*Erschienen in: Jahresbericht Dtsch. Mathematiker-Vereinigung **104.4** (2002) 6–9*

Sato, K., Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions (Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 68), Cambridge University Press, Cambridge 1999, xii, 486 S., £ 50.00, ISBN 0–521–55302–4.

Das Studium von Summen unabhängiger Zufallsvariabler ist zentraler Bestandteil jeder Vorlesung über mathematische Stochastik. Ein Höhepunkt ist die Klassifizierung aller möglichen Grenzverteilungen: deren Fouriertransformierte sind von der Form $e^{-\psi(\xi)}$, wobei der Exponent $\psi(\xi)$ durch die Lévy-Khinchine Formel gegeben ist,

$$\psi(\xi) = i\ell \cdot \xi + \xi \cdot Q\xi + \int_{y \neq 0} \left(1 - e^{iy \cdot \xi} + \frac{iy \cdot \xi}{1 + |y|^2} \right) \nu(dy), \quad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

hier sind $\ell \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv semidefinite Matrix und ν das Lévy-Maß mit Träger in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\int_{y \neq 0} \min\{|y|^2, 1\} \, \nu(dy) < \infty$.

Will man sich von der oben beschriebenen diskreten Situation (wir betrachten Partialsummen $S_k, k \in \mathbb{N}$ identisch verteilter und unabhängiger Zufallsvariabler) lösen, dann trifft man auf Zufallsgrößen $X_t, t \geq 0$, die identisch verteilte und unabhängige Zuwächse $X_t - X_s$ haben. Wir sprechen von einem *Lévy-Prozeß*, wenn zusätzlich $t \mapsto X_t$ stochastisch stetig ist.

So gesehen sind Lévy-Prozesse die einfachsten stochastischen Prozesse mit kontinuierlicher Indexmenge; dennoch ist die Familie der Lévy-Prozesse überaus reichhaltig—prominente Vertreter sind der Poisson-Prozeß, stabile Prozesse und die Brownsche Bewegung—und bildet den Ausgangspunkt für weitgehende Verallgemeinerungen etwa hin zur Theorie der Semimartingale oder der allgemeinen Markovschen Prozesse. Zum Standardrepertoire der meisten Lehrbücher und Vorlesungen gehören oft nur der Poisson-Prozeß und die Brownsche Bewegung. Viele Situationen werden aber besser durch Lévy-Prozesse mit Sprüngen modelliert—zum Beispiel in der Finanzmathematik, wo empirische Studien eine Modellierung der Kurse durch Lévy-Prozesse mit hyperbolischen Verteilungen nahelegen.

Die meisten Monographien, die Lévy-Prozesse behandeln, stammen aus den sechziger und siebziger Jahren. In erster Linie sind das die Klassiker von Lévy (1948/65–vergriffen) und Gnedenko/Kolmogorov (1949/60–vergriffen), die Bücher von Skorohod (1961/65–vergriffen, 1964, 2. Auflage 1986/91 (Preis!)) und Gihman/Skorohod (1965/69, Nachdruck 1996), (1973/75–vergriffen), die Vorlesungsausarbeitungen von Itô (1961/84, 1969–beide vergriffen), sowie die

Überblicksartikel von Taylor (1973) und Fristedt (1974). Bei den Lehrbüchern sind Breiman (1969, Nachdruck 1992) und Fristedt/Gray (1997) zu nennen, wobei diese aber kaum über die Definition und einfachste Eigenschaften hinausgehen. Nur eine Nebenrolle im Rahmen der Theorie allgemeiner Semimartingale spielen Lévy-Prozesse bei Ikeda/Watanabe (1981/89–vergriffen), Jacod/Shiryaev (1987) oder Protter (1990). Die bisher einzige moderne Darstellung über Lévy-Prozesse ist die Monographie von Bertoin (1996, besprochen an gleicher Stelle *Jahresbericht der DMV* **101**.1 (1999), 8–10), wo recht speziell die Potentialtheorie und das Fluktuationsverhalten von Lévy-Prozessen behandelt werden—beides Entwicklungen der letzten 25 Jahre.

Die vorliegende Monographie von Sato ist der Versuch einer umfassenden und trotzdem elementaren Darstellung der Theorie der Lévy-Prozesse. Um es kurz zu machen: das Buch wird dieser Herausforderung durchaus gerecht. Ursprünglich erschien es 1990 unter dem Titel *Kahou katei* in japanischer Sprache. Die vorliegende Version ist eine grundlegend überarbeitete und erweiterte Fassung der Erstauflage.

Ausgangspunkt ist der oben skizzierte Ansatz, der Lévy-Prozesse als natürliches Bindeglied zwischen Summen von unabhängigen Zufallsvariablen sowie allgemeinen Markov-Prozessen und Semimartingalen begreift. Das erlaubt einen gut motivierten, direkten Zugang zur Theorie der Lévy-Prozesse und fordert vom Leser relativ bescheidene Vorkenntnisse, wie sie normalerweise in einer Kursvorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie 1" vermittelt werden; zugleich bleibt der Text auch für nicht-Spezialisten gut lesbar.

Formal gliedert sich das Buch in 10 Kapitel, wobei die ersten fünf Kapitel die Grundlagen der Theorie der Lévy-Prozesse und unbegrenzt teilbaren Verteilungen entwickeln, während die verbleibenden Kapitel ausgewählte Themen behandeln und zu selektivem Lesen einladen. Jedes Kapitel endet mit Übungsaufgaben, die das vorgestellte Material abrunden, und mit Anmerkungen historischer und weiterführender Natur. Alle 168 Übungsaufgaben sind in einem Anhang vollständig gelöst oder aber mit einschlägigen Literaturhinweisen versehen. Besonders hervorzuheben ist auch, daß kein (wesentlicher) Teil des Stoffs dem Leser "zur Übung" überlassen wird.

Im ersten Kapitel werden kurz grundlegende Definitionen und Sprechweisen wiederholt und die elementaren Beispiele (Poisson-Prozess, verallgemeinerte Poisson-Prozesse, Brownsche Bewegung) vorgestellt. Der eigentliche Text beginnt in Kapitel zwei, wo die Existenz von Lévy-Prozessen und additiven Prozessen (diese zeichnen sich durch unabhängige, aber nicht notwendig stationäre Zuwächse aus) mittels der klassischen Kolmogorov-Konstruktion bewiesen wird. Zentrales Resultat ist die Aussage, daß jeder unbegrenzt teilbaren Verteilung ein Lévy-Prozeß zugeordnet werden kann, sowie deren (triviale) Umkehrung. Hier findet sich auch ein analytischer Beweis der Lévy-

Khinchine Formel in $\mathbb{R}^n$ und die Behandlung der Übergangshalbgruppen von Lévy-Prozessen. Spezielle Lévy-Prozesse, insbesondere Prozesse mit stabilen oder semi-stabilen Verteilungen, Prozesse mit selbstähnlichen Pfaden und sogenannte *self-decomposable processes*, werden in Kapitel 3 besprochen. Diese Verteilungen sind empirisch wichtig, sie haben gute Skalierungseigenschaften, und ihre theoretische Bedeutung verdanken sie der Tatsache, daß sie genau als Grenzverteilungen von Summen $b_k(X_1 + X_2 + \ldots + X_k) + c_k$, $k \in \mathbb{N}$, $b_k, c_k \in \mathbb{R}^n$, von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren auftreten—und sich auch als solche realisieren lassen. Später wird immer wieder auf konkrete Beispiele aus diesem Kapitel zurückgegriffen. Kapitel 4 ist der grundlegenden Lévy-Itô-Zerlegung der Trajektorien eines Lévy-Prozesses gewidmet. Diese besagt, daß ein typischer Pfad aus der Superposition einer deterministischen linearen Funktion (Drift), einem Brownschen Pfad (mit Kovarianzmatrix Q), und einem reinen Sprungprozeß entsteht. Der Sprungprozeß ist die (ggf. kompensierte) Summe aller Sprünge, wobei Sprungzeiten und -höhen durch ein Poisson-Zufallsmaß festgelegt sind; als Intensitätsmaß tritt dabei $dt \otimes \nu(dy)$ auf. Die pfadweise Darstellung des Lévy-Prozesses erlaubt es, stochastische Eigenschaften des Prozesses auf die sogenannte Lévy-Charakteristik (ℓ, Q, ν) aus der Darstellung von $\psi(\xi)$, und letzten Endes auf die Fouriertransformation von X_t, zurückzuführen. Dieser Ansatz geht auf Bochner (1955) zurück. In Kapitel 5, *Distributional Properties of Lévy Processes*, wird das an Hand des Trägers, von verallgemeinerten Momenten und Glattheitseigenschaften eines Prozesses illustriert.

Dieser Einführung in die Theorie schließen sich auf etwa 200 Seiten weitere fünf Kapitel an, die jedoch (abgesehen von Teilen von Kapitel 9 über Wiener-Hopf-Methoden) unabhängig voneinander gelesen werden können. Im einzelnen werden die Themen Subordination und Dichtetransformation (Kapitel 6), Rekurrenz- und Transienzverhalten (Kapitel 7), probabilistische Potentialtheorie (Kapitel 8), Wiener-Hopf-Zerlegungen (Kapitel 9) sowie Uni- und Multimodalität von unbegrenzt teilbaren Verteilungen (Kapitel 10) behandelt. Die Auswahl der Themen ist einigermaßen subjektiv—das gesamte Spektrum von Lévy-Prozessen ließe sich in einem einzigen Band nicht behandeln—und viele interessante Themen sind ausgeklammert, etwa Aspekte der stochastischen Analysis. Die Forschungsinteressen des Autors spiegeln sich vor allem in den Abschnitten 6, 7 und 10 wieder, wo viele Originalbeiträge vom Autor selbst stammen. Im Kapitel über Subordination findet sich auch eine (leider sehr) kurze analytische Behandlung von Lévy-Erzeugern und dem mit Subordination zusammenhängenden Funktionalkalkül. Fragen der Transienz und Rekurrenz von Lévy-Prozessen erscheinen nun zum ersten Mal in Buchform, wobei auch hier kein Beweis des Spitzerschen Rekurrenzkriteriums geführt wird. (Dafür dürfte jeder, der die Arbeiten von Port & Stone

(1971) kennt, Verständnis aufbringen!). Das Kapitel über Potentialtheorie, das für die englische Ausgabe neu geschrieben wurde, ist stark von Bertoin (1996) beeinflußt; es ist aber keinesfalls deckungsgleich mit dessen Darstellung. Die Methodik ist elementarer und betrachtet oft die Absolutstetigkeit der Halbgruppe oder der Resolventenfamilie. Ähnliches gilt für das Kapitel über Wiener-Hopf-Methoden, wo Sato auf Grenzwertsätze für zufällige Irrfahrten zurückgreift und somit Resultate der Exkursionstheorie vermeidet.

Das Buch ist weder Lehrbuch noch ausgesprochene Forschungsmonographie, vielmehr ein großangelegter Überblick und zugleich eine solide Einführung in einen Teilbereich der Stochastik, der gerade in den Anwendungen an Bedeutung gewinnt. Als Vorlesungstext ist das Buch wohl nicht geeignet, dazu ist die Darstellung zu facettenreich; auch wird dem Leser keinerlei Hilfe bei der Auswahl des Materials geboten. Für ein Selbststudium hingegen scheint mir Satos Buch fast ideal zu sein, und mit ein wenig Muße erhält man auf den ersten 150 Seiten eine grundsolide und mit vielen Beispielen illustrierte Einführung in die Theorie der Lévy- und Markovprozesse. Hervorzuheben ist die gut durchdachte und überaus präzise Aufarbeitung des Stoffes. Die Beweise sind stets vollständig, in allen Schritten gut nachvollziehbar und sämtliche Techniken, die über die eingangs erwähnten Voraussetzungen hinausgehen, werden im Text entwickelt. Des Autors Könnerschaft und Liebe zum Detail äußert sich auf fast jeder Seite des Buchs, in der Reichhaltigkeit der Beispiele, Aufgaben und Bemerkungen. Als große Leistung darf die 536 Einträge umfassende Bibliographie gelten, die Originalarbeiten aus mehr als fünf Jahrzehnten verzeichnet; und weil dort auf die Textstellen hingewiesen wird, wo die jeweilige Quelle zitiert ist, wird sie zum wertvollen Hilfsmittel. Daß der Text selbst äußerst sorgfältig aufbereitet ist und sich auf weit über 400 Seiten nur einige wenige Druckfehler finden, versteht sich nunmehr von selbst.

Ein Wermutstropfen mag sein, daß das Buch ein wenig altmodisch ist, indem es sich ganz auf klassische Fragen der Theorie der Lévy-Prozesse beschränkt und auf neuere Entwicklungen der stochastischen Analysis nicht eingeht. Auch nach Satos eindrucksvollem Werk fehlt in der Literatur eine gute, kurzgefaßte Einführung in das Gebiet der stochastischen Differentialgleichungen und Lévy-Prozesse.

Dennoch: Die vorliegende Monographie wird auf lange Zeit den Standard setzen, der schwer zu übertreffen sein wird. Satos Buch gehört in jede wissenschaftliche Bibliothek und auf den Schreibtisch jedes Wahrscheinlichkeitstheoretikers.

Literaturverzeichnis:

J. Bertoin: *Lévy Processes*, Cambridge University Press, Cambridge: 1996.

S. Bochner: *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, Univ. of California Press, Berkeley: 1955 (Neuauflage 1960).

L. Breiman: *Probability*, Addison-Wesley, Reading (MA): 1968 (Nachdruck SIAM, Philadelphia: 1992).

B. Fristedt: Sample function behavior of stochastic processes with stationary, independent increments. In: P. Ney, S. Port (Hg.): *Advances in Probability, vol. 3*, M. Dekker, New York: 1974.

B. Fristedt, L. Gray: *A Modern Approach to Probability Theory*, Birkhäuser, Boston (MA): 1997.

I.I. Gihman, A. V. Skorohod: *Introduction to the Theory of Random Processes*, Saunders, Philadelphia: 1969 (russ. Original Nauka, Moskau: 1965, engl. Nachdruck Dover, Mineola (NY): 1996).

I.I. Gihman, A. V. Skorohod: *The Theory of Stochastic Processes II*, Springer, Berlin 1975 (russ. Original Nauka, Moskau: 1973).

B.W. Gnedenko, A.N. Kolmogorov: *Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen*, Akademie-Verlag, Berlin: 1960 (russ. Original Gostechizdat, Moskau: 1949).

N. Ikeda, S. Watanabe: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Kodansha/North Holland, Tokyo/Amsterdam: 1989 (erste Aufl. 1981).

K. Itô: *Lectures on Stochastic Processes*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay: 1961 (Neuaufl. Springer, Berlin: 1984).

K. Itô: *Stochastic Processes*, Univ. Aarhus Lecture Note Series **16**, Aarhus: 1969.

J. Jacod, A.N. Shiryaev: *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, Berlin: 1987.

P. Lévy: *Processus stochastiques et mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris: 1965 (erste Aufl. 1948).

P. Protter: *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Berlin: 1990.

K. Sato: *Kahou katei*, Kinokuniya, Tokyo: 1990.

A.V. Skorohod: *Studies in the Theory of Random Processes*, Addison-Wesley, Reading (MA): 1965 (russ. Original Universitätsverlag Kiew, Kiew: 1961, Nachdruck Dover, New York: 1982).

A.V. Skorohod: *Random Processes with Independent Increments*, Kluwer, Dordrecht: 1991 (erste russ. Aufl. Nauka, Moskau: 1964, zweite überarbeitete Aufl. Nauka, Moskau: 1986).

S.J. Taylor: Sample path properties of processes with stationary independent increments. In: D.G. Kendall, E.F. Harding (Hg.): *Stochastic analysis*, Wiley, New York: 1973.

University of Sussex René Schilling