Bichteler, Klaus: Stochastic Integration with Jumps. Cambridge University Press (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications Vol. 89), Cambridge 2002, xiii, 501 S., £55.00, ISBN 0-521-81129-5.

Längst schon haben Stochastische Differentialgleichungen und die damit verbundene Theorie der stochastischen Integration ihren festen Platz im Kanon unserer Mathematikausbildung; in Anwendungen und auch bei den Anwendern hat sich dieser Zweig der mathematischen Stochastik in den letzten fünfzehn bis zwanzig Jahren etabliert und ist kaum mehr wegzudenken aus Modellen der Ingenieur- und Biowissenschaften oder—hier in aller Munde—aus der Finanzmathematik. Die einfachste stochastische Differentialgleichung ist eine Gleichung der Art

$$\dot{X}_t(\omega) = b(X_t(\omega)) + \sigma(X_t(\omega))\,\dot{\xi}_t(\omega), \qquad X_0(\omega) = x_0, \tag{$*$}$$

wo $\dot{\xi}_t(\omega)$ ein zufälliges Rauschen darstellt. Oft wird $\dot{\xi}_t$ als weißes Rauschen angenommen—aber auch andere stochastische Störterme werden betrachtet, das hängt letztlich vom zu modellierenden System ab—, d. h. ξ_t ist eine Brownsche Bewegung. Bereits bei dieser relativ einfachen Gleichung tritt ein wesentliches Problem auf: die klassische Ableitung nach der Zeit $\dot{\xi}_t$ ist nicht einmal für eine Brownsche Bewegung (geschweige denn für allgemeinere Störungen) definiert, so daß $(*)$ sinnlos ist. Fassen wir $(*)$ als Integralgleichung auf,

$$X_t(\omega) = x_0 + \int_0^t b(X_s(\omega))\,ds + \int_0^t \sigma(X_s(\omega))\,d\xi_s(\omega), \tag{$**$}$$

dann benötigen wir immer noch, daß $\xi_t(\omega)$ von beschränkter Variation ist, aber auch das trifft auf eine Brownsche Bewegung nicht mehr zu. Der naive Versuch, $\int_0^t \sigma(X_s)\,d\xi_s$ partiell zu integrieren, schlägt in der Regel fehl, da dann $\sigma(X_s)$ von beschränker Variation sein müßte, und im Hinblick auf $(*)$ kann das i. allg. nicht erwartet werden, wenn ξ_s nicht von beschränkter Variation war.

In einer Reihe von bahnbrechenden Arbeiten zu Beginn der 1940er Jahre hat der japanische Mathematiker Kiyosi Itô eine Theorie der stochastischen Integration entwickelt, die dieses Problem löst. Aufbauend auf Arbeiten von Paley und Wiener [10] definiert Itô das Integral $\int \sigma(X_s)\,d\xi_s$ zunächst als Riemannsche Summe, betrachtet dann aber nicht punktweise (d.h. für jedes einzelne ω) Konvergenz, sondern Konvergenz in $L^2 = L^2(P)$ bezüglich des zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes P. Zentral in Itôs Ansatz ist die Beobachtung, daß sowohl die Brownsche Bewegung ξ_t als auch $\xi_t^2 - t$ Martingale sind. Was Itôs Theorie so erfolgreich macht, ist die folgende Kettenregel, gemeinhin als *Itô-Formel* bekannt,

$$df(\xi_t) = f'(\xi_t)\, d\xi_t + \tfrac{1}{2} f''(\xi_t)\, dt, \qquad f \in C^2,$$

die sich von der üblichen Kettenregel eben durch den Korrekturterm für f'' unterscheidet. Intuitiv sollte dt als zweite Variation von ξ_t, also als $dt = (d\xi_t)^2$, verstanden werden. (Kürzlich hat Lyons in seinem *Rough Paths*-Ansatz eine hübsche Interpretation dieses Korrekturterms und weiterer Variationen höherer Ordnung als *Lévy-area* gegeben, vgl. [6].) Da $(dt)^2 = 0$ gilt, zeigt sich leicht, daß Itôs Integralbegriff den Stieltjesschen Ansatz einschließt. Doob bemerkte in seinem 1953 erschienenen Buch, daß sich Itôs Theorie unmittelbar auf allgemeine L^2-Martingale ξ_t als Integratoren verallgemeinern läßt, wenn man nur eine Doob-Meyer Zerlegung des Submartingals ξ_t^2 kennt. Damit griff Doob seiner Zeit etwas vor, erst P.A. Meyer erbrachte 1962-3 einen vollständigen Beweis dieses Resultats. Damit war der Weg frei zu einer allgemeinen stochastischen Integrationstheorie für L^2-Martingale, die im wesentlichen von Ph. Courrège 1962-3 und H. Kunita-S. Watanabe 1967 ausgearbeitet wurde, wir verweisen nur auf die hübsche Darstellung der Methode in [5], wo auch die einschlägigen Originalarbeiten zitiert sind. Diese Theorie wurde dann von P. A. Meyer und seiner Straßburger Schule zunächst auf lokale (L^2-) Martingal-Integratoren ausgedehnt (eine "einfache" Stopp-Technik, wenn man erst einmal den Fundamentalsatz für lokale Martingale hat—der gängige extrem kurze Beweis ist von K. A. Yen und in [9] veröffentlicht) und dann auf allgemeine Semimartingale. Zur Erinnerung: ein Semimartingal ξ_t ist ein *càdlàg* (rechtsstetig mit endlichen linksseitigen Limiten) Prozeß, der als Summe $\xi_t = \xi_0 + A_t + M_t$ geschrieben werden kann, wo A_t ein Prozeß mit beschränkter Variation auf kompakten Zeitintervallen und M_t ein lokales Martingal ist. Erwähnenswert ist, daß in all diesen Ansätzen und Verallgemeinerungen der Integrand X_t entweder linksseitig stetig oder vorhersagbar (*predictable*, also aus einem geeigneten Abschluß der linksstetigen Prozesse) sein muß. Daß dies eine prinzipielle Einschränkung darstellt und nicht nur technischer Natur ist, haben K. Bichteler 1979 und C. Dellacherie 1980 gezeigt: jedes vernünftige stochastische Integral, das vorhersagbare Integranden zuläßt, muß notwendigerweise von einem Semimartingal getrieben sein. Obgleich diese Theorie auf den ersten Blick recht allgemein scheint, gibt es eine ganze Reihe von (Gaußischen) Prozessen, die keine Semimartingale sind, etwa gebrochene Brownsche Bewegungen (Hurst Parameter $H \neq \frac{1}{2}$) oder gewisse Dirichlet-Prozesse, die in Anwendungen eine große Rolle spielen.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen über Stochastische Differentialgleichungen für Mathematiker, Physiker, (Elektro-)Ingenieure und Wirtschaftswissenschaftler an der Universität von Austin (Texas) entstanden, die eine solide mathematische Grundlage für all die stochastischen Techniken benötigten, welche in den jeweiligen Wissenschaften (manchmal etwas handwerksmäßig) verwendet werden. Die Leser, die eine eher klassische Einführung erwarten, wie sie etwa oben skizziert wurde, werden von diesem Buch enttäuscht werden. Im Gegenteil, *"a predilection for generality for simplicity's sake led directly to the most general stochastic Lebesgue-Stieltjes integral"* [Preface, p. xi], und was sich dahinter verbirgt, ist schlechthin ein völlig neuartiger Zugang zu stochastischen Integralen. Bichteler kritisiert zu Recht die schwerfälligen und unterentwickelten Grenzwertsätze für Itô-Integrale, was zu einem guten Teil am Riemann-artigen Aufbau der Itôschen Theorie hängt. Der Autor schlägt daher vor, Daniells Ansatz auf stochastische Integrale auszudehnen, was dann zu einer viel flexibleren stochastischen Lebesgue-Stieltjes Theorie führen würde. Ist man mit Daniells Theorie vertraut, dann stellt das keine allzu große Hürde dar. Für die Klasse der Elementarprozesse $\mathcal{E}$ (stoch. Treppenfunktionen)

$$X_t(\omega) = f_0(\omega)\, 1_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{N} f_j(\omega) 1_{(t_{j-1},t_j]}(t)$$

(f_j sind $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-meßbare Zufallsvariable) kann man das Integral für jeden adaptierten Prozeß ξ_t unmittelbar angeben:

$$\Big(\int X_s\, d\xi_s\Big)(\omega) = f_0(\omega)\cdot\xi_0(\omega) + \sum_{j=1}^{N} f_j(\omega)\cdot(\xi_{t_j}(\omega) - \xi_{t_{j-1}}(\omega)).$$

Parallel zum deterministischen Fall geht man nun zu verschiedenen Abschließungen $\mathcal{E}^*$ der Elementarfunktionen über und definiert das Integral $\int X_s^*\, d\xi_s$, $X_\cdot^* \in \mathcal{E}^*$ als Grenzwert von Integralen von Elementarprozessen definieren, was z.B. in der $L^p(P)$-Skala, $0 \le p < \infty$ (*sic!*), geschehen kann. (Der Raum $L^0(P)$ besteht aus allen fast sicher endlichen Zufallsvariablen und wird mittels stochastischer Konvergenz zu einem Banachraum.) Minimalvoraussetzung an ξ_t ist dabei, daß ξ_t ein L^p-*integrator* ist, d.h., ξ_t sollte in Wahrscheinlichkeit rechtsstetig sein (i. allg. keine große Einschränkung) sowie der Beziehung

$$\sup\left\{\left\|\int X_s\, d\xi_{s\wedge t}\right\|_{L^p} \ :\ |X_s| \le 1,\ X_\cdot \in \mathcal{E}\right\} < \infty \tag{$\dagger$}$$

genügen. Mit diesem Aufbau lassen sich dann relativ bequem der Satz von der dominierten Konvergenz, Daniell-Stetigkeit des Integrals (monotone Konvergenz), Egoroffs Satz oder die Approximation des Integrals mittels (adaptiver) Riemannscher Summen usw. zeigen. Methodisch folgt das alles ziemlich analog zur klassischen deterministischen Theorie. Man beachte, daß der Integrand nicht notwendig vorhersagbar sein muß: die Klasse der L^p-Integratoren ($p > 0$) ist strikt kleiner als die Klasse der Semimartingale, wobei L^0 gerade mit den Semimartingalen übereinstimmt. Eine weitergehende Charakterisierung von L^p-Integratoren findet sich nicht, jedoch wird gezeigt, daß L^p-Martingale stets L^p-Integratoren sind. Für L^0-Integratoren (Semimartingale) wird dann auch Itôs Formel (wir erinnern uns: die Kettenregel) und einige Elemente der stochastischen Analysis (*brackets*, Doelans-Dade Exponentialfunktion, Girsanov-Transformation...) gezeigt.

Der wesentliche Vorteil der vorgeschlagenen Methode liegt wohl in der Möglichkeit, das stochastische Integral durch ganz konkrete Normen des Integranden und des Integrators abschätzen und kontrollieren zu können. Zentrale neue Resultate sind hier, daß für jeden $L^p(P)$-Integrator ξ_t und jedes $q > p$ ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q existiert, so daß ξ_t auch ein $L^q(Q)$-Integrator ist, wobei die Halbnormen (†) gegeneinander abgeschätzt werden können. Ganz offensichtlich sind solche Abschätzungen durch die Burkholder-Davis-Gundy Abschätzungen motiviert, die aber auch wiederum als Korollar gewonnen werden können. Das vielleicht überraschendste Resultat ist folgende Abschätzung,

$$\left\| \sup_{s \le T} \left| \int X_s \, d\xi_s \right| \right\|_{L^p} \le 9.5p \cdot \max_\rho \left\| \int_0^T |X_s|^\rho \, d\Lambda_s \right\|_{L^p}, \quad p \in [2, q],$$

(das $\max_\rho$ erstreckt sich, abhängig von $\xi_.$, über eine Teilmenge von $\{1, 2, p\}$) wo T eine Stoppzeit, ξ_t ein L^q-Integrator, $q \ge 2$, X_t ein vorhersagbarer und $\Lambda_t = \Lambda_t[Z, q]$ ein geeigneter streng monoton wachsender, vorhersagbarer Prozeß ist, dessen Erwartungswert man kontrollieren kann.

Das letzte Kapitel des Bandes beschäftigt sich mit stochastischen Differentialgleichungen und Flüssen, wo das bekannte Picard-Verfahren angewendet wird, nur mit dem wesentlichen Unterschied, daß man für L^p-Integratoren deutlich bessere Normabschätzungen verwenden kann als die üblichen H^p- und S^p-Normen für Semimartingale. Der Nachweis von Stabilität bzgl. der Anfangsbedingungen gestaltet sich dann deutlich natürlicher und man kann mit dieser Methode auch das numerisch interessante Euler-Schema pfadweise rechtfertigen. Stochastische Flüsse werden nur im Zusammenhang mit Semimartingalen behandelt und die Darstellung folgt dem Lehrbuch [11] von Protter. Das Buch schließt mit einigen Anhängen zu Topologie, Daniell-Integration, Analytischen Mengen, Skorokhod-Topologie, L^p-Räumen bzw.

Operatorenhalbgruppen, die das Buch *self-contained* machen (sollen), sowie Lösungen zu einigen Aufgaben. Ausführlichere Anhänge, Stichwortverzeichnisse und Notationslisten (leider dringend nötig) finden sich auf der *homepage* des Autors in Austin, Texas.

Was wir hier vor uns haben, ist sicherlich kein Lehrbuch und ich kann mir kaum vorstellen, daß ein derartiges Buch in seiner Fülle aber auch Abstraktion Grundlage einer Vorlesung (gewesen) sein kann. Um eine umfassende, ggf. überblicksartige Gesamtdarstellung eines etablierten Gebiets—so wie es der Cambridge Encyclopedia ins Stammbuch geschrieben ist—handelt es sich aber auch nicht. Zu sehr weicht dafür die Darstellung vom Standard ab, und eine in sich logische und vielleicht sogar überlegene Privatnotation verhindert die Verwendung als Referenzwerk. Schelte gebührt den Lektoren von Cambridge University Press, die dem Autor einige unschöne Marotten nicht ausreden konnten: eine Vielzahl von kommentierenden Fußnoten (ich habe auf manchen Seiten drei Fußnoten und noch zahlreichere Verweise auf vorangehende Fußnoten gefunden!), häufige Verweise auf Nummern von vorangehenden Fußnoten innerhalb eines jeden Kapitels (daß am Ende jeden Kapitels eine Liste steht, wo sich denn der Text der Fußnoten findet, ist auch nur ein schwaches Trostpflaster) und, wenigstens auf den ersten fünfzig Seiten, die permanente Unterweisung im richtigen Gebrauch des Englischen Artikels. Lobend erwähnen möchte ich die äußerst geringe Anzahl von Druckfehlern und die an vielen Stellen gelungene Motivation, die stets den vertrauteren deterministischen Fall der Stochastik gegenüberstellt.

Bichtelers *Stochastic Integration with Jumps* ist eine Forschungsmonographie, die einen sehr interessanten Ansatz zur stochastischen Integration vorschlägt. Als Lehrbuch oder Nachschlagewerk ist das Buch weniger geeignet, für ein Seminar mit einigen wenigen engagierten Studenten, die viel Zeit investieren wollen, kann die Lektüre des Buchs äußerst gewinnbringend sein.

Literatur:

1. K. Bichteler: Stochastic Integrators, *Bull. Am. Math. Soc.* **1** (1979), 761–765.
2. C. Dellacherie: Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique, *Stoch. Proc. Appl.* **10** (1980), 115–144.
3. J. L. Doob: *Stochastic Processes*, Wiley, Series in Probab. Math. Stat., New York 1953.
4. K. Itô: Stochastic Integral, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20** (1944), 519–524.
5. I. Karatzas, St. E. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, Graduate Texts Math. **113**, New York 1988.
6. T. Lyons, Z. Qian: *System Control and Rough Paths*, Clarendon Press, Oxford Math. Monogr., Oxford 2002.
7. P. A. Meyer: A decomposition theorem for supermartingales, *Ill. J. Math.* **6** (1962), 193–205.

8. P. A. Meyer: Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem, *Ill. J. Math.* **7** (1963), 1–17.
9. P. A. Meyer: Notes sur les intégrales stochastiques. II Le théorème fondamental sur les martingales locales, *Sem. Probab.* **11**, Springer, Lecture Notes Math. 581, Berlin 1977, 463–464.
10. R. E. A. C. Paley, N. Wiener: *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Am. Math. Soc., Colloquium Publications **19**, Providence (RI) 1934.
11. P. Protter: *Stochastic Integration and Differential Equations. A New Approach*, Springer, Appl. Math. **21**, Berlin 1992 (2nd. corr. printing).

University of Sussex @ Brighton René L. Schilling