeten.

Da $\epsilon > 0$ unabhängig von R gewählt war, erfüllt

$$\begin{aligned}
c_R &:= \nu(\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_c(0)}) + \frac{1}{R^2}\big(\mathbb{E}^0(|X''_1 - \mathbb{E}^0(X''_1)|^2) + |\mathbb{E}^0(X''_1)|^2\big)\\
&\leq \epsilon + \frac{1}{R^2}\big(\mathbb{E}^0(|X''_1 - \mathbb{E}^0(X''_1)|^2) + |\mathbb{E}^0(X''_1)|^2\big)
\end{aligned}$$

die Behauptung des Lemmas. ////

Das folgende Lemma findet sich für reelle Prozesse bei FELLER [24] p. 292, Lemma. Der Beweis läßt sich jedoch für höhere Dimensionen nicht ohne weiteres übertragen.

4.38 Lemma. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler* Lévy*–Prozeß mit* Lévy*–Maß ν. Für alle Funktionen $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, die in einer Umgebung des Ursprungs verschwinden, gilt*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int f \, d\mathbb{P}^0_{X_t} = \int f \, d\nu. \tag{4.44}$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \, \mathbb{P}^0(X_t \in B) = \nu(B) \tag{4.45}$$

für alle ν–randlosen Mengen $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \notin \overline{B}$.

Beweis. Da nach (4.44) $\frac{1}{t}\mathbb{P}^0_{X_t}|_{B^c_{1/n}(0)} \to \nu|_{B^c_{1/n}(0)}$ für $t \to 0$ im Sinne der schwachen Konvergenz auf $B^c_{1/n}(0)$ von Maßen gilt, folgt mit den üblichen Argumenten (4.45), siehe Bauer [4] p. 228, Satz 30.12.

Um (4.44) zu zeigen, erinnern wir zunächst an die bekannte Beziehung

$$\frac{1}{t} \, \mathbb{P}^0_{X_t}|_{\{0\}^c} \to \nu|_{\{0\}^c} \quad \text{vag für } t \to 0,$$

siehe Berg, Forst [6] pp. 172–173, Proposition 18.2.

Das Lévy–Maß ν ist außerhalb einer Umgebung des Ursprungs ein endliches Maß. Wegen Lemma 4.37 existiert daher zu jedem $\epsilon > 0$ ein $R_0 > 0$, so daß

$$\nu(\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)) + \sup_{t\leq 1} \frac{1}{t} \, \mathbb{P}^0(X_t \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)) \leq \epsilon \qquad (R > R_0)$$

gilt. Mit Hilfe einer Abschneidefunktion $\chi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $1_{B_R(0)} \leq \chi \leq 1_{B_{R+1}(0)}$ finden wir für $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \notin \operatorname{supp} f$

$$\begin{aligned} |\int_{\mathbb{R}^d} u \, d\big(t^{-1}\mathbb{P}^0_{X_t} - \nu\big)| \;&\leq\; |\int_{\mathbb{R}^d} u\chi \, d\big(t^{-1}\mathbb{P}^0_{X_t} - \nu\big)| + \int_{\mathbb{R}^d} |u|(1-\chi) \, d\big(t^{-1}\mathbb{P}^0_{X_t} + \nu\big) \\ &\leq\; |\int_{\mathbb{R}^d} u\chi \, d\big(t^{-1}\mathbb{P}^0_{X_t} - \nu\big)| + \|u\|_\infty \epsilon \;\to\; \|u\|_\infty \epsilon, \end{aligned}$$

für $t \to 0$, da der Träger von $u\chi$ nach Konstruktion kompakt ist. Die Behauptung folgt mit $\epsilon \to 0$. ////

4.39 Lemma. *Es sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein symmetrischer* Lévy*–Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und* Lévy*–Maß ν. Dann gibt es zu jedem $R > 0$ eine Zahl $R' > R$ und ein $\delta > 0$, so daß*

$$\mathbb{P}^0\big(\sup_{s\leq t} |X_t| > \rho\big) \leq c \, \mathbb{P}^0\big(R' \geq \sup_{s\leq t} |X_t| > \rho\big) \qquad (\rho \leq R)$$

für alle Zeiten $0 < t \leq \delta$ gilt. Die Konstante c hängt dabei nur von R, R', δ und der Raumdimension ab.

Beweis. Da $\frac{1+|x|^2}{|x|^2}\nu(dx)$ ein *endliches* Maß auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ist, sind für Lebesgue–fast alle $R > 0$ die Kugeln $B_R(0)$ ν–randlos. Wir dürfen daher im folgenden annehmen, daß die Radien R und R' stets zu ν–randlosen Kugeln gehören.

Zu fest vorgegebenem $R > 0$ bestimmen wir $R' > R$ derart, daß

$$\frac{\nu(\mathbb{R}^d \setminus B_{R'/d}(0))}{\nu(\mathbb{R}^d \setminus B_R(0))} \leq \frac{1}{8d}$$

ist. Nach dem Reflexionsprinzip (3.13) für Lévy–Prozesse gilt für alle $\rho \leq R$

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}^0\big(\sup_{s\leq t}|X_s| > R'\big)}{\mathbb{P}^0\big(\sup_{s\leq t}|X_s| > \rho\big)} &\leq \frac{2d\,\mathbb{P}^0\big(|X_t| > R'/d\big)}{\mathbb{P}^0\big(|X_t| > \rho\big)} \leq \frac{2d\,\mathbb{P}^0\big(|X_t| > R'/d\big)}{\mathbb{P}^0\big(|X_t| > R\big)}\\ &\leq \frac{4d\,\nu(\mathbb{R}^d \setminus B_{R'/d}(0))}{\nu(\mathbb{R}^d \setminus B_R(0))} \leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Die vorletzte Abschätzung folgt dabei für hinreichend kleine t aus Lemma 4.38.

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^0\big(\sup_{s\leq t}|X_s| > \rho\big) &= \mathbb{P}^0\big(R' \geq \sup_{s\leq t}|X_s| > \rho\big) + \mathbb{P}^0\big(\sup_{s\leq t}|X_s| > R'\big)\\ &\leq \mathbb{P}^0\big(R' \geq \sup_{s\leq t}|X_s| > \rho\big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}^0\big(\sup_{s\leq t}|X_s| > \rho\big),\end{aligned}$$

woraus die Behauptung mit $c = 2$ folgt. ////

Der folgende Satz wurde für allgemeine Lévy–Prozesse im Fall $\beta < 1$ von Blumenthal, Getoor [10] p. 507, Theorem 8.1 bewiesen. Millar konnte in [57] die Beschränkung $\beta < 1$ aufheben. Seinen Abschneidetrick werden wir nun geeignet für die Situation vergleichbarer Prozesse modifizieren.

4.40 Satz. (Vgl. Millar [57] pp. 69–70, Theorem 5.1) *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler symmetrischer* Lévy*–Prozeß mit Index $0 < \beta < 2$ und $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ ein damit vergleichbarer stark* Markov*scher Prozeß derart, daß für die Konstanten C'_r aus Korollar 3.25 $C := \sup_{0\leq r\leq 1} C'_r < \infty$ ist. Dann gilt*

$$\dim \tilde{X}(E,\omega) \leq \beta \dim E \tag{4.46}$$

$\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast sicher für alle Borel*schen Mengen $E \subset [0,1]$.*

4.41 Bemerkung. Die Forderung $\sup_{0\leq r\leq 1} C'_r < \infty$ mit C'_r aus Korollar 3.25 ist offenbar gleichwertig zu $C' < \infty$, wobei C' die Konstante (3.39) zu $t = 1$ ist.

In der Situation und mit den Bezeichnungen von Beispiel 3.17 (1) gilt wegen Bemerkung 3.27 stets $C' \leq K^2/k^2 < \infty$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung in drei Schritten. Zunächst beweisen wir für beliebige $R > 0$ und kurze Zeitspannen $t - r \leq \delta$ die Ungleichung

$$\tilde{\mathbb{E}}^x\Big(\big(\operatorname{diam}\tilde{X}([r,t])\big)^\lambda\, 1_{\{\sup_{s\leq 1}|\tilde{X}_s|\leq R\}}\Big) \leq C(R,\lambda,\nu)\,(t-r) \qquad (\lambda > \beta) \tag{4.47}$$

mit einer nur von R, λ, dem Lévy–Maß ν des Prozesses $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und der Vergleichskonstante C abhängenden Konstanten.

In einem zweiten Schritt zeigen wir die Dimensionsabschätzung für Zeitmengen E von HAUSDORFFscher Dimension $\dim E < 1$ und schließlich für Mengen mit Dimension $\dim E = 1$.

Schritt 1. Es seien $0 \leq r \leq t \leq 1$ und $t - r \leq \delta$, wobei δ kleiner als die in Lemma 4.39 benötigte *kurze* Zeitspanne ist. Im folgenden bezeichnen

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_R &:= \Big\{\omega \in \tilde{\Omega} : \sup_{s \leq 1} |\tilde{X}(s, \omega)| \leq R\Big\} \\
\Delta_{rt}\tilde{\Omega}_R &:= \Big\{\omega \in \tilde{\Omega} : \sup_{r \leq s, s' \leq t} |\tilde{X}(s, \omega) - \tilde{X}(s', \omega)| \leq 2R\Big\}.
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\tilde{\Omega}_R \subset \Delta_{rt}\tilde{\Omega}_R$ für alle $R > 0$ und $r, t \in [0, 1]$. Wir finden daher

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}^x\big((\operatorname{diam} \tilde{X}([r, t]))^\lambda \, 1_{\tilde{\Omega}_R}\big) &\leq \tilde{\mathbb{E}}^x\big((\operatorname{diam} \tilde{X}([r, t]))^\lambda \, 1_{\Delta_{rt}\tilde{\Omega}_R}\big) \\
&= \int_0^\infty \tilde{\mathbb{P}}^x\Big(\big\{(\operatorname{diam} \tilde{X}([r, t]))^\lambda > \rho\big\} \cap \Delta_{rt}\tilde{\Omega}_R\Big)\, d\rho \\
&= \int_0^{2R} \tilde{\mathbb{P}}^x\Big(2R \geq \sup_{r \leq s, s' \leq t} |\tilde{X}(s) - \tilde{X}(s')|^\lambda > \rho\Big)\, d\rho \\
&\leq \int_0^{2R} \tilde{\mathbb{P}}^x\Big(\sup_{r \leq s, s' \leq t} |\tilde{X}(s) - \tilde{X}(s')|^\lambda > \rho\Big)\, d\rho \\
&\leq \int_0^{2R} \tilde{\mathbb{P}}^x\Big(2^\lambda \sup_{r \leq s \leq t} |\tilde{X}(r) - \tilde{X}(s)|^\lambda > \rho\Big)\, d\rho.
\end{aligned}$$

Verwenden wir das Reflexionsprinzip für vergleichbare Prozesse in Form von (3.42), dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}}^x\big((\operatorname{diam} \tilde{X}([r, t]))^\lambda \, 1_{\tilde{\Omega}_R}\big) \leq \\
&\quad\leq d(C+1) \int_0^{2R} \tilde{\mathbb{P}}^x\big(|\tilde{X}(r) - \tilde{X}(t)| > \rho^{1/\lambda}/(2d)\big)\, d\rho \\
&\quad\leq d(C+1) k_{r,x}^{-1} k_{t-r,\mathbb{R}^d}^{-1} \int_0^{2R} \mathbb{P}^x\big(|X(r) - X(t)| > \rho^{1/\lambda}/(2d)\big)\, d\rho,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Vergleichbarkeit der Prozesse ausnutzten. Weiter gilt mit $\tilde{C} := d(C+1) k_{[0,1],x}^{-1} k_{[0,\delta],\mathbb{R}^d}^{-1}$ und den Bezeichnungen von Lemma 4.39—δ sei hinreichend klein—

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}^x\big((\operatorname{diam} \tilde{X}([r, t]))^\lambda \, 1_{\tilde{\Omega}_R}\big) &\leq \tilde{C} \int_0^{2R} \mathbb{P}^0\big(|X(t-r)| > \rho^{1/\lambda}/(2d)\big)\, d\rho \\
&\leq \tilde{C} \int_0^{2R} \mathbb{P}^0\big(\sup_{s \leq t-r} |X(s)| > \rho^{1/\lambda}/(2d)\big)\, d\rho \\
&\leq 2\tilde{C} \int_0^{2R} \mathbb{P}^0\big(R' \geq \sup_{s \leq t-r} |X(s)| > \rho^{1/\lambda}/(2d)\big)\, d\rho.
\end{aligned}$$

Auf der Menge $\{\omega \in \Omega : R' \geq \sup_{s\leq t-r} |X(s,\omega)|\}$ hat $X(s,\omega)$ höchstens Sprünge der Höhe $2R'$, stimmt also dort mit dem (ebenfalls symmetrischen) gestrippten Prozeß $X_{(2R')}(s,\omega)$ überein. Nochmalige Anwendung des Reflexionsprinzips (3.13) ergibt

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}^x\big((\operatorname{diam}\tilde{X}([r,t]))^\lambda 1_{\tilde{\Omega}_R}\big) &\leq 2\tilde{C}\int_0^{2R} \mathbb{P}^0\big(R' \geq \sup_{s\leq t-r} |X_{(2R')}(s)| > \rho^{1/\lambda}/(2d)\big)\, d\rho \\ &\leq 2\tilde{C}\int_0^{2R} \mathbb{P}^0\big(\sup_{s\leq t-r} |X_{(2R')}(s)| > \rho^{1/\lambda}/(2d)\big)\, d\rho \\ &\leq 2d\tilde{C}\int_0^{2R} \mathbb{P}^0\big(|X_{(2R')}(s)| > \rho^{1/\lambda}/(2d^2)\big)\, d\rho.\end{aligned}$$

Indem wir ggf. R' vergrößern, können wir stets $R' > (2R)^{1/\lambda}/(2d^2)$ erreichen. Nach Lemma 4.37 gilt dann

$$\mathbb{P}^0\big(|X_{(2R')}(t-r)| > \rho^{1/\lambda}/(2d^2)\big) \leq 2(t-r)\,\nu(\mathbb{R}^d \setminus B_{\rho^{1/\lambda}/(2d^2)}(0)) \qquad (t-r\leq\delta)$$

für LEBESGUE–fast alle $\rho \in [0, 2R]$. Zusammen mit den oben hergeleiteten Abschätzungen ergibt dies für $\lambda > \theta > \beta$ und mit $S := \frac{(2R)^{1/\lambda}}{2d^2}$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}^x\big((\operatorname{diam}\tilde{X}([r,t]))^\lambda 1_{\tilde{\Omega}_R}\big) &\leq 4d\tilde{C}\,(t-r)\int_0^{2R} \nu(\mathbb{R}^d \setminus B_{\rho^{1/\lambda}/(2d^2)}(0))\, d\rho \\ &= 8\lambda d^3\tilde{C}\,(t-r)\int_0^S \eta^{\lambda-1}\,\nu(\mathbb{R}^d\setminus B_\eta(0))\,d\eta \\ &= 8\lambda d^3\tilde{C}\,(t-r)\int_0^S \eta^{\lambda-(1+\theta)}\,\eta^\theta\nu(\mathbb{R}^d\setminus B_\eta(0))\,d\eta.\end{aligned}$$

BLUMENTHAL und GETOOR zeigten ([10] p. 495, Theorem 2.1), daß für alle $\theta > \beta$

$$\lim_{\eta\to 0}\eta^\theta\,\nu(\mathbb{R}^d\setminus B_\eta(0)) = 0$$

gilt, woraus schließlich wegen $(\theta+1)-\lambda < 1$

$$\tilde{\mathbb{E}}^x\big((\operatorname{diam}\tilde{X}([r,t]))^\lambda 1_{\tilde{\Omega}_R}\big) \leq \Big(8\lambda d^3\tilde{C}\,\frac{S^{\lambda-\theta}}{\lambda-\theta}\,\sup_{\eta\leq S}\eta^\theta\,\nu(\mathbb{R}^d\setminus B_\eta(0))\Big)\,(t-r),$$

und somit (4.47) folgt.

Schritt 2. Sei nun $1 \geq \alpha > \dim E$. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine $\frac{1}{n}$–Überdeckung der Menge E durch abgeschlossene Intervalle $E_{n,j} = [r_{n,j}, t_{n,j}]$, $j \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft, daß

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |t_{n,j} - r_{n,j}|^\alpha < \frac{1}{n} \tag{4.48}$$

ist. Ist $2 \geq \lambda > \beta$, so finden wir aus (4.47) mit Hilfe der JENSENschen Ungleichung für konkave Funktionen

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}^x\Big((\operatorname{diam}\tilde{X}(E_{n,j}))^{\lambda\alpha} 1_{\tilde{\Omega}_R}\Big) &\leq \Big(\tilde{\mathbb{E}}^x\Big((\operatorname{diam}\tilde{X}(E_{n,j}))^\lambda 1_{\tilde{\Omega}_R}\Big)\Big)^\alpha \\ &\leq C(R,\lambda,\nu)^\alpha\,|t_{n,j}-r_{n,j}|^\alpha\end{aligned} \tag{4.49}$$

für hinreichend feine Überdeckungen mit einer nur von R, λ, vom LÉVY–Maß ν des Prozesses $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und den Vergleichskonstanten, aber nicht von der Überdeckung abghängenden Konstanten.

Für die weiteren Überlegungen bezeichne $\mathcal{E}_n$ die Gesamtheit aller $\frac{1}{n}$–Überdeckungen der Menge E, die aus abgeschlossenen Intervallen $[r_{n,j}, t_{n,j}]$ bestehen. Zusammen mit (4.48), (4.49) und dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt für alle $R > 0$ und hinreichend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}^x \left(\Lambda^{\lambda\alpha}_{\frac{1}{n}} \big(\tilde{X}(E,\cdot)\, 1_{\tilde{\Omega}_R} \big) \right) &\leq \\
&\leq \tilde{\mathbb{E}}^x \left(\inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \big(\operatorname{diam} \tilde{X}(E_j,\cdot) \big)^{\lambda\alpha} 1_{\tilde{\Omega}_R}(\cdot) \;:\; \{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_n \right\} \right) \\
&\leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{E}}^x \Big(\big(\operatorname{diam} \tilde{X}(E_j,\cdot) \big)^{\lambda\alpha} 1_{\tilde{\Omega}_R}(\cdot) \Big) \;:\; \{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_n \right\} \\
&\leq C(R,\lambda,\nu)^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} |t_{n,j} - r_{n,j}|^{\alpha} \\
&\leq C(R,\lambda,\nu)^{\alpha} \, \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Gehen wir nun auf beiden Seiten dieser Ungleichung zum Grenzwert $n \to \infty$ über, so finden wir mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}^x \left(\Lambda^{\lambda\alpha} \big(\tilde{X}(E,\cdot)\, 1_{\tilde{\Omega}_R} \big) \right) &= \lim_{n\to\infty} \tilde{\mathbb{E}}^x \left(\Lambda^{\lambda\alpha}_{\frac{1}{n}} \big(\tilde{X}(E,\cdot)\, 1_{\tilde{\Omega}_R} \big) \right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left(C(R,\lambda,\nu)^{\alpha} \, \frac{1}{n} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda\alpha \geq \dim \tilde{X}(E,\omega)$ für $\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast alle $\omega \in \tilde{\Omega}_R$ und $R > 0$; betrachten wir schließlich Folgen $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n > \beta$, $\lambda_n \searrow \beta$, und $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha_n > \alpha$, $\alpha_n \searrow \dim E$, dann finden wir, daß auch

$$\beta \dim E = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \alpha_n \geq \dim \tilde{X}(E,\omega)$$

für $\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast alle $\omega \in \tilde{\Omega}_R$, $R > 0$, gilt und die Behauptung folgt aus $R \to \infty$, da $\lim_{R\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{\Omega}_R) = 1$ ist.

Schritt 3. Nunmehr sei $\dim E = 1$. Da wir eine obere Schranke für die Dimension suchen, dürfen wir auf Grund der Isotonie der HAUSDORFF–Dimension

$$\dim \tilde{X}(E,\omega) \leq \dim \tilde{X}([0,1],\omega) \qquad (\omega \in \tilde{\Omega})$$

ohne Einschränkung $E = [0,1]$ annehmen. Mit den Bezeichnungen von oben wählen wir z. B. $E_{n,j} = [r_{n,j}, t_{n,j}]$ mit $r_{n,j} := \frac{j}{n}$ und $t_{n,j} := r_{n,j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, als spezielle $\frac{1}{n}$–Überdeckung von $[0,1]$, auch andere Überdeckungen durch sich nicht überschneidende abgeschlossene Intervalle wären möglich.

Für $\lambda > \beta$, $\alpha = 1$ und hinreichend feine Überdeckungen folgt aus (4.47)

$$\tilde{\mathbb{E}}^x\left((\operatorname{diam}\tilde{X}(E_{n,j},\cdot))^\lambda\, 1_{\tilde{\Omega}_R}\right) \le C(R,\lambda,\nu)\,\frac{1}{n}. \qquad (R>0)$$

Wie in Schritt 2 finden wir dann

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}}^x\left(\Lambda^\lambda_{\frac{1}{n}}\big(\tilde{X}([0,1],\cdot)\,1_{\tilde{\Omega}_R}\big)\right) \le \\
&\le \inf\left\{\sum_{j=0}^\infty \tilde{\mathbb{E}}^x\left(\operatorname{diam}(\tilde{X}(E_{n,j},\cdot))^\lambda\, 1_{\tilde{\Omega}_R}(\cdot)\right) : \{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_n\right\} \\
&\le C(R,\lambda,\nu)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n} = C(R,\lambda,\nu).
\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung hängt nicht von $n \in \mathbb{N}$ ab. Gehen wir daher auf der linken Seite zum Grenzwert $n \to \infty$ über, so erhalten wir mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz

$$\mathbb{E}^x\left(\Lambda^\lambda\big(\tilde{X}([0,1],\cdot)\,1_{\tilde{\Omega}_R}\big)\right) \le C(R,\lambda,\nu) < \infty.$$

Mithin folgt $\Lambda^\lambda\big(\tilde{X}([0,1],\omega)\big) < \infty$ für $\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast alle $\omega \in \tilde{\Omega}_R$, somit $\lambda \ge \dim\tilde{X}([0,1],\omega)$ für $\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast alle $\omega \in \tilde{\Omega}_R$. Wählen wir eine Folge $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n > \beta$, $\lambda_n \searrow \beta$, dann finden wir schließlich

$$\beta = \lim_{n\to\infty}\lambda_n \ge \dim\tilde{X}([0,1],\omega)$$

für $\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast alle $\omega \in \tilde{\Omega}_R$ und die Behauptung folgt wie in Schritt 2 aus $R \to \infty$. ////

In Satz 4.40 wurden nur vergleichbare Prozesse mit Index β strikt kleiner 2 betrachtet. Der Fall $\beta = 2$ bedarf einer gesonderten Behandlung. Dazu schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus, der ein Spezialfall von Theorem 29 in ROGERS [67] ist.

4.42 Lemma. ([67] pp. 53–54, Theorem 29) *Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ erfülle lokal eine* HÖLDER*–Bedingung von der Ordnung $\alpha > 0$,*

$$|f(s) - f(t)| \le c\,|s-t|^\alpha \qquad (s,t \ge 0, |s-t| < \delta)$$

mit von s und t unabhängigen Konstanten $\delta, c > 0$. Dann gilt für alle Teilmengen $E \subset [0,\infty)$ und alle $\lambda > 0$

$$\Lambda^{\lambda/\alpha}\big(f(E)\big) \le c\Lambda^\lambda(E),$$

wobei c die Konstante aus der HÖLDER*–Bedingung ist.*

Ist $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge0} \prec \{X_t\}_{t\ge0}$ nach oben mit einem symmetrischen LÉVY–Prozeß $\{X_t\}_{t\ge0}$ mit Index $\beta = 2$—also im wesentlichen mit einer BROWNschen Bewegung—vergleichbar, und genügen die Vergleichskonstanten den im Satz 3.22(1) genannten Bedingungen, so erfüllt der Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\ge0}$ das KOLMOGOROVsche Kriterium (3.34) ebenso wie $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Für die BROWNsche Bewegung $\{X_t\}_{t\geq 0}$ besteht die Ungleichung (3.34) für alle Kombinationen $\alpha = 2n$ bzw. $\beta = n-1$, $n \in \mathbb{N}$, mit von n unabhängigen Konstanten—vgl. BAUER [5] p. 348, Lemma 40.2—und somit auch für den Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$. Der Satz von KOLMOGOROV–CHENTSOV, [5] p. 345, Korollar 39.5, besagt in diesem Fall, daß die Pfade von $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ fast sicher (lokal) HÖLDER–stetig bis zur Ordnung

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n-1}{2n} \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } n \to \infty$$

sind.

Ohne weitere Rechnung erhalten wir daher aus Lemma 4.42 folgende Aussage.

4.43 Satz. *Es seien $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler symmetrischer* LÉVY*–Prozeß mit Index $\beta = 2$ und $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0} \prec \{X_t\}_{t\geq 0}$ ein damit vergleichbarer* MARKOV*scher Prozeß. Gilt dann für die Vergleichskonstanten*

$$k([0,T],\mathbb{R}^d) \geq c > 0 \qquad \textit{für ein } T > 0$$

und

$$k([0,n],x) \geq c_{n,x} > 0 \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist für alle $E \subset [0,\infty)$

$$\dim \tilde{X}(E,\omega) \leq 2 \dim E \tag{4.50}$$

$\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast sicher erfüllt.

Mit Hilfe von Lemma 4.33 konnten wir aus der Endlichkeit der λ–Variation einer Funktion f über $[0,\delta]$ auf die Endlichkeit des λ–dimensionalen HAUSDORFF–Maßes von $f([0,\delta])$ schließen. Die im zweiten Teil des Beweises von Satz 4.40—wo $\dim E = 1$ vorausgesetzt war—verwendeten Abschätzungen erlauben eine teilweise Umkehrung dieser Schlußweise.

Das folgende Korollar benötigt daher auch keine Wachstumsbedingungen an die Vergleichskonstanten, wie sie etwa bei der entsprechenden Aussage in Satz 4.6 (4.6) oder Korollar 4.10 (4.8) gefordert wurden; insbesondere gilt die Aussage in der Situation von Beispiel 3.17(1).

4.44 Korollar. *Der Prozeß $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ genüge den in Satz 4.40 getroffenen Annahmen. Dann gilt für jede Folge von Partitionen $\mathcal{P} = \{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die im Intervall $[0,1]$ dicht wird,*

$$\underline{\mathrm{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}(\tilde{X}(\cdot,\omega),[0,1]) < \infty \qquad (\lambda > \beta) \tag{4.51}$$

für $\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast alle $\omega \in \tilde{\Omega}$.

Beweis. Im folgenden sei $\Pi_n = \{t_{n,0} = 0 < t_{n,1} < \ldots < t_{n,\pi_n} = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, und

$$\tilde{\Omega}_R := \left\{\omega \in \tilde{\Omega} : \sup_{s\leq 1} |\tilde{X}(s,\omega)| \leq R\right\}$$

wie in Satz 4.40. Wir bestimmen dabei R derart, daß zu fest vorgegebenem $\epsilon > 0$ $\tilde{\mathbb{P}}^x(\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_R) \leq \epsilon$ gilt.

Wählen wir im zweiten Schritt des Beweises von Satz 4.40 als spezielle Überdeckung $\{E_{n,j}\}_{j=1}^{\pi_n}$ die Intervalle, deren Endpunkte mit den Punkten von Π_n übereinstimmen, so finden wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}_\lambda\big(\tilde{X}(\cdot,\omega), \Pi_n, [0,1]\big) &= \sum_{j=1}^{\pi_n} |\tilde{X}(t_{n,j},\omega) - \tilde{X}(t_{n,j-1},\omega)|^\lambda \\
&\leq \sum_{j=1}^{\pi_n} \sup_{s,t \in E_{n,j}} |\tilde{X}(s,\omega) - \tilde{X}(t,\omega)|^\lambda \\
&= \sum_{j=1}^{\pi_n} \big(\operatorname{diam} \tilde{X}(E_{n,j},\omega)\big)^\lambda.
\end{aligned}$$

Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ finden wir dann nach Integration über die Menge $\tilde{\Omega}_R$ mit Hilfe von (4.47)

$$\tilde{\mathbb{E}}^x\Big(\operatorname{var}_\lambda\big(\tilde{X}, \Pi_n, [0,1]\big)\, 1_{\tilde{\Omega}_R}\Big) \leq \sum_{j=1}^{\pi_n} \tilde{\mathbb{E}}^x\Big(\big(\operatorname{diam} \tilde{X}(E_{n,j},\omega)\big)^\lambda\, 1_{\tilde{\Omega}_R}\Big) \leq C(R,\lambda,\nu),$$

wobei die auf der rechten Seite stehende Konstante nicht von der Wahl der Überdeckung abhängt. Eine Anwendung des FATOUschen Lemmas zeigt schließlich

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}^x\Big(\underline{\operatorname{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}\big(\tilde{X}, [0,1]\big)\, 1_{\tilde{\Omega}_R}\Big) &\leq \liminf_{n\to\infty} \tilde{\mathbb{E}}^x\Big(\operatorname{var}_\lambda\big(\tilde{X}, \Pi_n, [0,1]\big)\, 1_{\tilde{\Omega}_R}\Big) \\
&\leq C(R,\lambda,\nu) \ < \ \infty,
\end{aligned}$$

und damit

$$\underline{\operatorname{var}}_{\lambda,\mathcal{P}}\big(\tilde{X}(\omega), [0,1]\big) < \infty$$

für $\tilde{\mathbb{P}}^x$–fast alle $\omega \in \tilde{\Omega}_R$. Da ϵ beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung. ////

Kapitel 5

Eine Darstellungsformel für die Erzeuger subordinierter Halbgruppen

Wir wollen nun den Definitionsbereich der Erzeuger A^f gewisser subordinierter Halbgruppen $\{T_t^f\}_{t\geq 0}$ studieren. Da wir uns in erster Linie für Erzeuger nicht–translationsinvarianter Halbgruppen interessieren, müssen wir die üblichen Techniken—vgl. Berg, Forst, pp. 85–96, §12, insbesondere Theorem 12.16—modifizieren.

Um Aussagen über den Definitionsbereich von A^f zu erhalten, beschreiten wir einen Umweg, indem wir uns zunächst eine Integraldarstellung für die Erzeuger einer Klasse von subordinierten Halbgruppen verschaffen.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist dabei die bekannte Integralformel für gebrochene Potenzen eines Erzeugers A einer Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ auf dem Banach–Raum $\mathcal{X}$,

$$(5.1)\ -(-A)^\alpha u = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_{(0,\infty)} \lambda^{\alpha-1}R(\lambda,A)Au\,d\lambda \qquad (u \in D(A), 0 < \alpha < 1),$$

die auf Balakrishnan [2] p. 420 (2.1) bzw. p. 423 (2.7) zurückgeht. Dort, pp. 429–431, Theorem 5.1, wird auch $-(-A)^\alpha$ als Erzeuger einer subordinierten Halbgruppe erkannt. Siehe hierzu auch Yosida [79] pp. 259–268, Section IX.11.

Für Subordinatoren, deren charakteristischer Exponent f eine vollständige Bernstein–Funktion ist (siehe Definition 5.5), können wir eine (5.1) entsprechende Darstellung angeben.

In einer 1993 erschienenen Arbeit von Chr. Berg, Kh. Boyadzhiev und R. deLaubenfels [7] wird dieselbe Klasse von charakteristischen Exponenten untersucht und—auf etwas anderem Wege—die hier hergeleitete Darstellungsformel (5.10) bewiesen. In [7] finden sich darüber hinaus Resultate, die Satz 5.6, Satz 5.8, Beispiel 5.9 und Bemerkung 5.14 (teilweise) entsprechen.

5.1 Stieltjes–Funktionen und vollständige Bernstein–Funktionen

5.1 Definition. **(1)** Eine Funktion $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt STIELTJES–*Funktion*, wenn eine Zahl $b \geq 0$ und eine Maß μ auf $[0,\infty)$ existieren, so daß

$$\mathcal{S}(\mu)(x) = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{t+x}\,\mu(dt) \qquad (x>0) \tag{5.2}$$

erklärt ist, und g die Darstellung

$$g(x) = b + \mathcal{S}(\mu)(x) = \mathcal{SF}(b,\mu)(x) \tag{5.3}$$

besitzt. Existiert die Inverse von $\mathcal{SF}$, dann schreiben wir dafür $\mathcal{SF}^{-1}$.

(2) Die durch (5.2) erklärte Integraltransformation heißt STIELTJES–*Transformation*. Besitzt das Maß μ eine Dichte m bezüglich des LEBESGUEschen Maßes, so schreiben wir $\mathcal{S}(m)$ statt $\mathcal{S}(\mu)$. Die inverse Transformation bezeichnen wir mit $\mathcal{S}^{-1}$.

5.2 Bemerkung. **(1)** (Vgl. BERG, FORST p. 127) Das Paar (b,μ) aus Definition 5.1 ist eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist die Funktion g durch die Angabe von (b,μ) eindeutig charakterisiert. Genauer gilt

$$b = \lim_{x\to\infty} g(x) \quad \text{und} \quad \mathcal{S}(\mu) = \mathcal{L}\circ\mathcal{L}(\mu),$$

wobei $\mathcal{L}$ für die LAPLACE–Transformation steht.

(2) Integralformeln zur Inversion der STIELTJES–Transformation scheinen nicht bekannt zu sein. Inversionsformeln in Form komplexer Limiten bzw. reeller Limiten von Ableitungen finden sich bei WIDDER [77] pp. 126–128, Theorem 14.1 bzw. p. 144, Theorem 14.4.

Ohne Beweis erwähnen wir noch folgendes Analogon zur Charakterisierung der BERNSTEIN–Funktionen aus Bemerkung 1.7.

5.3 Satz. (WIDDER [76] p. 364, Theorem 17c, p. 366, Theorem 18b) *Eine Funktion $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine* STIELTJES–*Funktion, wenn für alle $x > 0$ und $k \in \mathbb{N}$*

$$g(x) \geq 0 \quad \textit{und} \quad (-1)^{k-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2k-1}\left(x^k g(x)\right) \geq 0$$

gelten.

Das Darstellungsmaß aus Formel (5.2) *ist genau dann endlich, wenn der Grenzwert* $\lim_{x\to\infty}(x(g(x)-b)) < \infty$ *existiert.*

5.4 Beispiel. Für Beispiele von STIELTJES–Funktionen verweisen wir auf die Tabelle in Beispiel 1.8. Dort ist jeweils die inverse Funktion bzw. das Darstellungsmaß angegeben.

Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir eine Teilklasse der BERNSTEIN–Funktionen. Die folgende Definition ist dem Buch von PRÜSS [64] entnommen.

5.5 Definition. ([64], p. 94, nach Definition 4.4) Eine Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt *vollständige* BERNSTEIN–*Funktion*, wenn sie sich in der Form

$$f(x) = x^2 \mathcal{L}\phi(x) \qquad (x > 0)$$

mit einem $\phi \in \mathcal{BF}$ darstellen läßt. Für die Menge der vollständigen BERNSTEIN–Funktionen schreiben wir $\mathcal{CBF}$ und setzen $\mathcal{CBF}_0 := \mathcal{CBF} \cap \mathcal{BF}_0$.

Es gilt $\mathcal{CBF} \subset \mathcal{BF}$; mit einer kurzen Rechung findet man, daß sich die Funktion $f(x) = x^2\mathcal{L}\phi(x)$, wobei $\phi \in \mathcal{BF}$ mit LÉVY–Tripel (a, b, μ) ist, auch als

$$f(x) = b + ax + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-tx}) \int_{(0,\infty)} s^2 \mathrm{e}^{-st}\, \mu(ds)\, dt$$

schreiben läßt, d. h. es ist $f \in \mathcal{BF}$ mit LÉVY–Tripel $\big(b, a, \int_{(0,\infty)} s^2 \mathrm{e}^{-st}\, \mu(ds)\, dt\big)$.

Die Klasse der vollständigen BERNSTEIN–Funktionen und damit verwandter Funktionen wurde—unter verschiedenen Aspekten und mit verschiedenen Bezeichnungen—von einer Reihe von Autoren untersucht, z. B. HERGLOTZ [37], LÖWNER [54], STONE [72] pp. 570–573, HEINZ [36] und die schon oben zitierten PRÜSS [64] und BERG, BOYADZHIEV und DELAUBENFELS [7] (und dort aufgeführte neuere Literatur).

Der folgende Satz gibt verschiedene äquivalente Charakterisierungen der Menge $\mathcal{CBF}$; insbesondere können wir die in den o. g. Quellen betrachteten Funktionenklassen mit $\mathcal{CBF}$ identifizieren.

5.6 Satz. *Für eine Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist eine vollständige* BERNSTEIN–*Funktion.*

(ii) *Die Funktion $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ ist eine* STIELTJES–*Funktion, deren Darstellungsmaß $\tilde{\rho}$ die Bedingung*

$$\int_{(0,1)} \tilde{\rho}(dt) + \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t}\, \tilde{\rho}(dt) < \infty$$

erfüllt.

(iii) *f ist holomorph fortsetzbar auf die längs der negativen reellen Halbachse aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$, positiv auf der positiven Halbachse $(0,\infty)$ und rechtsseitig (reell) stetig in 0,*

$$f(0+) := \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \geq 0.$$

Weiterhin gilt $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ und $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^-$.

(iv) *f besitzt die eindeutig bestimmte Darstellung*

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{[0,\infty)} \frac{tz-1}{t+z}\, \sigma(dt) \qquad (z \in \mathbb{C}^- \cup \{0\})$$

mit einem endlichen Maß σ auf $[0,\infty)$, das der Beziehung

$$\int_{[0,1)} \frac{1}{t}\, \sigma(dt) + \int_{[1,\infty)} \sigma(dt) < \infty$$

genügt, und positiven Konstanten α, β mit $\alpha \geq \int_{[0,\infty)} \frac{1}{t} \sigma(dt)$.

(v) *f besitzt die eindeutig bestimmte Darstellung*

$$f(x) = \alpha + \beta x + \int_{[0,\infty)} \frac{tx-1}{t+x}\, \sigma(dt) \qquad (x \geq 0)$$

mit einem endlichen Maß σ auf $[0,\infty)$, das der Beziehung

$$\int_{[0,1)} \frac{1}{t}\, \sigma(dt) + \int_{[1,\infty)} \sigma(dt) < \infty$$

genügt, und positiven Konstanten α, β mit $\alpha \geq \int_{[0,\infty)} \frac{1}{t} \sigma(dt)$.

(vi) *f ist eine* BERNSTEIN*–Funktion mit der* LÉVY*–Darstellung*

$$f(x) = a + bx + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-sx})\, \mu(ds) \qquad (x \geq 0)$$

mit positiven Konstanten a, b und dem LÉVY*–Maß $\mu(ds) = m(s)ds$. Die Dichte $m(s)$ ist durch*

$$m(s) := \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-ts}\, \rho(dt) \qquad (s > 0)$$

als LAPLACE*–Transformierte eines Maßes ρ auf $(0,\infty)$ gegeben, das die Bedingung*

$$\int_{(0,1)} \frac{1}{t}\, \rho(dt) + \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^2}\, \rho(dt) < \infty$$

erfüllt.

Für den Beweis der Implikation **(iii)** $\Rightarrow$ **(iv)** benötigen wir folgenden, auf HERGLOTZ [37] zurückgehenden Satz.

5.7 Satz. ([37] pp. 508–511, §3) *Eine Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ auf dem komplexen Einheitskreis $\mathbb{E}$ ist genau dann holomorph in $\mathbb{E}$ mit positivem Realteil* $\mathrm{Re}\, f \geq 0$, *wenn f eine Integraldarstellung*

$$f(z) = ic + \int_{(-\pi,\pi]} \frac{\mathrm{e}^{i\psi} + z}{\mathrm{e}^{i\psi} - z}\, \tau(d\psi) \qquad (z \in \mathbb{E}) \tag{5.4}$$

mit einem endlichen Maß τ auf $(-\pi, \pi]$ und der Konstanten $c = \operatorname{Im} f(0) \in \mathbb{R}$ besitzt.Diese Darstellung ist eindeutig.

Beweis von Satz 5.6 Wir zeigen die Äquivalenz der Behauptungen **(i)–(vi)** nach folgendem Schema

$$\textbf{(iii)} \Rightarrow \textbf{(iv)} \Rightarrow \textbf{(v)} \Rightarrow \textbf{(vi)} \Rightarrow \textbf{(i)} \Rightarrow \textbf{(ii)} \Rightarrow \textbf{(iii)}.$$

Der Beweis der ersten Implikation verwendet eine Verallgemeinerung von Satz 5.7, die sich bei STONE [72] pp. 573–575, Theorem 10.35 findet und Techniken von HEINZ [36] p. 423, Hilfssatz 5. Im folgenden wiederholen wir diese Argumente.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** (STONE & HEINZ) Die CAYLEY–Abbildung $h : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$

$$h : z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \quad \text{bzw.} \quad h^{-1} : w \mapsto i\,\frac{1+w}{1-w}$$

ist eine biholomorphe Abbildung der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ auf den Einheitskreis $\mathbb{E}$, die stetig fortsetzbar bis zum Rand ist. Es gilt $h(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{E}$. (Vgl. REMMERT [66] pp. 60–61.)

Ist f eine Funktion, die **(iii)** genügt, so ist

$$\mathbb{E} \ni w \mapsto \phi(w) := \frac{1}{i} f(h^{-1}(w))$$

eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{E}$, deren Realteil

$$\operatorname{Re}\phi(w) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i} f(h^{-1}(w))\right) = \operatorname{Im} f(h^{-1}(w)) \geq 0$$

positiv ist, da $\operatorname{Im} h^{-1}(w) > 0$ gilt.

Für $w = h(z)$, $z \in \mathbb{H}$, erhalten wir mit Hilfe von Satz 5.7

$$f(z) = i\phi(h(z)) = -c + \int_{(-\pi,\pi]} i\,\frac{\mathrm{e}^{i\psi} + h(z)}{\mathrm{e}^{i\psi} - h(z)}\,\tau(d\psi).$$

Wir führen nun gemäß $\mathrm{e}^{i\psi} = h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, neue Koordinaten ein; setzen wir $g(\psi) := h^{-1}(\mathrm{e}^{i\psi})$, dann erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$f(z) = -c + g(\tau)(\{+\infty\})z + \int_{(-\infty,\infty)} \frac{tz+1}{t-z}\,g(\tau)(dt).$$

Mit den Bezeichnungen $\alpha := -c$, $\beta := g(\tau)(\{+\infty\})$ und $\tilde{\sigma}(dt) := g(\tau)(dt)$ gilt also

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{(-\infty,\infty)} \frac{tz+1}{t-z}\,\tilde{\sigma}(dt) \qquad (z \in \mathbb{H}) \tag{5.5}$$

zunächst für $z \in \mathbb{H}$ und wegen $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ auch für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Die Eindeutigkeit der Darstellung (5.5) ergibt sich aus der Eindeutigkeitsaussage im HERGLOTZschen Satz 5.7 und der Bijektivität der CAYLEY–Transformation.

Wir zeigen nun, daß $\operatorname{supp}\tilde{\sigma} \subset (-\infty, 0]$ gilt. Dazu wählen wir zwei Punkte $q \geq p \geq 0$, die keine Atome des Maßes $\tilde{\sigma}$ sind. Für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ finden wir

$$\begin{aligned}
&\int_{[p,q]} \operatorname{Im} f(x+iy)\, dx = \\
&= \beta y + \int_{[p,q]} \int_{(-\infty,\infty)} \operatorname{Im} \frac{tz+1}{t-z}\, \tilde{\sigma}(dt)\, dx \\
&= \beta y + \int_{[p,q]} \int_{(-\infty,\infty)} \frac{t^2 y + y}{(t-x)^2 + y^2}\, \tilde{\sigma}(dt)\, dx \\
&= \beta y + \int_{(-\infty,\infty)} (t^2+1) \int_{[p-t,q-t]} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, \tilde{\sigma}(dt) \\
&= \beta y + \int_{(-\infty,\infty)} (t^2+1) \Big(\arctan \frac{q-t}{y} - \arctan \frac{p-t}{y} \Big)\, \tilde{\sigma}(dt).
\end{aligned}$$

Der Übergang zum Grenzwert $y \to 0$ und das FATOUsche Lemma—der Integrand auf der rechten Seite ist positiv—zeigen

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to 0} \int_{[p,q]} \operatorname{Im} f(x+iy)\, dx = \\
&= \liminf_{y\to 0} \int_{(-\infty,\infty)} (t^2+1) \Big(\arctan \frac{q-t}{y} - \arctan \frac{p-t}{y} \Big)\, \tilde{\sigma}(dt) \\
&\geq \Big(\int_{(-\infty,p)} + \int_{[p,q]} + \int_{(q,\infty)} \Big) \Big\{ (t^2+1) \lim_{y\to 0} \Big(\arctan \frac{q-t}{y} - \arctan \frac{p-t}{y} \Big) \Big\} \tilde{\sigma}(dt) \\
&= \int_{[p,q]} \pi (t^2+1)\, \tilde{\sigma}(dt).
\end{aligned}$$

Da die Funktion $(x, y) \mapsto \operatorname{Im} f(x+iy)$ stetig und $[p, q] \subset [0, \infty)$ kompakt ist, finden wir schließlich

$$0 \leq \pi \int_{[p,q]} (t^2+1)\, \tilde{\sigma}(dt) \leq \int_{[p,q]} \lim_{y\to 0} \operatorname{Im} f(x+iy)\, dx = 0. \tag{5.6}$$

Als endliches Maß besitzt $\tilde{\sigma}$ höchstens abzählbar viele Atome; daher gilt (5.6) für alle p, q in einer dichten Teilmenge von $[0, \infty)$ und somit $\tilde{\sigma}|_{(0,\infty)} = 0$.

Bezeichnen wir das am Ursprung gespiegelte Maß $\tilde{\sigma}$ mit σ, so erhalten wir

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{[0,\infty)} \frac{tz-1}{t+z}\, \sigma(dt) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}). \tag{5.7}$$

Wegen der Endlichkeit von σ gilt diese Darstellung auch für $z \in (0, \infty)$.

Für $x \in (0, 1)$ finden wir

$$|f(x) - \beta x - \alpha| \;=\; \Big| \int_{[0,\infty)} \frac{tx-1}{t+x}\, \sigma(dt) \Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \; \Big|\int_{[0,1)} \frac{1-tx}{t+x}\,\sigma(dt)\Big| - \Big|\int_{[1,\infty)} \frac{tx-1}{t+x}\,\sigma(dt)\Big| \\
&\geq \; \int_{[0,1)} \frac{1-tx}{t+x}\,\sigma(dt) - \int_{[1,\infty)} \Big|\frac{tx-1}{t+x}\Big|\,\sigma(dt).
\end{aligned}
$$

Berücksichtigt man, daß für $t \geq 1$ und $0 < x < 1$ die Abschätzungen

$$
\Big|\frac{tx-1}{t+x}\Big| \leq \frac{tx+1}{t+x} \leq \frac{tx+t}{t+x} \leq \frac{(t+x)(x+1)}{(t+x)} = x+1
$$

bestehen, so ist

$$
|f(x) - \beta x - \alpha| \geq \int_{[0,1)} \frac{1-tx}{t+x}\,\sigma(dt) - (x+1)\int_{[1,\infty)} \sigma(dt).
$$

Mit $x \to 0$ und dem Lemma von Fatou erhalten wir daher

$$
\begin{aligned}
|f(0+) - \alpha| \;&\geq\; \liminf_{x\to 0} \int_{[0,1)} \frac{1-tx}{t+x}\,\sigma(dt) - \int_{[1,\infty)} \sigma(dt) \\
&\geq\; \int_{[0,1)} \liminf_{x\to 0} \frac{1-tx}{t+x}\,\sigma(dt) - \int_{[1,\infty)} \sigma(dt) \\
&=\; \int_{[0,1)} \frac{1}{t}\,\sigma(dt) - \int_{[1,\infty)} \sigma(dt)
\end{aligned}
$$

und damit auch $\int_{[0,1)} \frac{1}{t}\,\sigma(dt) + \int_{[1,\infty)} \sigma(dt) < \infty$. Da $f(0+) \geq 0$ ist, folgt aus (5.7) unmittelbar $\alpha \geq \int_{[0,\infty)} \frac{1}{t}\,\sigma(dt) \geq 0$, und somit **(iv)**.

(iv) $\Rightarrow$ **(v)** Offensichtlich.

(v) $\Rightarrow$ **(vi)** Wir setzen

$$
a := \alpha - \int_{[0,\infty)} \frac{1}{s}\,\sigma(ds) \geq 0, \quad b := \beta \geq 0
$$

und

$$
\mu(dt) := m(t)\,dt := \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-st}(s^2+1)\,\sigma(ds)\,dt,
$$

wobei α, β die Konstanten und σ das Darstellungsmaß aus **(v)** sind.

Das Maß μ ist per definitionem absolutstetig bezüglich des Lebesgue–Maßes; die Dichte $m(t)$ ist die Laplace–Transformierte des Maßes $\rho(ds) := (s^2+1)\sigma(ds)$ auf $[0,\infty)$. Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
&\int_{(0,1)} t\,\mu(dt) + \int_{[1,\infty)} \mu(dt) \;= \\
&= \int_{(0,1)} \int_{[0,\infty)} t\mathrm{e}^{-st}(s^2+1)\,\sigma(ds)\,dt + \int_{[1,\infty)} \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-st}(s^2+1)\,\sigma(ds)\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,\infty)} \int_{(0,1)} t\mathrm{e}^{-st}(s^2+1)\,dt\,\sigma(ds) + \int_{[0,\infty)} \int_{[1,\infty)} \mathrm{e}^{-st}(s^2+1)\,dt\,\sigma(ds) \\
&= \int_{[0,\infty)} \left[-(st+1)\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\right]_{t=0}^{t=1} (s^2+1)\,\sigma(ds) + \int_{[0,\infty)} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]_{t=1}^{t=\infty} (s^2+1)\,\sigma(ds) \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{s^2+1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-s})\,\sigma(ds).
\end{aligned}
$$

Im Bereich $1 \leq s < \infty$ ist der Integrand $\frac{s^2+1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-s})$ stetig, mithin wegen $\lim_{s\to\infty} \frac{s^2+1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-s}) = 1$ durch eine Konstante $c > 0$ beschränkt. Für $0 \leq s < 1$ finden wir

$$
(s^2+1)\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s^2} \leq 2\,\frac{s}{s^2} = \frac{2}{s}
$$

und somit

$$
\int_{(0,1)} t\,\mu(dt) + \int_{[1,\infty)} \mu(dt) \leq 2\int_{[0,1)} \frac{1}{s}\,\sigma(ds) + c\int_{[1,\infty)} \sigma(ds) < \infty.
$$

Es bleibt zu zeigen, daß das Lévy–Tripel (a, b, μ) die Funktion f darstellt. Nach Voraussetzung gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha + \beta x + \int_{[0,\infty)} \frac{sx-1}{s+x}\,\sigma(ds) \\
&= \left(\alpha - \int_{[0,\infty)} \frac{1}{s}\,\sigma(ds)\right) + \beta x + \int_{[0,\infty)} \frac{x(s^2+1)}{s(s+x)}\,\sigma(ds) \\
&= \left(\alpha - \int_{[0,\infty)} \frac{1}{s}\,\sigma(ds)\right) + \beta x + \int_{[0,\infty)} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+x}\right)(s^2+1)\sigma(ds) \\
&= a + bx + \int_{(0,\infty)} \int_{[0,\infty)} (\mathrm{e}^{-st} - \mathrm{e}^{-(s+x)t})\,(s^2+1)\sigma(ds)\,dt \\
&= a + bx + \int_{(0,\infty)} (1-\mathrm{e}^{-xt})\,(s^2+1)\,m(t)dt \\
&= a + bx + \int_{(0,\infty)} (1-\mathrm{e}^{-xt})\,(s^2+1)\,\mu(dt)
\end{aligned}
$$

Die Integrationseigenschaften des Maßes $\rho(ds) := (s^2+1)\sigma(ds)$ ergeben sich schließlich aus

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,1)} \frac{1}{s}\,\rho(ds) + \int_{[1,\infty)} \frac{1}{s^2}\,\rho(ds) &= \int_{[0,1)} \frac{s^2+1}{s}\,\sigma(ds) + \int_{[1,\infty)} \frac{s^2+1}{s^2}\,\sigma(ds) \\
&\leq 2\int_{[0,1)} \frac{1}{s}\,\sigma(ds) + 2\int_{[1,\infty)} \sigma(ds) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Insbesondere gilt $\rho(\{0\}) = 0$ und wir identifizieren ρ mit $\rho|_{(0,\infty)}$.

(vi) $\Rightarrow$ **(i)** Auf Grund der in **(vi)** vorausgesetzten Eigenschaften des Maßes ρ gilt

$$\int_{(0,1)} s\Big(\frac{1}{s^2}\rho\Big)(ds) + \int_{[1,\infty)} \Big(\frac{1}{s^2}\rho\Big)(ds) < \infty,$$

d. h. $(b, a, s^{-2}\rho(ds))$ ist ein LÉVY–Tripel und

$$\phi(x) := b + ax + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-sx})\,\frac{1}{s^2}\rho(ds)$$

eine BERNSTEIN–Funktion. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
x^2\mathcal{L}\phi(x) &= \\
&= x^2 \int_{(0,\infty)} \Big(b + at + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-st})\,\frac{1}{s^2}\rho(ds)\Big)\mathrm{e}^{-tx}\,dt \\
&= x^2 \int_{(0,\infty)} b\,\mathrm{e}^{-tx}\,dt + x^2 \int_{(0,\infty)} at\mathrm{e}^{-tx}\,dt + x^2 \int_{(0,\infty)} \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-st})\mathrm{e}^{-tx}\,dt\,\frac{1}{s^2}\rho(ds) \\
&= bx + a + x^2 \int_{(0,\infty)} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{s+x}\Big)\,\frac{1}{s^2}\rho(ds) \\
&= a + bx + \int_{(0,\infty)} \Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+x}\Big)\,\rho(ds) \\
&= a + bx + \int_{(0,\infty)} \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-tx})\mathrm{e}^{-st}\,\rho(ds)\,dt \\
&= a + bx + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-tx})m(t)\,dt \\
&= f(x),
\end{aligned}$$

woraus $f \in \mathcal{CBF}$ folgt.

(i) $\Rightarrow$ **(ii)** Für jede differenzierbare Funktion $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, deren LAPLACE–Transformierte existiert, erhalten wir durch partielle Integration

$$x\mathcal{L}(g)(x) = g(0+) + \mathcal{L}(g')(x).$$

Insbesondere gilt für ϕ aus Punkt **(i)**

$$\frac{f(x)}{x} = x\mathcal{L}(\phi)(x) = \phi(0+) + \mathcal{L}(\phi')(x) = b + \mathcal{L}(\phi')(x).$$

Nach Voraussetzung ist ϕ eine BERNSTEIN–Funktion, somit ist ϕ' eine vollständig monotone Funktion und nach dem Satz von BERNSTEIN die LAPLACE–Transformierte eines geeigneten Maßes $\tilde{\rho}$ auf $[0,\infty)$ (BERG, FORST [6] p. 62, Theorem 9.3).

Hier gilt $\tilde{\rho}(ds) = s^{-1}\rho(ds) + a\epsilon_0$, und damit

$$\frac{f(x)}{x} = b + \int_{[0,\infty)} \frac{1}{s+x}\,\tilde{\rho}(ds) = \frac{a}{x} + b + \int_{(0,\infty)} \frac{1}{s(s+x)}\,\rho(ds),$$

d. h. $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ ist eine STIELTJES–Funktion.

Die Integrationseingenschaften des Maßes $\tilde{\rho}(ds)$ folgen aus der Tatsache, daß $s^{-2}\rho(ds)$ ein LÉVY–Maß ist:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1)} \tilde{\rho}(ds) + \int_{[1,\infty)} \frac{1}{s}\,\tilde{\rho}(ds) &= a + \int_{(0,1)} \frac{1}{s}\,\rho(ds) + \int_{[1,\infty)} \frac{1}{s^2}\,\rho(ds) \\
&= a + \int_{(0,1)} s\Big(\frac{1}{s^2}\rho\Big)(ds) + \int_{[1,\infty)} \Big(\frac{1}{s^2}\rho\Big)(ds) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

(ii) ⇒ (iii) Entsprechend unserer Annahme besitzt f die Darstellung

$$f(x) = a + bx + \int_{(0,\infty)} \frac{x}{s(s+x)}\,\rho(ds) \qquad (x > 0). \tag{5.8}$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}^- \cup \{0\}$ gilt

$$\Big|\frac{z}{s(s+z)}\Big| = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(s+x)^2+y^2}}.$$

Es sei $\epsilon > 0$ fest vorgegeben. Ist z in einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C}^- \cup \{0\}$ mit $\operatorname{dist}(K, (-\infty, 0)) > \epsilon$ enthalten, so gelten für $x \geq 0$ und $y \in \mathbb{R}$ die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(s+x)^2+y^2}} &\leq \frac{1}{s} && (0 \leq s \leq 2\epsilon), \\
\frac{1}{s}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(s+x)^2+y^2}} &\leq \frac{1}{s}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(s+x)^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{s(s+x)} \leq \frac{c(K)}{s(s+x)} && (s > 2\epsilon)
\end{aligned}$$

und für $x \leq 0$ und $y \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(s+x)^2+y^2}} &\leq \frac{1}{s}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}} \leq \frac{c'(K,\epsilon)}{s} && (0 \leq s \leq 2|x|) \\
\frac{1}{s}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(s+x)^2+y^2}} &\leq \frac{1}{s}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(s/2)^2+y^2}} \leq \frac{2}{s}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(s^2+y^2)}} \leq \frac{c''(K)}{s(s+|y|)} && (s > 2|x|).
\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{dist}(z, (-\infty, 0)) > \epsilon$ konvergiert für $z \in K$ das Integral

$$\int_{(0,\infty)} \Big|\frac{z}{s(s+z)}\Big|\,\rho(ds),$$

und es ist—da $\epsilon > 0$ und K beliebig gewählt waren—f(z) eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}^-$.

Die mit x indizierte Familie von Funktionen $s \mapsto \frac{x}{s(s+x)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+x}$ steigt mit $x \to 0$ gegen 0 ab; somit erhalten wir aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, daß

$$f(0+) = \lim_{x\to 0+} f(x) = a \geq 0$$

gilt, was die rechtsseitige (reelle) Stetigkeit von f im Ursprung zeigt.

Schließlich gilt

$$\overline{f(z)} = \overline{bz + \int_{[0,\infty)} \frac{z}{s+z}\,\tilde{\rho}(ds)} = b\overline{z} + \int_{[0,\infty)} \frac{\overline{z}}{s+\overline{z}}\,\tilde{\rho}(ds) = f(\overline{z}),$$

und aus

$$\operatorname{Im} f(z) = b \operatorname{Im} z + \int_{[0,\infty)} \operatorname{Im}\Big(\frac{z}{s+z}\Big)\tilde{\rho}(ds) = b \operatorname{Im} z + \int_{[0,\infty)} \frac{s \operatorname{Im} z}{|s+z|^2}\,\tilde{\rho}(ds)$$

folgt $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geq 0$ und auch **(iii)**.

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht. ////

Mit

$$S_\phi := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\psi}, r \geq 0, 0 \leq \psi \leq \phi\} & \text{für } \phi \in [0,\pi) \\ \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\psi}, r \geq 0, \phi \leq \psi \leq 0\} & \text{für } \phi \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

bezeichnen wir einen Kegel in $\mathbb{C}$ mit Öffnungswinkel ϕ zur positiven reellen Halbachse.

5.8 Satz. (1) *Die Menge der vollständigen* Bernstein*–Funktionen ist ein konvexer Kegel, der unter der Komposition von Abbildungen und unter punktweisen Limiten von Funktionenfolgen abgeschlossen ist.*

(2) *Für $f \in \mathcal{CBF}$ und $\phi \in [0,\pi)$ gilt $f(S_\phi) \subset S_\phi$.*

(3) *Es sei $h : (0,\infty) \to [0,\infty]$ eine stetige Funktion, deren rechtsseitiger Grenzwert in 0 (ggf. uneigentlich) existiert.*

Läßt sich h für einen Winkel $|\phi| \in (0,\pi)$ zu einer biholomorphen Funktion $h : \mathbb{H} \to S_\phi$ fortsetzen, so gilt für alle $f \in \mathcal{CBF}$, daß auch die Funktion $h^{-1} \circ f \circ h$ in $\mathcal{CBF}$ enthalten ist.

Beweis. Zu (1): Per definitionem besitzen Funktionen $f \in \mathcal{CBF}$ eine Darstellung $f(x) = x^2 \mathcal{L}\phi(x)$ mit einem geeigneten $\phi \in \mathcal{BF}$. Mithin ist die Funktion $x \mapsto x^{-2} f(x)$ vollständig monoton (im Sinne der Defintion 9.1 in Berg, Forst [6] p. 61). Da die vollständig monotonen Funktionen einen konvexen Kegel bilden ([6] p. 61), der unter punktweiser Konvergenz abgeschlossen ist ([6] p. 63, Proposition 9.5), übertragen sich diese Eigenschaften auch auf die Menge $\mathcal{CBF}$.

Sind $f, g \in \mathcal{CBF}$, so ist wegen $\operatorname{Re} g \geq 0$ die Komposition $f \circ g$ wohldefiniert und erfüllt mit f und g die in Satz 5.6 **(i)** genannten Kriterien, d. h. $f \circ g \in \mathcal{CBF}$.

Zu (2): Nach Satz 5.6 **(vi)** besitzt jede Funktion $f \in \mathcal{CBF}$ eine Darstellung

$$f(z) = bz + \int_{[0,\infty)} \frac{z}{s+z} \, \tilde{\rho}(ds) \qquad (z \in \mathbb{C}^-).$$

mit einem positiven Maß $\tilde{\rho}$ auf $[0,\infty)$ und $b \geq 0$.

Offensichtlich gilt für die Funktion

$$\mathbb{H} \cup [0,\infty) \ni z \mapsto bz,$$

daß Punkte aus S_ϕ wieder auf solche abgebildet werden. Wegen

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{s+z}\right) = \frac{sy}{(s+x)^2+y^2} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{s+z}\right) = \frac{sx+x^2+y^2}{(s+x)^2+y^2}$$

und

$$|\arctan\left(\arg\left(\frac{z}{s+z}\right)\right)| = |\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{z}{s+z}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{z}{s+z}\right)}| = |\frac{y}{x}|\frac{s}{s+x+y^2/x} \leq |\frac{y}{x}| = |\arctan(\arg z)|$$

gilt das auch für die Funktion $z \mapsto \frac{z}{s+z}$, und somit für f.

Zu (3): Mit Hilfe des SCHWARZschen Spiegelungssatzes, vgl. REMMERT [66] p. 254, läßt sich h durch

$$\tilde{h}(z) := \begin{cases} \overline{h(\overline{z})}, & \overline{z} \in \mathbb{H} \cup (0,\infty) \\ h(z), & z \in \mathbb{H} \cup (0,\infty) \end{cases}$$

holomorph nach $\mathbb{C}^-$ fortsetzen. Im folgenden werden wir wieder h für diese Fortsetzung schreiben.

Nach Voraussetzung gilt für ein $\phi \in (-\pi, 0) \cup (0,\pi)$

$$h(\pm\mathbb{H} \cup (0,\infty)) \subset S_{\pm\phi},$$

und nach Teil **(2)**

$$f(S_{\pm\phi}) \subset S_{\pm\phi}.$$

Somit ist für $z \in \mathbb{C}^-$ die Funktion $g : z \mapsto h^{-1} \circ f \circ h(z)$ wohldefiniert und es gilt $g(\pm\mathbb{H}) \subset \pm\mathbb{H}$, d. h.

$$\operatorname{Im} z \operatorname{Im} g(z) \geq 0 \qquad (z \in \mathbb{C}^-).$$

Auf Grund der rechtsseitigen Stetigkeit in 0 finden wir

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} h^{-1} \circ f \circ h(x) = h^{-1} \circ f \circ h(0+) \geq 0.$$

Da im Falle $h(0+) = +\infty$ und $f(+\infty) = +\infty$ auch $h^{-1}(+\infty) = 0+$ gilt, ist dieser Limes stets endlich.

Somit erfüllt g die in Satz 5.6 **(i)** genannten Kriterien, d. h. $g \in \mathcal{CBF}$. ////

5.9 Beispiel. **(1)** Für Beispiele von vollständigen Bernstein–Funktionen verweisen wir auf Kapitel 1, Beispiel 1.8.

(2) Mit $f \in \mathcal{CBF}$ sind auch die Funktionen

$$x \mapsto \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad x \mapsto \left(f(\sqrt{x})\right)^2, \quad x \mapsto \left(f(x^\alpha)\right)^{1/\alpha} \qquad (-1 \le \alpha \le 1, \alpha \ne 0)$$

vollständige Bernstein–Funktionen.

Bei gebrochenen Potenzen komplexer Zahlen wählen wir dabei stets den *Hauptzweig*, d. h. für $z = |z|\mathrm{e}^{i\phi} \in \mathbb{C}^-$ ist

$$z^\alpha := |z|^\alpha \mathrm{e}^{i\alpha\phi} \qquad (-1 \le \alpha \le 1).$$

5.2 Eine Integraldarstellung des Erzeugers einer subordinierten Halbgruppe

In diesem Abschnitt werden wir uns mit Funktionen $f(-A)$ eines infinitesimalen Erzeugers A einer C_0-Halbgruppe beschäftigen, die wiederum Operatoren–Halb-gruppen erzeugen. Daher beschränken wir uns auf die Betrachtung von $f \in \mathcal{CBF}_0$, also auf vollständige Bernstein–Funktionen mit $f(0+) = 0$. Da $f(0+) > 0$ der Darstellungsformel von Satz 1.16 nur den Term $f(0+)u$, $u \in D(A)$, hinzufügen würde—siehe hierzu die Originalarbeit von Phillips [62] pp. 362–363, Theorem 4.3—ist diese Annahme aus funktionalanalytischer Sicht keine echte Einschränkung. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie besagt $f(0+) > 0$, daß f der charakteristische Exponent einer Halbgruppe von *Sub*–Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

Vorab erinnern wir nochmals an einige Begriffe aus Kapitel 1. Mit $\{T_t\}_{t\ge 0}$ bezeichnen wir im folgenden eine C_0–Halbgruppe von Operatoren auf einem Banach–Raum $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$; für ihren infinitesimalen Erzeuger schreiben wir $(A, D(A))$. Die Halbgruppe genüge der Beziehung (1.1),

$$\mathrm{e}^{\omega_0 t} \le \|T_t\| \le M\,\mathrm{e}^{\overline{\omega}_0 t} \qquad (t \ge 0)$$

mit $\omega_0 = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log \|T_t\|$, $\overline{\omega}_0 > \omega_0$ und $M = M(\overline{\omega}_0)$. Für Kontraktionshalbgruppen ist stets $\overline{\omega}_0 := 0$ und $M := 1$. Für die Resolventenmenge von A gilt $\rho(A) \supset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > \omega_0\}$, für die der Erzeuger von Kontraktionshalbgruppen $\rho(A) \supset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

5.10 Satz. *Es seien $\{T_t\}_{t\ge 0}$ eine C_0–Halbgruppe von Operatoren mit Erzeuger A und $\{\mu_t\}_{t\ge 0}$ ein zulässiger Subordinator, der für ein $\overline{\omega}_0 > \omega_0$ die Funktion $s \mapsto \mathrm{e}^{s\overline{\omega}_0}$ integriert.*

Ist der charakteristische Exponent f des Subordinators eine vollständige BERNSTEIN*–Funktion mit der Darstellung*

$$\begin{aligned} f(x) &= bx + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) m(\lambda)\, d\lambda \qquad (x > 0), \\ m(\lambda) &= \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda}\, \rho(dt) \qquad (\lambda > 0), \end{aligned}$$

wo $b \geq 0$ und ρ ein Maß auf $(0,\infty)$ ist mit $\int_{(0,1)} \frac{1}{t}\, \rho(dt) + \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^2}\, \rho(dt) < \infty$, dann gilt bereits

$$(5.9) \qquad \rho|_{(0,\overline{\omega}_0]} = 0 \quad \textit{und} \quad \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]} \frac{1}{t-\overline{\omega}_0}\, \rho(dt) + \int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{1}{(t-\overline{\omega}_0)^2}\, \rho(dt) < \infty,$$

und der Erzeuger der subordinierten Halbgruppe $\{T_t^f\}_{t\geq 0}$ läßt sich durch das Integral

$$(5.10) \qquad A^f u = bAu + \int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} \frac{1}{\lambda} AR(\lambda, A) u\, \rho(d\lambda) \qquad (u \in D(A))$$

darstellen.

Beweis. Zunächst untersuchen wir die Integrationseigenschaften des Maßes ρ.

Da der Subordinator $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ die Funktion $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\overline{\omega}_0}$ integriert, gilt nach Satz 5.13**(iv)** $\int_{(1,\infty)} \mathrm{e}^{\lambda\overline{\omega}_0} m(\lambda)\, d\lambda < \infty$. Für das Maß ρ finden wir daher

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{(1,\infty)} \mathrm{e}^{\lambda\overline{\omega}_0} m(\lambda)\, d\lambda \\ &= \int_{(1,\infty)} \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{\lambda(\overline{\omega}_0 - t)}\, \rho(dt)\, d\lambda \\ &= \int_{(0,\infty)} \int_{(1,\infty)} \mathrm{e}^{\lambda(\overline{\omega}_0 - t)}\, d\lambda\, \rho(dt) \\ &\geq \left(\int_{(0,\overline{\omega}_0]} + \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]} \right) \left[\frac{1}{\overline{\omega}_0 - t} \mathrm{e}^{\lambda(\overline{\omega}_0 - t)} \right]_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \rho(dt), \end{aligned}$$

was einerseits $\rho|_{(0,\overline{\omega}_0]} = 0$ und andererseits $\int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1)} \frac{1}{t-\overline{\omega}_0}\, \rho(dt) < \infty$ impliziert.

Für $t \geq \overline{\omega}_0 + 1$ besteht die Ungleichung

$$(5.11) \qquad \frac{1}{t - \overline{\omega}_0} \leq \frac{\overline{\omega}_0 + 1}{t} \qquad (t \geq \overline{\omega}_0 + 1).$$

Damit finden wir

$$\int_{[\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{1}{(t-\overline{\omega}_0)^2}\, \rho(dt) \leq (\overline{\omega}_0 + 1)^2 \int_{[\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{1}{t^2}\, \rho(dt) < \infty,$$

woraus (5.9) folgt.

Mit Hilfe der Resolventenabschätzung (1.4) und der Ungleichung (1.8) finden wir für $u \in D(A)$

$$\begin{aligned}
&\Big\| \int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} \frac{1}{\lambda} AR(\lambda,A)u\,\rho(d\lambda)\Big\| \ \le \\
&\le \ \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]} \frac{1}{\lambda}\|AR(\lambda,A)u\|\,\rho(d\lambda) + \int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{1}{\lambda}\,\|AR(\lambda,A)u\|\,\rho(d\lambda) \\
&\le \ \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]} \Big(\frac{M}{\lambda-\overline{\omega}_0} + \frac{1}{\lambda}\Big)\|u\|\,\rho(d\lambda) + \int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{M}{\lambda(\lambda-\overline{\omega}_0)}\,\|Au\|\,\rho(d\lambda) \\
&\le \ \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]} \frac{M+1}{\lambda-\overline{\omega}_0}\,\rho(d\lambda)\,\|u\| + \int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{M}{(\lambda-\overline{\omega}_0)^2}\,\rho(d\lambda)\,\|Au\| \ < \ \infty;
\end{aligned}$$

bei der letzten Abschätzung ging (5.9) ein. Diese Überlegung zeigt, daß der in (5.10) auf der rechten Seite stehende Ausdruck (als Bochner–Integral) wohldefiniert ist.

Um die behauptete Gleichheit zu sehen, verwenden wir Phillips Darstellung des Operators A^f aus Satz 1.16

$$\begin{aligned}
A^f u \ &= \ bAu + \int_{(0,\infty)} (T_\lambda u - u)m(\lambda)\,d\lambda \\
&= \ bAu + \int_{(0,\infty)}\int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} (T_\lambda u - u)\mathrm{e}^{-t\lambda}\,\rho(dt)\,d\lambda, \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

wobei wir die Darstellung von $f \in \mathcal{CBF}_0$ und $\rho|_{(0,\overline{\omega}_0]} = 0$ ausnutzten. Wir wollen nun die Reihenfolge der Integration in (5.12) vertauschen. Dazu weisen wir die absolute Konvergenz der iterierten Integrale nach. Wegen

$$T_\lambda u - u = \int_{(0,\lambda)} AT_t u\,dt \qquad (\lambda \ge 0, u \in D(A))$$

gilt

$$\|T_\lambda u - u\| \le M \int_{(0,\lambda)} \mathrm{e}^{t\overline{\omega}_0}\,dt\,\|Au\| \le M\lambda \mathrm{e}^{t\overline{\omega}_0}\,\|Au\|$$

und wir finden

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)}\int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} \|(T_\lambda u - u)\|\,\mathrm{e}^{-t\lambda}\,\rho(dt)\,d\lambda \ = \\
&= \ \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]}\int_{(0,\infty)} \|(T_\lambda u - u)\|\,\mathrm{e}^{-t\lambda}\,d\lambda\,\rho(dt) + \\
&\qquad + \int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)}\int_{(0,\infty)} \|(T_\lambda u - u)\|\,\mathrm{e}^{-t\lambda}\,d\lambda\,\rho(dt) \\
&\le \ \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]}\int_{(0,\infty)} (1 + M\mathrm{e}^{\lambda\overline{\omega}_0})\,\mathrm{e}^{-t\lambda}\,d\lambda\,\rho(dt)\,\|u\| + \\
&\qquad + \int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)}\int_{(0,\infty)} M\lambda\,\mathrm{e}^{(\overline{\omega}_0-t)\lambda}\,d\lambda\,\rho(dt)\,\|Au\| \\
&= \ \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]} \Big(\frac{1}{t} + \frac{M}{t-\overline{\omega}_0}\Big)\,\rho(dt)\,\|u\| + \int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{M}{(t-\overline{\omega}_0)^2}\,\rho(dt)\,\|Au\| \ < \ \infty,
\end{aligned}$$

wobei wir wiederum (5.9) verwendeten.

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge in (5.12) ergibt unter Beachtung der Integralformel (1.7) der Resolvente

$$\begin{aligned} A^f u &= bAu + \int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} \int_{(0,\infty)} (T_\lambda u - u) \mathrm{e}^{-t\lambda}\, d\lambda\, \rho(dt) \\ &= bAu + \int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} \Big(R(t,A) - \frac{1}{t} \Big) u\, \rho(dt). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung, da für $u \in D(A)$ und $t \in \rho(A)$

$$\begin{aligned} \Big(R(t,A) - \frac{1}{t} \Big) u &= \frac{1}{t} \Big(tR(t,A) - 1 \Big) u \\ &= \frac{1}{t} \Big(tR(t,A) - (t-A)R(t,A) \Big) u \\ &= \frac{1}{t} AR(t,A) u \end{aligned}$$

gilt. ////

Mit Hilfe der verschiedenen Integralformeln für $f \in \mathcal{CBF}_0$ aus Satz 5.6 können wir eine weitere Darstellung für den Operator A^f angeben.

5.11 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.10 gilt*

$$A^f u = bAu + \int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} AR(\lambda,A) u\ \mathcal{S}^{-1}_{x\to\lambda} \Big(\frac{f(x)}{x} - b \Big)(\lambda)\, d\lambda \tag{5.13}$$

für alle $u \in D(A)$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Satz 5.6 ist $\mathcal{S}^{-1}_{x\to\lambda}\Big(\frac{f(x)}{x} - b\Big)(\lambda)\, d\lambda$ das Darstellungsmaß $\tilde\rho(d\lambda)$ der STIELTJES–Funktion $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$,

$$\frac{f(x)}{x} = b + \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\lambda + x}\, \tilde\rho(d\lambda) \qquad (x > 0).$$

Der Beweis von Satz 5.6 **(v)** $\Rightarrow$ **(vi)** zeigt, daß $\tilde\rho(d\lambda) = \lambda^{-1}\rho(d\lambda)$ gilt, wobei $\rho(d\lambda)$ mit dem in Satz 5.10 verwendeten Darstellungsmaß übereinstimmt. Insbesondere folgt also $\tilde\rho|_{(0,\overline{\omega}_0]} = 0$. ////

Mit den Daten aus der Tabelle in Beispiel 1.8 erhalten wir sofort einige konkrete Integraldarstellungen für subordinierte Erzeuger.

5.12 Beispiel. In den folgenden Beispielen ist $\{T_t\}_{t\geq 0}$ stets *kontraktiv*, d. h. es ist $M = 1$ und $\overline{\omega}_0 = 0$.

(1) Subordination mit $f_\alpha(x) = x^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$.

Es gilt

$$\frac{f_\alpha(x)}{x} = x^{\alpha-1} = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\lambda + x} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \lambda^{\alpha-1} \, d\lambda \qquad (x > 0),$$

und somit

$$A^{f_\alpha} u = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{(0,\infty)} \lambda^{\alpha-1} A R(\lambda, A) u \, d\lambda \qquad (u \in D(A)). \tag{5.14}$$

Die Integraldarstellung (5.14) stimmt mit (5.1) überein, woraus wir

$$A^{f_\alpha}|_{D(A)} = -(-A)^\alpha|_{D(A)} = -f_\alpha(-A)|_{D(A)}$$

folgern.

(2) Subordination mit $f_{a,b}(x) = \log\left(\frac{b}{a}\frac{a+x}{b+x}\right)$, $(0 < a < \infty)$, $0 < b \leq \infty$.

Es gilt

$$\frac{f_{a,b}(x)}{x} = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\lambda + x} \frac{1}{\lambda} 1_{(a,b)}(\lambda) \, d\lambda \qquad (x > 0),$$

und somit

$$A^{f_{a,b}} u = \int_{(a,b)} \frac{1}{\lambda} A R(\lambda, A) u \, d\lambda \qquad (u \in D(A)).$$

Insbesondere finden wir für $a = 1$ und $b = \infty$, daß $f_{1,\infty}(x) = \log(1 + x)$ und

$$A^{f_{1,\infty}} u = \int_{(1,\infty)} \frac{1}{\lambda} A R(\lambda, A) u \, d\lambda \qquad (u \in D(A)). \tag{5.15}$$

gelten. Formel (5.15) besagt gerade, daß

$$A^{f_{1,\infty}}|_{D(A)} = -\log(1 - A)|_{D(A)} = -f_{1,\infty}(-A)|_{D(A)}$$

gilt—zur Definition des Logarithmus von Operatoren auf BANACH–Räumen verweisen wir auf NOLLAU [61] p. 163, Satz 1.

Für $0 \leq \gamma < 1$ finden wir auf $D(A)$

$$\begin{aligned} (A+\gamma)^{f_{1,\infty}} u &= \int_{(1,\infty)} \frac{1}{\lambda} (A+\gamma) R(\lambda, A+\gamma) u \, d\lambda \\ &= \int_{(1-\gamma,\infty)} \frac{1}{\lambda+\gamma} (A+\gamma) R(\lambda, A) u \, d\lambda \\ &= -\log((1-\gamma) - A), \end{aligned} \tag{5.16}$$

und durch den Grenzübergang $\gamma \to 1$ erhielten wir *formal* die Integraldarstellung für den Logarithmus des Operators $(-A)$—vgl. NOLLAU [61] p. 163, Formel (2.4).

Da jedoch für $\gamma \to 1$ auch $\omega_0 \to 1$ strebt, ist die für Subordination hinreichende Integrabilitätsbedingung aus Bemerkung 1.12 verletzt; wir benötigen daher ein gesondertes Approximationsargument, das wir hier nur skizzieren wollen: Zunächst zeigt man mit Hilfe von (1.4) und (1.8), daß

$$\|A^\alpha R(\lambda, A)\| \leq 2\,\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\,\frac{\lambda^{\alpha-1}}{1-\alpha} \qquad (\lambda > 0)$$

für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt, vgl. NOLLAU [60] p. 109, Lemma 2. Für $u \in D(A^\beta) \cap A^\alpha(D(A^\alpha))$ mit $\alpha, \beta \in (0,1]$ und $\beta > \alpha$ kann man dann für $\gamma \to 1$ die absolute Konvergenz des (RIEMANNschen) Integrals auf der rechten Seite von (5.16) zeigen.

(3) Subordination mit $f_a(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}$, $a > 0$.

Es gilt

$$\frac{f_a(x)}{x} = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\lambda + x}\,\frac{1}{\lambda}\,\epsilon_a(d\lambda),$$

und daher

(5.17)
$$\begin{aligned} A^{f_a} u &= \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\lambda} AR(\lambda, A)u\,\epsilon_a(d\lambda) \\ &= \frac{1}{a} AR(a, A)u \\ &= \Big(R(a, A) - \frac{1}{a}\Big)u \\ &= -f_a(-A)u \end{aligned}$$

zunächst für $u \in D(A)$, und, wegen der Beschränktheit des Operators $AR(a, A)$, für alle $u \in \mathcal{X}$.

(4) Wie oben sei $f \in \mathcal{CBF}_0$ der charakteristische Exponent eines Subordinators. Ist A der Erzeuger einer translationsinvarianten MARKOVschen Kontraktionshalbgruppe in $L^2(\mathbb{R}^d)$ mit charakteristischem Exponenten $a \in \mathcal{CN}$, so können wir A als Pseudodifferentialoperator mit Symbol $-a(\xi)$ auffassen, vgl. (1.19),

$$Au(x) = -a(D)u(x) = -(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi \qquad (u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)).$$

Der Operator $AR(\lambda, A)$ ist ebenfalls ein Pseudodifferentialoperator, dessen Symbol durch $-a(\xi)(\lambda + a(\xi))^{-1}$ gegeben ist. Somit erhalten wir für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} -A^f u(x) &= b(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi + \\ &\quad + (2\pi)^{-d} \int_{(0,\infty)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\lambda}\frac{a(\xi)}{\lambda + a(\xi)}\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi\,\rho(d\lambda) \\ &= b(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi + \\ &\quad + (2\pi)^{-d} \int_{(0,\infty)} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + a(\xi)}\Big)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi\,\rho(d\lambda) \end{aligned}$$

$$= \; b(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} a(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi +$$
$$+(2\pi)^{-d}\int_{(0,\infty)}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda}(1-\mathrm{e}^{-ta(\xi)})\,dt\,\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi\,\rho(d\lambda)$$

Vertauschen wir nun die Reihenfolge der Integrationen—daß die iterierten Integrale absolut konvergieren zeigen wir im Anschluß an diese Rechnung—so finden wir

$$(5.18)\; -A^f u(x) \; =$$
$$\begin{aligned}
&= \; b(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} a(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi + \\
&\quad + (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-ta(\xi)})\left(\int_{(0,\infty)}\mathrm{e}^{-t\lambda}\rho(d\lambda)\right)dt\,\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi \\
&= \; (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(ba(\xi)+\int_{(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-ta(\xi)})\,m(t)\,dt\right)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi \\
&= \; (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(a(\xi))\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}\,d\xi,
\end{aligned}$$

das besagt, daß A^f ein Pseudodifferentialoperator mit Symbol $-f\circ a(\xi)$ ist.

Es bleibt, die absolute Konvergenz des Dreifachintegrals zu zeigen. Für $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{(0,\infty)} |\mathrm{e}^{-t\lambda}(1-\mathrm{e}^{-ta(\xi)})\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{i(\xi,x)}|\,dt\,d\xi\,\rho(d\lambda) \; = \\
&= \; \int_{\mathbb{R}^d}\int_{(0,\infty)}\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda}|(1-\mathrm{e}^{-ta(\xi)})||\hat{u}(\xi)|\,dt\,\rho(d\lambda)\,d\xi \\
&\le \; 2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{(0,1]}\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda}\,dt\,\rho(d\lambda)|\hat{u}(\xi)|\,d\xi + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{(1,\infty)}\int_{(0,\infty)} t\mathrm{e}^{-t\lambda}\,dt\,\rho(d\lambda)|a(\xi)||\hat{u}(\xi)|\,d\xi \\
&= \; 2\int_{(0,1]}\frac{1}{\lambda}\,\rho(d\lambda)\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{u}(\xi)|\,d\xi + \int_{(1,\infty)}\frac{1}{\lambda^2}\,\rho(d\lambda)\int_{\mathbb{R}^d}|a(\xi)||\hat{u}(\xi)|\,d\xi.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun einerseits aus den Integrationseigenschaften (5.9) des Maßes ρ und andererseits aus der Tatsache, daß für $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ die Fourier–Transformierte $\hat{u}$ im Schwartz–Raum der schnell fallenden Funktionen ist, und a als stetige, negativ definite Funktion höchstens quadratisch wächst.

Der durch die Integralformel (5.10) erklärte Operator ist abschließbar in $D(A)$, wie folgende Überlegung zeigt:

$$\begin{aligned}
&\|R(\overline{\omega}_0+1,A)\left(bAu+\int_{(\overline{\omega}_0,\infty)}\frac{1}{\lambda}AR(\lambda,A)\,\rho(d\lambda)\right)u\| \; = \\
&= \; \|bAR(\overline{\omega}_0+1,A)u+\int_{(\overline{\omega}_0,\infty)}\frac{1}{\lambda}AR(\overline{\omega}_0+1,A)R(\lambda,A)u\,\rho(d\lambda)\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & b\|AR(\overline{\omega}_0+1,A)u\| + \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]} \frac{1}{\lambda}\|AR(\overline{\omega}_0+1,A)R(\lambda,A)u\|\,\rho(d\lambda) + \\
& + \int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{1}{\lambda}\|R(\lambda,A)AR(\overline{\omega}_0+1,A)u\|\,\rho(d\lambda) \\
\leq\ & b(M(\overline{\omega}_0+1)+1)\|u\| + \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]} \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{M\lambda}{\lambda-\overline{\omega}_0}+1\Big)\,\rho(d\lambda)\|R(\overline{\omega}_0+1,A)u\| + \\
& + \int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{1}{\lambda}\frac{M}{\lambda-\overline{\omega}_0}\|AR(\overline{\omega}_0+1,A)u\|\,\rho(d\lambda) \\
\leq\ & \Bigg(bM(\overline{\omega}_0+2) + M^2\int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+1]} \Big(\frac{1}{\lambda-\overline{\omega}_0}+\frac{1}{\lambda}\Big)\,\rho(d\lambda) + \\
& + M^2(\overline{\omega}_0+1)\int_{(\overline{\omega}_0+1,\infty)} \frac{1}{\lambda(\lambda-\overline{\omega}_0)}\,\rho(d\lambda)\Bigg)\|u\|.
\end{aligned}
$$

Es sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ eine in $\mathcal{X}$ gegen $0 \in \mathcal{X}$ konvergente Folge, so daß der Grenzwert

$$
\lim_{n\to\infty}\Bigg(bAu + \int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} \frac{1}{\lambda}AR(\lambda,A)\,\rho(d\lambda)\Bigg)u_n = v
$$

im Sinne der Normtopologie auf $\mathcal{X}$ existiert. Dann finden wir mit der oben durchgeführten Rechnung

$$
R(\overline{\omega}_0+1,A)v = 0,
$$

und wegen der Injektivität der Resolvente auch $v = 0$. Das zeigt die behauptete Abschließbarkeit.

Da darüber hinaus $D(A)$ ein definierender Bereich dieses Operators ist, vgl. Lemma 1.17, gilt—wie wir in Beispiel 5.12 **(1)–(3)** sahen—nicht nur $A^f|_{D(A)} = -f(-A)|_{D(A)}$, sondern auch $A^f = \overline{-f(-A)}$, wobei $\overline{-f(-A)}$ für die Abschließung des Operators $-f(-A)$ über $D(A)$ steht.

Tatsächlich gilt dieses Resultat nicht nur für die in Beispiel 5.12 abgehandelten Fälle; für eine allgemeinere Behandlung benötigen wir eine Darstellung der Resolvente von A^f.

5.13 Satz. *Es seien $\{T_t\}_{t\geq 0}$ eine C_0–Halbgruppe von Operatoren auf $\mathcal{X}$ mit Erzeuger A und $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ ein zulässiger Subordinator mit charakteristischem Exponenten $f \in \mathcal{CBF}_0$.*

Dann gilt für die Resolvente des subordinierten Erzeugers A^f und alle $u \in \mathcal{X}$

$$
R(\lambda,A^f)u = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{f(-z)+\lambda}R(z,A)u\,dz + \frac{1}{f(\infty)+\lambda}\,u \quad (\lambda > -f(-\omega_0)). \tag{5.19}
$$

Dabei ist ∞ der unendlich ferne Punkt der Einpunkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$, Γ eine Integrationskontur, die $\sigma(A)$ umschließt mit $\Gamma\setminus\{\omega_0\} \subset \rho(A)$. Dementsprechend ist das Integral für $z = \omega_0$ als Grenzwert im Sinne der Normkonvergenz zu verstehen.

Beweis. Um das Integral auf der rechten Seite von (5.19) zu berechnen, gehen wir mit Hilfe des Homöomorphismus

$$\Phi_\alpha(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \alpha}, \quad \Phi_\alpha(\alpha) = \infty, \quad \Phi_\alpha(\infty) = 0,$$

$\alpha \in \rho(A)$ fest, vgl. Dunford, Schwartz [21] pp. 600–602, zum Spektralkalkül für beschränkte Operatoren über ([21] pp. 566–577).

Sei $\epsilon > 0$ fest vorgegeben. Dann umschließt Γ die Menge $\sigma(A-\epsilon)$ und es gilt $\Gamma \subset \rho(A-\epsilon)$. Beachten wir, daß für alle $u \in \mathcal{X}$ und $\zeta \in \Gamma$, $x = \Phi_\alpha(\zeta)$

$$\begin{aligned}
-\zeta^{-2}(\Phi_\alpha^{-1}(\zeta) + \epsilon - A)^{-1}u &= -x^{-2}(x^{-1} + \alpha + \epsilon - A)^{-1}u \\
&= -(x + (\alpha + \epsilon - A)x^2)^{-1}u \\
&= (x + (\alpha + \epsilon - A)^{-1})^{-1}u - x^{-1}u
\end{aligned}$$

gilt, so finden wir mit dem Dunford–Kalkül, vgl. Dunford, Schwartz [21] p. 601, Theorem 4,—man beachte, daß der Integrand $z \mapsto (f(-z) + \lambda)^{-1}$ in einer Umgebung von $\sigma(A-\epsilon)$ und auf Γ holomorph ist—

$$\begin{aligned}
&R(\lambda, -f(\epsilon - A))u = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{f(-z)+\lambda}(z + \epsilon - A)^{-1}u\,dz + \frac{1}{f(\infty)+\lambda}u \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Phi_\alpha^{-1}(\Gamma)} \frac{1}{f(-\zeta^{-1}-\alpha)+\lambda}(\zeta + (\alpha+\epsilon-A)^{-1})^{-1}u\,d\zeta \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Phi_\alpha^{-1}(\Gamma)} \frac{1}{f(-\zeta^{-1}-\alpha)+\lambda}\zeta^{-1}u\,d\zeta + \frac{1}{f(\infty)+\lambda}u \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Phi_\alpha^{-1}(\Gamma)} \frac{1}{f(-\zeta^{-1}-\alpha)+\lambda}(\zeta + (\alpha+\epsilon-A)^{-1})^{-1}u\,d\zeta.
\end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung verwendeten wir die Cauchysche Integralformel, vgl. Dunford, Schwartz [21] p. 568, Definition 9. Da f der charakteristische Exponent der Halbgruppe $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ ist, finden wir

$$\begin{aligned}
&R(\lambda, -f(\epsilon - A))u = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Phi_\alpha^{-1}(\Gamma)}\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t(f(-\zeta^{-1}-\alpha)+\lambda)}(\zeta + (\alpha+\epsilon-A)^{-1})^{-1}u\,dt\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Phi_\alpha^{-1}(\Gamma)}\int_{(0,\infty)}\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda}\mathrm{e}^{s(\zeta^{-1}+\alpha)}(\zeta + (\alpha+\epsilon-A)^{-1})^{-1}u\,\mu_t(ds)\,dt\,d\zeta.
\end{aligned}$$

Um hier die Reihenfolge der Integrationen vertauschen zu können, beachten wir, daß $\mathrm{Re}\,(\zeta^{-1}+\alpha) \leq 0$ für $\zeta \in \Phi_\alpha^{-1}(\Gamma)$ ist, und daß wegen

$$(\zeta + (\alpha+\epsilon-A)^{-1})^{-1}u = \zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1}(\alpha+\epsilon+\zeta^{-1}-A)^{-1})u$$

und der Resolventenabschätzung für den Operator A der Term $(\zeta+(\alpha+\epsilon-A)^{-1})^{-1}u$ höchstens polynomial in ζ wächst. Daher gilt

$$\begin{aligned} R(\lambda, -f(\epsilon - A))u &= \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(0,\infty)}\int_{(0,\infty)}\int_{\Phi_\alpha^{-1}(\Gamma)} \mathrm{e}^{s(\zeta^{-1}+\alpha)}(\zeta+(\alpha+\epsilon-A)^{-1})^{-1}u\,d\zeta\,\mathrm{e}^{-t\lambda}\mu_t(ds)\,dt \\ &= \int_{(0,\infty)}\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda}\mathrm{e}^{-s\epsilon}T_s u\mu_t(ds)\,dt \end{aligned}$$

unter Verwendung des DUNFORD–Kalküls.

Dürfen wir unter dem Integralzeichen zum Limes $\epsilon \to 0$ übergehen, so ist wegen

$$\int_{(0,\infty)}\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda}T_s u\mu_t(ds)\,dt = \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda}T_t^f u\,dt = R(\lambda, A^f)u$$

der Beweis erbracht.

Da aber

$$\|\mathrm{e}^{-t\lambda}\mathrm{e}^{-\epsilon s}T_s\| \le \mathrm{e}^{-t\lambda}\|T_s\|$$

eine $\mu_t(ds)\,dt$–integrierbare Majorante besitzt, können wir den Satz von der majorisierten Konvergenz verwenden. ////

5.14 Bemerkung. **(1)** Satz 5.13 besagt insbesondere, daß im Sinne des DUNFORD–Kalküls

$$R(\lambda, (A-\epsilon)^f) = R(\lambda, -f(\epsilon - A)) \qquad (\epsilon > 0, \lambda > -f(-\omega_0)),$$

und somit

$$(A-\epsilon)^f = -f(\epsilon - A) \qquad (\epsilon > 0)$$

gilt.

Beide Seiten dieser Identität konvergieren für $\epsilon \to 0$ im Sinne der starken Resolventenkonvergenz, d. h. in Erweiterung des DUNFORD–Kalküls gilt

$$A^f = -f(-A),$$

wobei $f(-A) := \lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon - A)$ gesetzt wurde.

(2) Tatsächlich gilt die Aussage von **(1)** für $u \in D(A^2)$ sogar im Sinne der Normkonvergenz in $\mathcal{X}$, wenn der Subordinator $\{\mu_t\}_{t\ge 0}$ nicht nur zulässig ist, sondern sogar eine Funktion $s \mapsto \mathrm{e}^{s\overline{\omega}_0}$ für ein $\overline{\omega}_0 > \omega_0$ integriert (das ist im Falle von Kontraktionshalbgruppen stets erfüllt, da hier $\overline{\omega}_0 = 0$ gewählt werden kann) und außerdem für ein $\phi \in (0,\pi)$ $\int_{(1,\infty)} |f(\overline{\omega}_0 + r\mathrm{e}^{i\phi})|r^{-2}\,dr < \infty$ ist: für $\delta, \epsilon > 0$ erhalten wir aus den Abschätzungen (1.4) und (1.8)

$$\begin{aligned} \|A^f u - (A-\epsilon)^f u\| &= \\ &= \|\int_{(\overline{\omega}_0,\infty)} \frac{1}{\lambda}\big(AR(\lambda, A) - (A-\epsilon)R(\lambda+\epsilon, A)\big)u\,\rho(d\lambda)\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+\delta]} \Big[\Big(\frac{M}{\lambda-\overline{\omega}_0}+\frac{1}{\lambda}\Big)+\Big(\frac{M(\lambda+\epsilon)}{\lambda(\lambda+\epsilon-\overline{\omega}_0)}+\frac{1}{\lambda}\Big)\Big]\,\rho(d\lambda)\|u\| + \\
&\quad + \int_{(\overline{\omega}_0+\delta,\infty)} \frac{1}{\lambda}\|\lambda\epsilon R(\lambda,A)R(\lambda+\epsilon,A)u\|\,\rho(d\lambda) \\
&\le 2\int_{(\overline{\omega}_0,\overline{\omega}_0+\delta]} \frac{M+1}{\lambda-\overline{\omega}_0}\,\rho(d\lambda)\|u\| + \epsilon\int_{(\overline{\omega}_0+\delta,\infty)} \frac{M^2}{(\lambda-\overline{\omega}_0)^2}\,\rho(d\lambda)\|u\|
\end{aligned}
$$

Gehen wir zuerst zum Limes $\epsilon \to 0$ und dann zum Grenzwert $\delta \to 0$ über, so folgt auf Grund der Integrationseigenschaften (5.9) des Maßes ρ die Behauptung für die Familie $\{(\epsilon - A)^f\}_{\epsilon>0}$

Im folgenden bezeichne $A_c := A - c$. Nach dem DUNFORD–Kalkül (vgl. [21], p. 601, Proof of Theorem 4) gilt für beliebig gewählte $\delta,\epsilon,\gamma > 0$ mit dem in negativer Richtung zu durchlaufenden Integrationsweg $\Gamma_\phi = \{z \in \mathbb{C} : z = \overline{\omega}_0 + r\mathrm{e}^{\pm i\phi}, r \ge 0\}$

$$
\begin{aligned}
&2\pi\big\|\big(f(\gamma-A_\epsilon)-f(\gamma-A_\delta)\big)(A_\delta-\overline{\omega}_0)(A_\epsilon-\overline{\omega}_0)u\big\| = \\
&= \Big\|\int_\Gamma f(\gamma-z)\big((z-A_\epsilon)^{-1}-(z-A_\delta)^{-1}\big)(A_\delta-\overline{\omega}_0)(A_\epsilon-\overline{\omega}_0)u\,dz\Big\| \\
&= \Big\|\int_{(0,\infty)} f(\gamma-\overline{\omega}_0-r\mathrm{e}^{i\phi})(\delta-\epsilon)\times \\
&\quad \times(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{i\phi}-A_\epsilon)^{-1}(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{i\phi}-A_\delta)^{-1}(A_\delta-\overline{\omega}_0)(A_\epsilon-\overline{\omega}_0)u\,\mathrm{e}^{i\phi}\,dr \\
&\quad -\int_{(0,\infty)} f(\gamma-\overline{\omega}_0-r\mathrm{e}^{-i\phi})(\delta-\epsilon)\times \\
&\quad \times(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{-i\phi}-A_\epsilon)^{-1}(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{-i\phi}-A_\delta)^{-1}(A_\delta-\overline{\omega}_0)(A_\epsilon-\overline{\omega}_0)u\,\mathrm{e}^{-i\phi}\,dr\Big\| \\
&\le |\delta-\epsilon|\Big\{\int_{(0,1]}|f(\gamma-\overline{\omega}_0-r\mathrm{e}^{i\phi})|\times \\
&\quad \times\big\|(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{i\phi}-A_\epsilon)^{-1}(A_\epsilon-\overline{\omega}_0)(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{i\phi}-A_\delta)^{-1}(A_\delta-\overline{\omega}_0)u\big\|\,dr + \\
&\quad +\int_{(0,1]}|f(\gamma-\overline{\omega}_0-r\mathrm{e}^{-i\phi})|\times \\
&\quad \times\big\|(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{-i\phi}-A_\epsilon)^{-1}(A_\epsilon-\overline{\omega}_0)(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{-i\phi}-A_\delta)^{-1}(A-\delta-\overline{\omega}_0)u\big\|\,dr + \\
&\quad +\int_{(1,\infty)}|f(\gamma-\overline{\omega}_0-r\mathrm{e}^{i\phi})|\times \\
&\quad \times\big\|(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{i\phi}-A_\epsilon)^{-1}(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{i\phi}-A_\delta)^{-1}(A_\delta-\overline{\omega}_0)(A_\epsilon-\overline{\omega}_0)u\,- \\
&\quad +(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{-i\phi}-A_\epsilon)^{-1}(\overline{\omega}_0+r\mathrm{e}^{-i\phi}-A_\delta)^{-1}(A_\delta-\overline{\omega}_0)(A_\epsilon-\overline{\omega}_0)u\big\|\,dr\Big\}.
\end{aligned}
$$

Da die Operatoren $A-\overline{\omega}_0-\epsilon = A_\epsilon-\overline{\omega}_0$ bzw. $A-\overline{\omega}_0-\delta = A_\delta-\overline{\omega}_0$ gleichmäßig beschränkte C_0–Halbgruppen erzeugen, finden wir mit Hilfe der Resolventenabschätzung

$$
\big\|\big(f(\gamma+\epsilon-A)-f(\gamma+\delta-A)\big)(A-\delta-\overline{\omega}_0)(A-\epsilon-\overline{\omega}_0)u\big\| \le
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{(M+1)^2}{\pi\cos\phi}|\delta-\epsilon| \int_{(0,1]} |f(\gamma-\overline{\omega}_0 - r\mathrm{e}^{i\phi})|\, dr \|u\| + \\
& + \frac{M^2}{\pi}|\delta-\epsilon| \int_{(1,\infty)} |f(\gamma-\overline{\omega}_0 - r\mathrm{e}^{i\phi})| \frac{1}{r\cos\phi+\epsilon}\, \frac{1}{r\cos\phi+\delta}\, dr \times \\
& \times \|(A-\delta-\overline{\omega}_0)(A-\epsilon-\overline{\omega}_0)u\|.
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung konvergieren die (reellwertigen) Integrale, und die Behauptung folgt aus den Grenzübergängen $\epsilon+\delta\to 0$ und anschließend $\gamma\to 0$.

(3) Mit einer ähnlichen Überlegung wie in **(2)** finden wir, daß für eine Folge kommutierender infinitesimaler Erzeuger $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n,m\to\infty}\|A_n u - A_m u\| = 0$ auch $\lim_{n,m\to\infty}\|f(-A_n)u - f(-A_m)u\| = 0$ folgt.

Wenden wir diesen Schluß auf die Familie von Operatoren $(A-\epsilon)^g$, $g\in\mathcal{CBF}_0$, $\epsilon>0$, an, so finden wir für ein weiteres $f\in\mathcal{CBF}_0$ zunächst mit dem Dunford–Kalkül ([21], p. 602, Theorem 5(d))

$$
-f\circ g(\epsilon - A) = -f(-(A-\epsilon)^g) \qquad (\epsilon>0),
$$

und daraus für $\epsilon\to 0$ die für uns wichtige Identität

$$
A^{f\circ g} = -f\circ g(-A) = -f(-A^g) = (A^g)^f. \tag{5.20}
$$

(4) Die Identität

$$
A^{f\circ g} = (A^g)^f \tag{5.21}
$$

folgt unabhängig von den in **(2)**, **(3)** angestellten Überlegungen bereits aus der Tatsache, daß Subordination eine transitive Operation ist, vgl. Bochner [13] p. 98, Theorem 4.4.3. Daher gilt

$$
T_t^{f\circ g} = (T_t^g)^f \qquad (t\geq 0),
$$

woraus unmittelbar (5.21) folgt.

5.15 Beispiel. Es sei A der Erzeuger einer C_0–Kontraktionshalbgruppe; mit $f(z)=z^\alpha$ mit $\alpha\in(0,1)$, $z\in\mathbb{C}^-$, bezeichnen wir den Hauptwert der gebrochenen α-ten Potenz. Die Funktion $z\mapsto (f(-z)+\lambda)^{-1}$ ist für alle $\lambda>0$ holomorph in $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$. Als Integrationsweg wählen wir $\Gamma_\phi=\{z\in\mathbb{C} : z = r\mathrm{e}^{\pm i\phi}, r>0\}$ mit einem festen Winkel $0\leq\phi\leq\pi$.

Aus (5.19) ergibt sich bei negativer Durchlaufrichtung des Integrationswegs

$$
\begin{aligned}
(\lambda+(-A)^\alpha)^{-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\phi} \frac{1}{(-z)^\alpha+\lambda}(z-A)^{-1}\, dz \\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-i\phi}}{2\pi i}\int_{(0,\infty)} \frac{1}{r^\alpha(-\mathrm{e}^{-i\phi})^\alpha+\lambda}\,(r\mathrm{e}^{-i\phi}-A)^{-1}\, dr + \\
&\quad + \frac{\mathrm{e}^{i\phi}}{2\pi i}\int_{(0,\infty)} \frac{1}{r^\alpha(-\mathrm{e}^{i\phi})^\alpha+\lambda}\,(r\mathrm{e}^{i\phi}-A)^{-1}\, dr.
\end{aligned}
$$

Auf Grund der Analytizität des Integranden ist der Wert des Integrals nicht von der Wahl des Winkels ϕ abhängig. Insbesondere finden wir daher für $\phi = 0$

$$\begin{aligned}(\lambda + (-A)^\alpha)^{-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(0,\infty)} \frac{1}{\lambda - r^\alpha \mathrm{e}^{-i\pi\alpha}}\,(r-A)^{-1}\,dr + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{(0,\infty)} \frac{1}{\lambda - r^\alpha \mathrm{e}^{i\pi\alpha}}\,(r-A)^{-1}\,dr \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(0,\infty)} \frac{2ir^\alpha \sin(\alpha\pi)}{\lambda^2 - 2\lambda r^\alpha\cos(\alpha\pi) + r^{2\alpha}}\,(r-A)^{-1}\,dr \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_{(0,\infty)} \frac{r^\alpha}{\lambda^2 - 2\lambda r^\alpha\cos(\alpha\pi) + r^{2\alpha}}\,(r-A)^{-1}\,dr.\end{aligned}$$

Wir haben somit KATOS Darstellung der Resolvente einer gebrochenen Potenz $(-A)^\alpha$ gefunden, vgl. YOSIDA [79] p. 260, Formula (6).

5.3 Zum Definitionsbereich des Erzeugers einer subordinierten Halbgruppe

In Kapitel 1, Lemma 1.17 haben wir bereits gesehen, daß $D(A) \subset D(A^f)$ ein definierender Bereich (core) des Operators A^f ist. In einigen Fällen gilt sogar $D(A^f) = D(A)$.

5.16 Lemma. *Es seien $\{T_t\}_{t\geq 0}$ eine C_0–Halbgruppe von Operatoren auf $\mathcal{X}$ mit Erzeuger A und $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ ein Subordinator, der für ein $\overline{\omega}_0 > \omega_0$ die Funktion $s \mapsto \mathrm{e}^{s\overline{\omega}_0}$ integriert.*

Gilt für den charakteristischen Exponenten f des Subordinators $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} > 0$, d. h. ist das LÉVY–Tripel der Funktion f von der Form $(0, b, \mu)$ mit $b > 0$, dann gilt $D(A^f) = D(A)$.

5.17 Bemerkung. (1) Die Aussage von Lemma 5.16 gilt auch für BERNSTEIN–Funktionen $f \in \mathcal{BF}$ mit LÉVY–Tripel (a, b, μ), $a, b > 0$. Dazu verweisen wir auf die Vorbemerkung zum vorausgehenden Abschnitt 5.2.

(2) Die Aussage, daß für $b > 0$ bereits $D(A^f) = D(A)$ gilt, wird von BERG, BOYADZHIEV, DELAUBENFELS [7] p. 250, Theorem 2.2 PHILLIPS zugeschrieben. In der dort zitierten Arbeit [62] findet sich jedoch kein Beweis.

Beweis von Lemma 5.16. Es bezeichne B die Abschließung des durch

$$(B|_{D(A)})u := \int_{(0,\infty)} (T_t u - u)\,\mu(dt) \qquad (u \in D(A))$$

auf $D(A)$ erklärten Operators. Offensichtlich ist B wiederum der Erzeuger einer $\{T_t\}_{t\geq 0}$ subordinierten Halbgruppe, die BERNSTEIN–Funktion des zugehörigen Subordinators ist durch das LÉVY–Tripel $(0, 0, \mu)$ gegeben.

Zunächst zeigen wir, daß der Operator B *A–beschränkt* ist, d. h. daß

$$\|Bu\| \le c\|Au\| + \tilde{c}\|u\| \qquad (u \in D(A)) \tag{5.22}$$

mit geeigneten Konstanten $c, \tilde{c} > 0$ gilt. Insbesondere folgt aus (5.22) die Inklusion $D(A) \subset D(B)$. Für $u \in D(A)$ gilt

$$\begin{aligned}
\|Bu\| &= \|\int_{(0,\infty)} (T_t u - u)\,\mu(dt)\| \\
&\le \int_{(0,1]} \|T_t u - u\|\,\mu(dt) + \int_{(1,\infty)} (\|T_t u\| + \|u\|)\,\mu(dt) \\
&\le \int_{(0,1]} \int_{(0,t)} \|T_s A u\|\,ds\,\mu(dt) + \int_{(1,\infty)} (\|T_t u\| + \|u\|)\,\mu(dt) \\
&\le \int_{(0,1]} \int_{(0,t)} \|T_s\|\,ds\,\mu(dt)\|Au\| + \int_{(1,\infty)} \|T_t\|\,\mu(dt)\|u\| + \int_{(1,\infty)} \mu(dt)\|u\| \\
&\le \sup_{0\le s\le 1} \|T_s\| \int_{(0,1]} t\,\mu(dt)\|Au\| + \int_{(1,\infty)} \|T_t\|\,\mu(dt)\|u\| + \int_{(1,\infty)} \mu(dt)\|u\| \\
&= c\|Au\| + \tilde{c}\|u\|.
\end{aligned}$$

Die Konstanten $c, \tilde{c} > 0$ sind endlich, da $\int_{(0,1]} t\,\mu(dt) + \int_{(0,\infty)} \mu(dt) < \infty$ und der Subordinator zulässig ist (vgl. Definition 1.14).

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
\|T_t^f u\| &= \|\int_{[0,\infty)} T_s u\,\mu_t(ds)\| \\
&\le \int_{[0,\infty)} \|T_s\|\,\mu_t(ds)\|u\| \\
&\le \int_{[0,\infty)} M\mathrm{e}^{s\overline{\omega}_0}\,\mu_t(ds)\|u\| \\
&= M\mathrm{e}^{-tf(-\overline{\omega}_0)}\|u\|
\end{aligned}$$

erhalten wir für alle $\lambda > -f(-\overline{\omega}_0)$, vgl. Davies [18] pp. 38–39, Beweis von Theorem 2.8,

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A^f)u\| &= \|\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda} T_t^f u\,dt\| \\
&\le M \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda}\mathrm{e}^{-tf(-\overline{\omega}_0)}\,dt\|u\| \\
&= \frac{M}{\lambda + f(-\overline{\omega}_0)}\,\|u\|.
\end{aligned}$$

Wir finden damit für alle $\lambda > -f(-\omega_0)$

$$\|\lambda u - A^f u\| \ge \frac{1}{M}\,(\lambda + f(-\overline{\omega}_0))\|u\| \qquad (u \in D(A)). \tag{5.23}$$

Wir fixieren $\lambda > -f(-\overline{\omega}_0) \geq b\,\overline{\omega}_0$. Aus (5.22) und (5.23) folgt dann

$$\begin{aligned}
\|B(\lambda - bA)^{-1}u\| &\leq c\|bA(\lambda - bA)^{-1}u\| + \tilde{c}\|(\lambda - bA)^{-1}u\| \\
&\leq c\|\lambda(\lambda - bA)^{-1}u - u\| + \frac{M\tilde{c}}{\lambda - b\,\overline{\omega}_0}\|u\| \\
&\leq \Big(\frac{Mc\lambda}{\lambda - b\,\overline{\omega}_0} + c + \frac{M\tilde{c}}{\lambda - b\,\overline{\omega}_0}\Big)\|u\|,
\end{aligned}$$

m. a. W. die Beschränktheit des Operators $B(\lambda - bA)^{-1}$. Da der Wertebereich von $\lambda - bA$ für $\lambda > -f(-\overline{\omega}_0)$ den gesamten Raum $\mathcal{X}$ ausmacht, folgt aus

$$\lambda - A^f = \lambda - (bA + B) = (1 - B(\lambda - bA)^{-1})(\lambda - bA) \qquad (\lambda > -f(-\overline{\omega}_0))$$

die Surjektivität von $(\lambda - A^f, D(A))$.

Es bleibt, die Abgeschlossenheit von $(A^f, D(A))$ zu zeigen. Dazu wählen wir eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, so daß $\lim_{n\to\infty} A^f u_n = v$.

Für alle $\lambda > -f(-\overline{\omega}_0)$ gilt somit $\lim_{n\to\infty}(\lambda - A^f)u_n = \lambda u - v$, und wegen der Surjektivität von $\lambda - A^f$ existiert ein $\tilde{u} \in D(A)$, so daß $(\lambda - A^f)\tilde{u} = \lambda u - v$, also $\lim_{n\to\infty} A^f u_n = A^f \tilde{u}$. Mit (5.23) sehen wir

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda - A^f)u_n - (\lambda - A^f)\tilde{u}\| \geq M^{-1}(\lambda + f(-\overline{\omega}_0)) \lim_{n\to\infty} \|u_n - \tilde{u}\|,$$

mithin $u = \tilde{u}$, woraus die Behauptung folgt. ////

Für den Rest dieses Kapitels beschränken wir uns auf Halbgruppen $\{T_t\}_{t\geq 0}$ von Operatoren auf einem Hilbert–Raum $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$.

5.18 Definition. Es sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter Operator. Wir nennen A *positiv* und schreiben $A \geq 0$, wenn die von A erzeugte quadratische Form nur positive Werte annimmt, d. h. wenn $(u, Au) \geq 0$ für alle $u \in D(A)$ gilt. Für $-A \geq 0$ schreiben wir auch $A \leq 0$.

Ist B ein weiterer, auf $\mathcal{H}$ dicht definierter, symmetrischer Operator mit $D(B) \subset D(A)$, dann schreiben wir $B \geq A$, falls $B - A \geq 0$ gilt.

A heißt *halbbeschränkt nach unten* (*nach oben*), wenn für ein $c \in \mathbb{R}$ $A \geq c$ ($A \leq c$) gilt.

5.19 Lemma. *Es seien $\{T_t\}_{t\geq 0}$ eine C_0–Halbgruppe von Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit Erzeuger A, $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ ein zulässiger Subordinator mit charakteristischem Exponenten $f \in \mathcal{CBF}_0$ und $B : D(B) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter abgeschlossener Operator mit $D(B) \subset D(A)$ und $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$.*

(1) *Ist A selbstadjungiert, so auch A^f.*

(2) *Es gilt $-B \geq -A \geq 0$ genau dann, wenn für $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B) \cap (0,\infty)$ $0 \leq R(\lambda, B) \leq R(\lambda, A)$ oder $BR(\lambda, B) \leq AR(\lambda, A) \leq 0$ ist.*

(3) *Ist A selbstadjungiert, so gilt $A \leq \omega_0$, $T_t \leq \mathrm{e}^{t\omega_0}$, $(t \geq 0)$ und $A^f \leq -f(-\omega_0)$. Insbesondere gilt dann $\sigma(A) \subset (-\infty, \omega_0]$ und $\sigma(A^f) \subset (-\infty, -f(-\omega_0)] = -f(-(-\infty, \omega_0])$.*

Beweis. Zu (1): Mit A sind auch die Operatoren $(\lambda - A)^{-1}$ und $(\lambda - A)^{-n}$, $\lambda > \omega_0$, $n \in \mathbb{N}$, selbstadjungiert. Da im Sinne der Normkonvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{t}{n}A\Big)^{-n} u = T_t u \qquad (u \in \mathcal{H})$$

gilt, vgl. Davies [18] p. 39, Formula (2.7), erhalten wir

$$(T_t u, u) = \lim_{n\to\infty} \Big(\Big(1 - \frac{t}{n}A\Big)^{-n} u, u\Big) \geq 0 \qquad (u \in \mathcal{H}, t \geq 0).$$

Auf Grund der Beschränktheit der Operatoren T_t folgt daraus bereits $T_t = T_t^*$.

Mit derselben Argumentation finden wir wegen

$$(T_t^f u, u) = \int_{[0,\infty)} (T_s u, u)\, \mu_t(ds) \geq 0 \qquad (u \in \mathcal{H}, t \geq 0)$$

auch $T_t^f = (T_t^f)^* = (T_t^*)^f$.

Mit Hilfe der Integraldarstellung der Resolvente von A^f folgern wir

$$\big((\lambda - A^f)^{-1} u, u\big) = \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\lambda} (T_t^f u, u)\, dt \geq 0 \qquad (u \in \mathcal{H}, \lambda \in \rho(A^f)),$$

woraus wir zunächst $(\lambda - A^f)^{-1} = ((\lambda - A^f)^{-1})^*$ und dann $A^f = (A^f)^*$ schließen.

Zu (2): Da $A(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1} - 1$ bzw. $B(\lambda - B)^{-1} = \lambda(\lambda - B)^{-1} - 1$ für $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ gilt, genügt es, die Äquivalenz der Aussagen

$$-B \geq -A \geq 0 \quad \text{und} \quad (\lambda - A)^{-1} \geq (\lambda - B)^{-1} \geq 0, \quad (\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B) \cap (0,\infty))$$

nachzuweisen.

Wir beginnen mit $-B \geq -A \geq 0$. In diesem Fall ist $\rho(A) \supset (0,\infty)$, und wir finden für $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B) \cap (0,\infty)$ und mit $u = (\lambda - A)v \in (\lambda - A)(D(A)) = \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
\big((\lambda - B)^{-1} u, u\big)^2 &= \big((\lambda - B)^{-1} u, (\lambda - A)v\big)^2 \\
&= \big((\lambda - A)^{1/2}(\lambda - B)^{-1} u, (\lambda - A)^{1/2} v\big)^2 \\
&\leq \big((\lambda - B)^{-1} u, (\lambda - A)(\lambda - B)^{-1} u\big)\,\big(v, (\lambda - A)v\big) \\
&\leq \big((\lambda - B)^{-1} u, (\lambda - B)(\lambda - B)^{-1} u\big)\,\big((\lambda - A)^{-1} u, u\big) \\
&= \big((\lambda - B)^{-1} u, u\big)\,\big((\lambda - A)^{-1} u, u\big),
\end{aligned}$$

woraus $(\lambda - A)^{-1} \geq (\lambda - B)^{-1} \geq 0$ folgt.

Umgekehrt finden wir für die Yosida–Approximationen von A und B, vgl. Ethier, Kurz [23] p. 12, Lemma 2.4, mittels der Resolventen–Abschätzung

$$\big((\lambda - A)^{-1} u, u\big) \leq \|(\lambda - A)^{-1} u\| \|u\| \leq \lambda^{-1} \|u\|^2$$

für hinreichend große $\lambda > 0$

$$0 \le \lambda(-A)(\lambda - A)^{-1} = \lambda - \lambda^2(\lambda - A)^{-1} \le \lambda - \lambda^2(\lambda - B)^{-1} = \lambda(-A)(\lambda - A)^{-1}$$

und daher auch

$$0 \le (-Au, u) = \lim_{\lambda\to\infty} \big(\lambda(-A)(\lambda-A)^{-1}u, u\big) \le \lim_{\lambda\to\infty} \big(\lambda(-B)(\lambda-B)^{-1}u, u\big) = (-Bu, u).$$

Zu (3): Mit $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\sigma(A)}$ bezeichnen wir die zum Operator A gehörende Spektralschar. Da $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le \omega_0\}$ gilt, finden wir für $u \in D(A)$

$$(Au, u) = \int_{(-\infty,\omega_0]} \lambda\, d(E_\lambda u, u) \le \omega_0 \int_{(-\infty,\omega_0]} d(E_\lambda u, u) = \omega_0 \|u\|^2.$$

Mit einer analogen Rechnung zeigt man

$$(T_t u, u) = \int_{(-\infty,\omega_0]} \mathrm{e}^{\lambda t} d(E_\lambda u, u) \le \mathrm{e}^{t\omega_0} \int_{(-\infty,\omega_0]} d(E_\lambda u, u) = \mathrm{e}^{t\omega_0}\|u\|^2.$$

Aus der Darstellungsformel (5.10) für A^f folgt wegen **(2)**

$$\begin{aligned}
(-A^f u, u) &= b(-Au, u) + \int_{(\omega_0,\infty)} \frac{1}{\lambda}\big(- A(\lambda - A)^{-1}u, u\big)\, \rho(d\lambda) \\
&\ge -b\omega_0\|u\|^2 - \int_{(\omega_0,\infty)} \frac{1}{\lambda}\, \frac{\omega_0}{\lambda - \omega_0}\, \rho(d\lambda)\|u\|^2 \\
&= -\left(\omega_0\|u\|^2 + \int_{(\omega_0,\infty)} \frac{1}{\lambda}\, \frac{\omega_0}{\lambda - \omega_0}\, \rho(d\lambda)\right)\|u\|^2 \\
&= -f(-\omega_0)\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwendeten wir Satz 1.13 und die Darstellung von f aus und Satz 5.6 **(vi)**, (5.8). ////

Der folgende Satz findet sich bei Heinz [36]. Wir geben jedoch einen etwas anderen Beweis.

5.20 Satz. ([36] p. 425, Satz 2) *Es seien $\{T_t\}_{t\ge0}$, $\{S_t\}_{t\ge0}$ zwei C_0–Halbgruppen von Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit selbstadjungierten Erzeugern A, B, $D(B) \subset D(A)$, $\{\mu_t\}_{t\ge0}$ ein zulässiger Subordinator mit charakteristischem Exponenten $f \in \mathcal{CBF}_0$ und $\omega_0^A := \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log \|T_t\|$.*
Dann impliziert

$$B \le A \le \omega_0^A \quad \textit{die Relation} \quad B^f \le A^f \le -f(-\omega_0^A).$$

Beweis. Wegen $-B \ge -A \ge -\omega_0^A$ folgt aus Lemma 5.19 **(2), (3)** auch

$$B(\lambda - B)^{-1} \le A(\lambda - A)^{-1} \le \frac{\omega_0^A}{\lambda - \omega_0^A} \qquad (\lambda > \omega_0^A).$$

Aus den Integraldarstellungen von A^f bzw. B^f finden wir daher für $u \in D(B)$—man beachte daß gemäß Lemma 5.19**(2), (3)** $\omega_0^B \le \omega_0^A$ und gemäß Satz 5.10 $\rho|_{(0,\omega_0^A]} = 0$ gilt—

$$\begin{aligned}
(B^f u, u) &= b(Bu, u) + \int_{(\omega_0^A,\infty)} \frac{1}{\lambda}\big(B(\lambda - B)^{-1}u, u\big)\,\rho(d\lambda)\\
&\le b(Au, u) + \int_{(\omega_0^A,\infty)} \frac{1}{\lambda}\big(A(\lambda - A)^{-1}u, u\big)\,\rho(d\lambda)\\
&= (A^f u, u)\\
&\le -f(-\omega_0^A)\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Da $D(B)$ ein definierender Bereich des Operators B^f ist, sieht man mit den üblichen Dichtheitsargumenten, daß die für $u \in D(B)$ hergeleitete Beziehung auch auf $D(B^f)$ (und sogar für $u \in D((B^f)^{1/2})$) gilt. ////

Es seien A und B wie in Satz 5.20. Die Operatoren A^2 und B^2 sind selbstadjungiert und positiv. Mit Hilfe des Spektralkalküls finden wir, daß $-A^2$ und $-B^2$ C_0–Halbgruppen $\{\mathrm{e}^{-tA^2}\}_{t\ge 0}$ und $\{\mathrm{e}^{-tB^2}\}_{t\ge 0}$ erzeugen. Für $u \in \mathcal{H}$ finden wir

$$\left\|\mathrm{e}^{-tA^2}u\right\|^2 = \int_{(-\infty,\omega_0^A]} \mathrm{e}^{-2\lambda^2 t}\, d\|E_\lambda u\|^2 \le \mathrm{e}^{-2t(\omega_0^A)^2}\|u\|^2,$$

und somit $\|\mathrm{e}^{-tA^2}\| \le \mathrm{e}^{-t(\omega_0^A)^2}$.

5.21 Satz. *Es seien $\{T_t\}_{t\ge0}$ und $\{S_t\}_{t\ge0}$ zwei C_0 Halbgruppen von Operatoren auf $\mathcal{H}$, deren Erzeuger A und B, $D(B) \subset D(A)$, selbstadjungiert sind. Ferner sei $\{\mu_t\}_{t\ge0}$ ein Subordinator mit charakteristischem Exponenten $f \in \mathcal{CBF}_0$. Dann folgt aus*

$$-B^2 \le -A^2 \le -(\omega_0^A)^2 \quad \textit{die Relation} \quad -(B^f)^2 \le -(A^f)^2 \le -f^2(\omega_0^A).$$

Insbesondere finden wir $D(B^f) \subset D(A^f)$

Beweis. Beispiel 5.9 **(2)** besagt, daß mit $f \in \mathcal{CBF}_0$ auch die Funktion $g(x) := f^2(\sqrt{x})$ in $\mathcal{CBF}_0$ enthalten ist. Aus Satz 5.20 folgt daher, daß

$$(-B^2)^g \le (-A^2)^g \le -g((\omega_0^A)^2) = -f^2(\omega_0^A)$$

gilt. Gemäß Bemerkung 5.14 **(3)** oder **(4)** dürfen wir diese Beziehung auch in der Form

$$-f^2(\sqrt{B^2}) \le -f^2(\sqrt{A^2}) \le -f^2(\omega_0^A)$$

bzw. als

$$-(f(-B))^2 \le -(f(-A))^2 \le -f^2(\omega_0^A)$$

oder

$$-(B^f)^2 \le -(A^f)^2 \le -f^2(\omega_0^A)$$

schreiben. Diese Relationen gelten zunächst für $u \in D(B^2)$. Da aber $D(B^2)$ für den Operator B^f ein definierender Bereich ist, folgt die Behauptung aus

$$\|A^f u\| \leq \|B^f u\| \qquad (u \in D(B^2))$$

mit dem üblichen Dichtheitsschluß. ////

5.22 Korollar. *Es sei $(A, D(A))$ der selbstadjungierte Erzeuger einer C_0–Halbgruppe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ von Operatoren auf $\mathcal{H}$ und $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ ein zulässiger Subordinator mit charakteristischem Exponenten $f \in \mathcal{CBF}_0$.*

Dann gilt für alle $c > 0$ $D(A^f) = D((cA)^f) = D(A^{f(c\cdot)})$.

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir $c \geq 1$ annehmen, anderenfalls betrachten wir den selbstadjungierten Operator $\frac{1}{c}A$.

Wegen $\|Au\| \leq c\|Au\| = \|cAu\|$ gilt $-(cA)^2 \leq -A^2 \leq 0$. Satz 5.21 besagt, daß dann $D((cA)^f) \subset D(A^f)$ folgt.

Um die noch fehlende Inklusion zu sehen, beachte man, daß für $g \in \mathcal{CBF}_0$ mit Lévy–Tripel $(0, b, \mu)$ und $c > 1$ die Funktion

$$\begin{aligned}
g(cx) &= bcx + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-tcx})\, \mu(dt) \\
&= bcx + \int_{(0,\infty)} \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})\, \epsilon_{tc}(d\lambda)\, \mu(dt) \\
&= bcx + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \int_{(0,\infty)} \epsilon_{tc}(d\lambda)\, \mu(dt) \\
&= bcx + \int_{(0,\infty)} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})\, \mu(d(c\lambda))
\end{aligned}$$

in $\mathcal{CBF}_0$ enthalten und ihr Lévy–Tripel durch $(0, bc, \mu(d(c\lambda)))$ gegeben ist.

Gemäß Lemma 5.19**(2)** ist für $c \geq 1$ und $B := -A^2$ die Relation $-c^2 B \geq -B \geq 0$ äquivalent zu $c^2 B(\lambda - c^2 B)^{-1} \leq B(\lambda - B)^{-1} \leq 0$. Zusammen mit $\omega_0 := \omega_0^B$ und $c\,\omega_0 = \omega_0^{c^2 B}$ folgt daher für $u \in D(B)$

$$\begin{aligned}
((c^2 B)^g u, u) &= (B^{g(c^2\cdot)} u, u) \\
&= c^2 (bBu, u) + \int_{(\omega_0,\infty)} \frac{1}{\lambda} \big(B(\lambda - B)^{-1} u, u\big)\, \rho(d(c^2\lambda)) \\
&= c^2 (bBu, u) + \int_{(c^2\omega_0,\infty)} \frac{c^2}{\theta} \big(B(\theta/c^2 - B)^{-1} u, u\big)\, \rho(d\theta) \\
&= c^2 (bBu, u) + c^2 \int_{(c^2\omega_0,\infty)} \frac{1}{\theta} \big(c^2 B(\theta - c^2 B)^{-1} u, u\big)\, \rho(d\theta) \\
&\leq c^2 (bBu, u) + c^2 \int_{(c^2\omega_0,\infty)} \frac{1}{\theta} \big(B(\theta - B)^{-1} u, u\big)\, \rho(d\theta) \\
&= c^2 (B^g u, u),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\rho|_{(0,c^2\omega_0]} = 0$ verwendeten.

Wählen wir $g(x) = f^2(\sqrt{x})$ und machen wir die Substitution $B = -A^2$ wieder rückgängig, so erhalten wir auf $D(A^2)$

$$\big((cA)^f\big)^2 \leq c^2\big(A^f\big)^2,$$

woraus dann—$D(A^2)$ ist definierender Bereich von A^f—

$$\|(cA)^f u\| \leq c\|A^f u\| \qquad (u \in D(A^f))$$

und somit $D(A^f) \subset D((cA)^f)$ folgt. ////

5.23 Lemma. *Es seien A, B abgeschlossene Operatoren auf $\mathcal{H}$ und $D(B) \subset D(A)$. Ist $0 \in \rho(B)$, dann gibt es eine Konstante $c > 0$ derart, daß*

$$\|Au\| \leq c\|Bu\| \qquad (u \in D(B))$$

gilt.

Beweis. Da $0 \in \rho(B)$ ist, existiert eine Konstante $c > 0$, so daß

$$\tilde{c}\|u\|^2 \leq \|Bu\|^2 \qquad (u \in D(B))$$

gilt.

Die Bedingung $D(B) \subset D(A)$ impliziert für die abgeschlossenen Operatoren A, B die Ungleichung

$$\|Au\|^2 \leq \tilde{c}'\big(\|Bu\|^2 + \|u\|^2\big) \qquad (u \in D(B)),$$

mit einer geeigneten Konstanten $\tilde{c}' > 0$, vgl. Yosida [79] p. 79, Theorem 2, woraus

$$\|Au\|^2 \leq \tilde{c}'(1 + \tilde{c}^{-1})\|Bu\|^2 \qquad (u \in D(B)),$$

und damit die Behauptung folgt. ////

5.24 Korollar. *Es seien A, B und $f \in \mathcal{CBF}_0$ wie in Satz 5.21.*
Gilt

$$\|Au\| \leq c(\|Bu\| + \|u\|) \qquad (u \in D(B))$$

mit einer Konstanten $c > 0$, so folgt $D(B^f) \subset D(A^f)$.

Beweis. Wie oben bezeichne $\omega_0^B = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log \|\mathrm{e}^{tB}\|$. Da B eine C_0–Halbgruppe erzeugt, ist für alle $\epsilon > \omega_0^B$ schon $\epsilon \in \rho(B)$, und Lemma 5.23 zeigt, daß

$$\|Au\| \leq \tilde{c}\|(B - \epsilon)u\| \qquad (u \in D(B))$$

für eine Konstante $\tilde{c} > 0$ gilt. Satz 5.21 besagt in dieser Situation

$$D((B - \epsilon)^f) \subset D((\tilde{c}^{-1}A)^f) \qquad (\epsilon > \omega_0^B),$$

was nach Korollar 5.22 gleichbedeutend mit

$$D((B-\epsilon)^f) \subset D(A^f) \qquad (\epsilon > \omega_0^B),$$

ist.

Bezeichnet $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\sigma(B)}$ die zum selbstadjungierten Operator B gehörende Spektralschar, dann finden wir auf Grund der Subadditivität der BERNSTEIN–Funktion f

$$\begin{aligned}
\|B^f u - (B-\epsilon)^f u\|^2 &= \|f(-B)u - f(\epsilon - B)u\|^2 \\
&= \int_{(-\infty,\omega_0^B)} |f(-\lambda) - f(\epsilon-\lambda)|^2 \, d\|E_\lambda u\|^2 \\
&\leq \int_{(-\infty,\omega_0^B)} f^2(\epsilon)\, d\|E_\lambda u\|^2 \\
&= f^2(\epsilon)\|u\|^2,
\end{aligned}$$

und somit $D(B^f) = D((B-\epsilon)^f)$, was den Beweis beschließt. ////

5.25 Beispiel. Für die folgenden Beispiele benötigen wir eine Skala von anisotropen SOBOLEV–Räumen $H^{r,a}(\mathbb{R}^d)$, $r \geq 0$, $a \in \mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$:

$$H^{r,a}(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{r,a} < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{r,a}^2 := \int_{\mathbb{R}^d} |1 + a(\xi)|^{2r} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi,$$

vgl. (1.21) und JACOB [48] Section 2. Für die spezielle Wahl von $a(\xi) = |\xi|^2$ erhalten wir die klassischen L^2–SOBOLEV–Räume $H^{2r}(\mathbb{R}^d) = H^{r,|\cdot|^2}(\mathbb{R}^d)$, für die wir die übliche Bezeichnung $H^s(\mathbb{R}^d)$ beibehalten.

(1) (JACOB [47]) Es seien $b_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq d$, C_b^∞–Funktionen, die nach unten beschränkt sind

$$b_j \geq c > 0 \qquad (1 \leq j \leq d)$$

und die nur von $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d$, nicht aber von x_j abhängen, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} b_j = 0 \qquad (1 \leq j \leq d).$$

Weiterhin setzen wir $a_j^2(\xi) := |\xi_j|^{2r}$ und $a^2(\xi) := \sum_{j=1}^d a_j^2(\xi) = \sum_{j=1}^d |\xi_j|^{2r} \sim |\xi|^{2r}$ für ein $r \in (0, 1]$.

Dann ist

$$p(x,\xi) := \sum_{j=1}^d b_j(x) a_j^2(\xi)$$

das Symbol des Pseudodifferentialoperators

$$p(x,D)u(x) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} p(x,\xi)\hat{u}(\xi) e^{i(\xi,x)} \, d\xi \qquad (u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)).$$

Die von $p(x,D)$ erzeugte Bilinearform $B(\cdot,\cdot) := (p(x,D)\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ kann auf den Raum $H^{1/2,a^2}(\mathbb{R}^d) = H^r(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden ([47] p. 223, Proposition 3.2) und genügt dort der GÅRDING–Ungleichung

$$(p(x,D)u,u)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq c\|u\|^2_{H^r(\mathbb{R}^d)} - c'\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \qquad (u \in H^r(\mathbb{R}^d)),$$

vgl. [47] pp. 223–224, Theorem 3.1. Somit besitzen die Operatoren $p^\mu(x,D) := p(x,D)+\mu$, $\mu \geq 0$, FRIEDRICHSsche Erweiterungen $(p^\mu(x,D), D(p^\mu(x,D)))$ mit $D(p^\mu(x,D)) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, die entsprechend ihrer Konstruktion selbstadjungiert sind. Ist $\mu > c'$, so erzeugt $-p^\mu(x,D)$ eine C_0–Kontraktionshalbgruppe.

Erfüllen darüber hinaus die Koeffizientenfunktionen die Bedingung

$$\|b_j - b_j(x_0)\|_\infty \leq c_{d,r}d_0 \qquad (1 \leq j \leq d)$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}^d$, dann gilt, [47] p. 227, Theorem 4.2,

$$D(p(x,D)) = D(p^\mu(x,D)) = H^{2r}(\mathbb{R}^d)\ [= H^{1,a^2}(\mathbb{R}^d)].$$

Weiterhin gelten die folgenden Abschätzungen, vgl. [47] p. 227, Theorem 5.1, und pp. 229–230, Theorem 5.2,

$$\text{(5.24)}\quad \|u\|_{1,a^2} = \|u\|_{H^{2r}(\mathbb{R}^d)} \leq c\left(\|p^\mu(x,D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) \qquad (u \in H^{2r}(\mathbb{R}^d))$$

und

$$\text{(5.25)}\quad \|p^\mu(x,D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c'\|u\|_{H^{2r}(\mathbb{R}^d)} = c'\|u\|_{1,a^2} \qquad (u \in D(p(x,D))).$$

Mit Hilfe von Korollar 5.24 erhalten wir daher für $f \in \mathcal{CBF}_0$

$$\text{(5.26)}\qquad D(p^\mu(x,D)^f) = D(f\circ a^2(D)) = H^{1,f\circ a^2}(\mathbb{R}^d) = H^{1,f(|\cdot|^{2r})}(\mathbb{R}^d).$$

Die letzte Gleichheit folgt aus $|\xi|^{2r} \sim |\xi_1|^{2r} + \ldots + |\xi_d|^{2r}$ und der Isotonie von f.

Insbesondere finden wir für $f(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$

$$\text{(5.27)}\qquad D(p^\mu(x,D)^f) = D([p^\mu(x,D)]^\alpha) = H^{r\alpha}(\mathbb{R}^d).$$

(2) (HOH, JACOB [42] und JACOB [48]) Ersetzen wir in der Konstruktion von Beispiel **(1)** die speziellen negativ definiten Funktionen $|\xi_j|^{2r}$ durch beliebige reelle $a_j \in \mathcal{CN}_0(\mathbb{R})$, die nur von der Koordinate ξ_j abhängen, dann übertragen sich die in **(1)** getroffenen Aussagen *wörtlich*, wenn man konsequent mit den Normen $\|\cdot\|_{1,a^2}$ und $\|\cdot\|_{1/2,a^2}$ und den entsprechenden Funktionenräumen arbeitet. Die Abschätzungen (5.24) und (5.25) folgert man mit den Vorbereitungen aus [42] mittels der Techniken aus [47] oder wie in [48] p. 384, Theorem 5.1 bzw. p. 384, Proposition 5.1.

(3) (JACOB [49]) Es sei $p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $(x,\xi) \mapsto p(x,\xi)$ eine stetige Funktion, die für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ in der ξ–Variablen negativ definit ist. Für ein fest gewähltes $x_0 \in \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$p(x,\xi) = p(x_0,\xi) + (p(x,\xi) - p(x_0,\xi)) =: p_1(\xi) + p_2(x,\xi).$$

Sind dann für eine Funktion $a^2 \in \mathcal{CN}_0(\mathbb{R}^d)$ die Bedingungen

$$|p_1(\xi)| \le \gamma_1(1 + a^2(\xi)), \tag{5.28}$$

$$\begin{cases} p_2(\cdot, \xi) \in C^q(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}) & \text{für } q > d + 1 \\ |\partial_x^\alpha p_2(x, \xi)| \le \phi_\alpha(x)(1 + a^2(x)) & \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d,\ |\alpha| \le q \end{cases} \tag{5.29}$$

mit geeigneten Funktionen $\phi_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$p_1(\xi) \ge \gamma_0 a^2(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}^d \text{ groß}) \tag{5.30}$$

und

$$\sum_{|\alpha| \le q} \|\phi_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \text{ klein im Vergleich zu } \gamma_0 \tag{5.31}$$

erfüllt, dann gelten ([49] p. 159, Lemma 3.1 und p. 162, Theorem 4.2)

$$\|p(x, D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le c\|u\|_{1,a^2} \qquad (u \in H^{1,a^2}) \tag{5.32}$$

und

$$\|u\|_{1,a^2} \le c'\big(\|p(x, D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\big) \qquad (u \in D(p(x, D))). \tag{5.33}$$

Insbesondere entnehmen wir diesen Abschätzungen $H^{1,a^2}(\mathbb{R}^d) = D(p(x, D))$.

Schließlich fordern wir, daß $p(x, D)$ ein *symmetrischer* Operator (in $L^2(\mathbb{R}^d)$) ist. Wie schon in **(1)**, **(2)** erhalten wir dann aus der GÅRDING–Ungleichung für die assoziierte Bilinearform

$$(p(x, D)u, u)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \ge c\|u\|^2_{1/2,a^2} - c'\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

vgl. [49] p. 161, Theorem 3.1, daß die Operatoren $p^\mu(x, D) := p(x, D) + \mu$, $\mu \ge 0$, FRIEDRICHSsche Erweiterungen zulassen und daß $(p^\mu(x, D), D(p(x, D)))$ insbesondere *selbstadjungiert* sind. Weiterhin findet man, daß für große Werte von μ der Operator $-p^\mu(x, D)$ eine C_0–Kontraktionshalbgruppe erzeugt. Mit Hilfe von Korollar 5.24 folgern wir nun

$$H^{1,f\circ a^2}(\mathbb{R}^d) = D(p(x, D)^f) \tag{5.34}$$

für $f \in \mathcal{CBF}_0$.

Literaturverzeichnis

[1] Aronson, D. G., Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 890–896.

[2] Balakrishnan, A. V., Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pac. J. Math.*, **10** (1960), 419–437.

[3] Bauer, H., *Markoffsche Prozesse*, Vorlesungsausarbeitung, Hamburg, Sommersemester 1963.

[4] Bauer, H., *Maß– und Integrationstheorie*, de Gruyter, Berlin 1992 (2nd ed.).

[5] Bauer, H., *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, Berlin 1991 (4th ed.).

[6] Berg, C. and G. Forst, *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, II. Ser. vol. **87**, Berlin 1975.

[7] Berg, Chr., Boyadzhiev, Kh. and R. deLaubenfels, Generation of generators of holomorphic semigroups, *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)* **55** (1993), 246–269.

[8] Blumenthal, R. M. and R. K. Getoor, Some theorems on stable Processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95** (1960), 263–273.

[9] Blumenthal, R. M. and R. K. Getoor, A dimension theorem for sample functions of stable processes, *Ill. J. Math.* **4** (1960), 370–375.

[10] Blumenthal, R. M. and R. K. Getoor, Sample Functions of Stochastic Processes with Stationary Independent Increments, *J. Math. Mech.* **10** (1961), 493–516.

[11] Blumenthal, R. M. and R. K. Getoor, *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, Pure and Appl. Math. vol. **29**, New York 1968.

[12] Bochner, S., Stochastic Processes, *Ann. Math.* **48** (1947), 1014–1061.

[13] Bochner, S., *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press, California Monographs in Math. Sci., Berkeley, CA 1955.

[14] Carleson, L., *Selected Problems on Exceptional Sets*, van Nostrand, Princeton, NJ 1967.

[15] Ciesielski, Z. and S. J. Taylor, First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path, *Trans. Amer. Math. Soc.* **103** (1962), 434–450.

[16] Courrège, Ph., Générateur infinitésimal d'un semi–groupe de convolution sur R^n, et formule de Lévy–Khinchine, *Bull. Sci. Math.* 2e *sér.* **88** (1964), 3–30.

[17] Courrège, Ph., *Sur la forme intégro-differentielle des opérateurs de* C_K^∞ *dans* C *satisfaisant au principe du maximum*, Sém. Théorie du Potentiel (1965/66) 38 p.

[18] Davies, E. B., *One-Parameter Semigroups*, Academic Press, L. M. S. Monographs vol. **15**, London 1980.

[19] Davies, R. O., Subsets of finite measure in analytic sets, *Indag. Math.* **14** (1952), 488–489.

[20] Doob, J. L., *Stochastic Processes*, Wiley, Wiley Publications in Statistics, New York 1953.

[21] Dunford, N. and J. T. Schwartz, *Linear Operators Part I*, Interscience, Pure and Appl. Math. vol. **7**, New York 1957.

[22] Dynkin, E. B., *Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse*, Springer, Grundlehren math. Wiss. Bd. **108**, Berlin 1961.

[23] Ethier, St. E. and Th. G. Kurtz, *Markov Processes*, Wiley, Series in Prob. and Math. Stat., New York 1986.

[24] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications vol. 2*, Wiley, Series in Prob. and Math. Stat., New York 1966 (1st ed.).

[25] Fristedt, B., Sample functions of stochastic processes with stationary, independent increments, in: Ney, P. and S. Port, *Advances in Probability and Related Topics vol. 3*, Marcel Dekker, New York 1974, 241–396.

[26] Frostman, O., Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions (Thèse), *Meddelanden från Lunds Univ. Math. Sem.* **3** (1935), 1–118.

[27] Greenwood, P. E., The Variation of a Stable Path is Stable, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **14** (1969), 140–148.

[28] Greenwood, P. and B. Fristedt, Variations of Processes with Stationary, Independent Increments, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **23** (1972), 171–186.

[29] Harzallah, Kh., Fonctions opérant sur les fonctions définies-négatives réelles, *C. R. Acad. Sci. Paris* **260** (1965), 6790–6793.

[30] Harzallah, Kh., Fonctions opérant sur les fonctions définies-négatives à valeurs complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **262** (1966), 824–826.

[31] Harzallah, Kh., Fonctions opérant sur les fonctions définies-négatives, *Ann. Inst. Fourier*, **17** (1967), 443–468.

[32] Hawkes, J., Some Dimension Theorems for the Sample Functions of Stable Processes, *Indiana J. Math.*, **20** (1971), 733–738.

[33] Hawkes, J., On the Hausdorff Dimension of the Intersection of the Range of a Stable Process with a Borel Set, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **19** (1971), 90–102.

[34] Hawkes, J., Potential theory of Lévy processes, *Proc. London Math. Soc.* **33** (1977), 335–352.

[35] Hawkes, J. and W. E. Pruitt, Uniform Dimension Results for Processes with Independent Increments, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **28** (1974), 277–288.

[36] Heinz, E., Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.* **123** (1951), 415–438.

[37] Herglotz, G., Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis, *Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Klasse* **63** (1911), 501–511.

[38] Hewitt, E. and K. R. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer, Graduate Texts in Math. vol. **25**, New York 1975.

[39] Hoh, W., *Das Martingalproblem für eine Klasse von Pseudodifferentialoperatoren*, Dissertation, Erlangen 1992.

[40] Hoh, W., The martingale problem for a class of pseudo differential operators, *erscheint in Math. Ann.* **xx** (1994), xxxx–xxxx.

[41] Hoh, W., Pseudo differential operators with negative definite symbols and the martingale problem, *eingereicht*.

[42] Hoh, W. and N. Jacob, Some Dirichlet forms generated by pseudo differential operators, *Bull. Sc. Math. 2e. sér.* **116** (1992), 383–398.

[43] Huff, B., The strict subordination of differential processes, *Sankhyā, Ser. A* **31** (1969), 403–412.

[44] Itô, K., *Lectures on Stochastic Processes*, Springer, Tata Lecture Notes in Math., Berlin 1984.

[45] Itô, K. and H. P. McKean (Jr.), *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer, Grundlehren math. Wiss. Bd. **125**, Berlin 1974 (2nd printing).

[46] Jacob, N., Dirichlet forms and pseudo differential operators, *Expo. Math.* **6** (1988), 313–351.

[47] Jacob, N., A Class of Elliptic Pseudo Differential Operators Generating Symmetric Dirichlet Forms, *Pot. Anal.* **1** (1992), 221–232.

[48] Jacob, N., Further pseudodifferential operators generating Feller semigroups and Dirichlet forms, *Revista Mat. Iberoamericana* **9** (1993), 373–407.

[49] Jacob, N., A class of Feller semigroups generated by pseudo differential operators, *Math. Z.* **215** (1994), 151–166.

[50] Kahane, J.-P., Dimension capacitaire et dimension de Hausdorff, in: Mokobodski, G. et D. Pinchon (eds.), *Théorie du Potentiel Orsay 1983*, Springer, Lecture Notes Math. vol. **1096**, Berlin 1984, 393–400.

[51] Kahane, J.-P., *Some Random Series of Functions*, Cambridge University Press, Cambridge Studies in Math. vol. **5**, Cambridge 1985 (2nd ed.).

[52] Karatzas, I. and St. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, Graduate Texts in Math. vol. **113**, New York 1988.

[53] Loève, M., *Probability Theory*, van Nostrand, The University Series in Higher Math., Princeton, NJ 1963 (3rd ed.).

[54] Löwner, K., Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Z.* **38** (1934), 177–216.

[55] McKean (Jr.), H. P., Sample functions of stable processes, *Ann. Math.* **61** (1955), 564–579.

[56] McKean (Jr.), H. P., Hausdorff-Besicovitch dimension of Brownian motion paths, *Duke J. Math.*, **22** (1955), 229–234.

[57] Millar, P. W., Path Behavior of Processes with Stationary Independent Increments, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **17** (1971), 53–73.

[58] Monroe, I., On the γ–variation of processes with stationary independent increments, *Ann. Math. Stat.* **43** (1972), 1213–1220.

[59] Monroe, I., On embedding right continuous martingales in Brownian motion, *Ann. Math. Stat.* **43** (1972), 1293–1311.

[60] Nollau, V., Über Potenzen von linearen Operatoren in Banachschen Räumen, *Acta Sci. Math.* **28** (1967), 107–121.

[61] Nollau, V., Über den Logarithmus abgeschlossener Operatoren in Banachschen Räumen, *Acta Sci. Math.* **30** (1969), 161–174.

[62] Phillips, R. S., On the generation of semigroups of linear operators, *Pac. J. Math.* **2** (1952), 343–369.

[63] Protter, Ph., *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Applications of Math. vol. **21**, Berlin 1990.

[64] Prüss, J., *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Birkhäuser, Monographs in Math. vol. **87**, Basel 1993.

[65] Pruitt, W. E., The Hausdorff Dimension of the Range of a Process with Stationary Independent Increments, *Indiana J. Math.* **19** (1969), 371–378.

[66] Remmert, R., *Funktionentheorie 1*, Springer, Grundwissen Math. Bd. **5**, Berlin 1984.

[67] Rogers, C. A., *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, Cambridge 1970.

[68] Rogers, C. A. and S. J. Taylor, Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure, *Mathematika* **8** (1961), 1–31.

[69] Roth, J.-P., Les opérateurs elliptiques comme générateurs infinitesimaux de semi-groupes de Feller, in: Brelot, M. et al. (eds.), *Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 3*, Springer, Lecture Notes Math. vol. **681**, Berlin 1978, 234–251.

[70] Schilling, R. L., When does a càdlàg process have continuous sample paths?, erscheint in *Expo. Math.* 1994.

[71] Selmi, M., Comparaison des semi-groupes et des résolvantes d'ordre α associés à des opérateurs différentiels de type divergence, *Pot. Anal.* **3** (1994), 15–45.

[72] Stone, M. H., *Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publ. vol. **15**, New York 1964.

[73] Stroock, D. W., Diffusion Semigroups Corresponding to Uniformly Elliptic Divergence Form Operators, in: Azéma, J., Meyer P. A. et M. Yor (eds.), *Séminaire de Probabilités XXII*, Springer, Lecture Notes Math. vol. **1321**, Berlin 1988, 316–347.

[74] Taylor, S. J., Sample path properties of processes with stationary independent increments, in: Kendall, D. G. and E. F. Harding (eds.), *Stochastic Analysis* Wiley, London 1973, 387–414.

[75] Wentzell, A. D., *Theorie zufälliger Prozesse*, Birkhäuser, Math. Reihe Bd. **65**, Basel 1979.

[76] Widder, D. V., *The Laplace Transform*, Princeton University Press, Princeton Math. Ser. vol. **6**, Princeton, NJ 1946 (2nd printing).

[77] Widder, D. V., *An Introduction to Transform Theory*, Academic Press, Pure and Appl. Math. vol. **42**, New York 1971.

[78] Williams, D., *Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol. 1: Foundations*, Wiley, Series in Prob. and Math. Stat., Chichester 1979.

[79] Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer, Grundlehren math. Wiss. Bd. **123**, Berlin 1980 (6th ed.).