Wahrscheinlichkeit

de Gruyter Lehrbuch, Berlin 2017

ISBN: 978–3–11–0345065–4

Lösungshandbuch

René L. Schilling

Dresden, Mai 2017

Diese Version: March 29, 2025

Dank. Ich bedanke mich bei Frau Dr. Franziska Kühn und Herrn Dr. Björn Böttcher, die viele der Aufgaben und Lösungen beigesteuert haben. Ich danke Frau Dr. Katharina Fischer und Herrn Dr. Georg Berschneider für die Mithilfe an diesem Handbuch, für viele hilfreiche Hinweise und sorgsames Korrekturlesen.

Dresden, Mai 2017 René Schilling

Contents

2 Grundmodelle der Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 2.1. Lösung: Um im Gitter $\{0,1,2,\ldots,n\}^2$ von $(0,0)$ nach (n,n) zu gelangen, müssen wir $2n$ Schritte machen; von diesen gehen n nach rechts und n nach oben, und wir müssen nur feststellen, *wann* wir nach rechts bzw. nach oben gehen. Das geht auf $\binom{2n}{n}$ Arten.

Im Konkreten Fall gehen wir erst von $(0,0) \to (4,4)$ – das geht auf $\binom{8}{4} = 70$ Arten, und dann von $(4,4) \to (8,8)$ was wiederum auf $\binom{8}{4}$ Arten geht. Mit dem Laplaceschen Ansatz ,,Zahl der günstigen Ereignisse" dividiert durch die ,,Gesamtzahl aller Ereignisse" ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\text{,,alle Wege } (0,0) \to (4,4) \times \text{alle Wege } (4,4) \to (8,8)\text{''}}{\text{,,alle Wege } (0,0) \to (8,8)\text{''}} = \frac{\binom{8}{4}\binom{8}{4}}{\binom{16}{8}} = \frac{70 \times 70}{12870} \approx 0.38.$$

Aufgabe 2.2. Lösung: Wir sollten uns kurz einen W-Raum für dieses Modell überlegen: $\Omega = \{(i,j,k) : i,j,k \in \{1,2,\ldots,6\}\}$, d.h. (i,j,k) gibt an, welche der drei Personen in welchem Stock den Fahrstuhl verlässt. Insgesamt gibt es $6 \times 6 \times 6 = 216$ verschiedene Möglichkeiten, wie die Personen den Fahrstuhl verlassen können.

(a) Da es sich um ein fest gegebenes Stockwerk handelt, müssen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten multiplizieren: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. Etwas formaler: Hier besteht das günstige Ereignis also aus $A = (1,1,1)$

(b) Da es der 1., 2., 3., 4., 5., oder 6. Stock sein kann, wo alle drei Personen aussteigen, müssen wir nun die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Stockwerke (haben wir in a) berechnet) für die Stockwerke aufaddieren:

$$\underbrace{\frac{1}{216} + \cdots + \frac{1}{216}}_{\text{6 Stockwerke}} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

Etwas formaler: Hier ist das Ereignis $A = \{(i,i,i) : i \in \{1,2,\ldots,6\}\}$.

(c) Wenn alle in verschiedenen Stockwerken aussteigen sollen, dann hat Person 1 genau 6 Möglichkeiten, Person 2 hat noch 5 Möglichkeiten und Person 3 hat 4 Möglichkeiten. Somit haben wir

$$\frac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{9}.$$

Etwas formaler: Hier ist $A = \{(i,j,k) : i \neq j, i \neq k, j \neq k, i,j,k \in \{1,2,\ldots,6\}\}$.

Aufgabe 2.3. Lösung: Diese Aufgabe löst man mit der hypergeometrischen Verteilung. Es gilt

$$p_i = \text{W-keit, genau } i \text{ weiße Kugeln zu ziehen} = H(10,3,4,i) = \frac{\binom{3}{i}\binom{7}{4-i}}{\binom{10}{4}}$$

und damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p_1 + p_2 + p_3$ (mehr als 3 weiße kann man ja nicht ziehen). Das ist eine mühsame Rechnung und wie bei fast allen ,,mindestens..." Aufgaben sollte man das Gegenereignis betrachten:

$$\text{mindestens eine weiße Kugel} \mathrel{\hat{=}} \textit{nicht} \text{ keine weiße Kugel} \mathrel{\hat{=}} \textit{nicht} \text{ nur schwarze Kugeln}$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1 - \underbrace{\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}}_{=H(10,3,4,0)} = 1 - \frac{1 \times 35}{210} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

■■

Aufgabe 2.4. Lösung: Das ist eine Variation des Urnenmodells aus der vorherigen Aufgabe. Die Wahrscheinlichkeit p_i genau i Aufgaben lösen zu können ist

$$p_i = H(12,8,6,i) = \frac{\binom{8}{i}\binom{4}{6-i}}{\binom{12}{6}}.$$

Offenbar ist $i \leqslant 6$. Man rechnet sofort nach, dass

$$p_4 = \frac{420}{924}, \quad p_5 = \frac{224}{924}, \quad p_6 = \frac{28}{924} \implies p_4 + p_5 + p_6 = \frac{672}{924} = \frac{8}{11}.$$

■■

Aufgabe 2.5. Lösung:

(a) Der zugehörige W-Raum ist $\Omega = \{1, \dots, M\}^n$ (Ziehen mit Zurücklegen) und wir interessieren uns für die folgende Menge

$$A = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \neq a_k \text{ wenn } i \neq k\}.$$

Offenbar gilt $|\Omega| = M^n$ während $|A| = M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \cdot (M-n+1)$ ist.

Interpretation: Für a_1 haben wir M Möglichkeiten, für a_2 nur noch $(M-1)$ (da $a_1 \neq a_2$) usw. Somit

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \cdot \ldots \cdot (M-n+1)}{M^n}.$$

Wir können diese Formel auch folgendermaßen schreiben:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{M}{M} \cdot \frac{(M-1)}{M} \cdot \frac{(M-2)}{M} \cdot \ldots \cdot \frac{(M-n+1)}{M} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{M}\right).$$

Interpretation: jeder Faktor gibt die Wahrscheinlichkeit an, eine Kugel zu ziehen, deren Nummer bisher noch nicht vorgekommen ist.

(b) Wenn wir $p = i/M$ verwenden, d.h. $1 - p = 1 - i/M$, dann erhalten wir

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{M}\right) \approx \prod_{i=1}^{n-1} e^{-i/M} = e^{\sum_{i=1}^{n-1} i/M} = e^{-n(n-1)/2M}.$$

(c) Wir haben $M = 365$ und $n = 30$. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kursteilnehmer an verschiedenen Tagen Geburtstag haben ist also

$$\mathbb{P}(A) = e^{-29\times 30/730} \approx 0,3037$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Gegenwahrscheinlichkeit:

$$1 - \mathbb{P}(A) \approx 1 - 0,3037 = 0,6963.$$

Beachte: Das scheinbar paradoxe Ergebnis hängt damit zusammen, dass wir nicht festgelegt haben *an welchem Tag* im Jahr der Geburtstag sein soll....

Man kann sich auch die Frage stellen, ab wie vielen Kursteilnehmern die Wahrscheinlichkeit mindestens 0,5 ist. MaW:

$$e^{-n(n-1)/730} \leqslant 0.5 \iff n(n-1) \geqslant 730 \log 2 \approx 506$$

und das ist ab $n = 23$ erfüllt.

■■

Aufgabe 2.6. Lösung: Zur Lösung verwenden wir wieder die hypergeometrische Verteilung. Offensichtlich muss $s \leqslant k$ gelten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$$H(n+m, n, k, s) = \frac{\binom{n}{s}\binom{m}{k-s}}{\binom{n+m}{k}}.$$

■■

Aufgabe 2.7. Lösung: Wir schreiben $n = i_1 + 10i_2 + 100i_3 + \dots$ mit $i_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Es gilt

$$n^3 = i_1^3 + 30i_1^2 i_2 + \cdots = j_1 + 10j_2 + 100j_3 + \dots \tag{*}$$

d.h. die beiden letzten Ziffern j_1, j_2 der Darstellung von n^3 hängen nur von i_1 und i_2 ab. Damit liegt das Modell ,,Ziehen mit Zurücklegen aus der Menge $\{0, 1, \dots, 9\}$" vor.

- Klar ist, dass $i_1 = j_1 = 1$ gelten muß. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $1/10$.
- Nun sei $j_1 = 1$. Damit auch $j_2 = 1$ gilt, muß die Beziehung $(n^3 - 1)/10$ auf ,,1" enden — das sieht man durch Umformen von (*). Also muss $3i_2$ auf ,,1" enden, und das geschieht nur für $i_2 = 7$. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist auch $1/10$.

Insgesamt erhalten wir die Wahrscheinlichkeit $1/100 = 1/10 \times 1/10$, da n^3 nur dann auf ,,11" endet, wenn $i_1 = 1$ und $i_2 = 7$ gilt.

■■

Aufgabe 2.8. Lösung: Wir können alle Bücher auf 10! Arten anordnen.

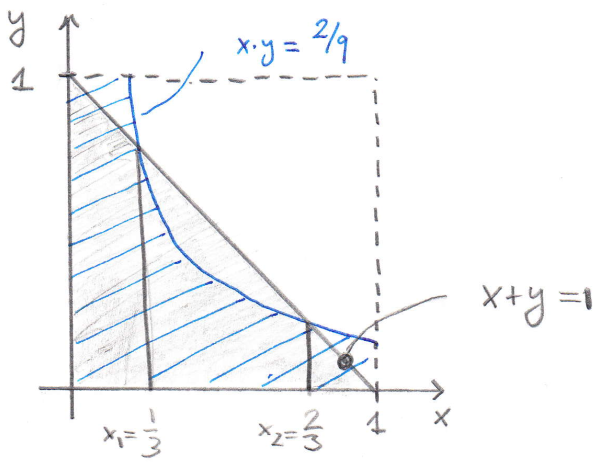
Wir können die drei ausgezeichneten Bücher, die nebeneinander stehen sollen, auf 3! Arten anordnen.

Wir können die sieben verbleibenden Bücher, die irgendwie stehen sollen, auf 7! Arten anordnen.

Wir können den „Dreierblock" von nebeneinander stehenden Büchern auf 8 Positionen stellen (das erste Buch des Blocks kann nur auf Position 1,2,. . . , 8 stehen).

Insgesamt erhalten wir daher für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\frac{8\times 3!\times 7!}{10!} = \frac{1}{15}$.

Aufgabe 2.9. Lösung: Wir folgen dem Hinweis und zeichnen die definierenden Beziehungen für $(x,y) \in [0,1]^2$ (das ist zugleich unser W-Raum, auf dem wir das Lebesgue-Maß als Gleichverteilung betrachten):



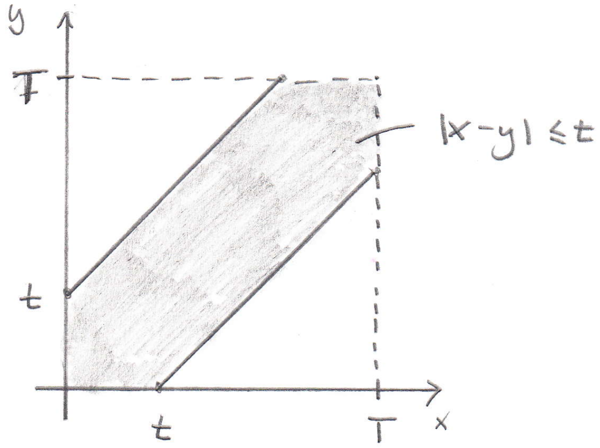
Der Bereich $x + y \leqslant 1$ ist grau schraffiert, der Bereich $xy \leqslant 2/9$ ist blau schraffiert. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht der Fläche, wo sich die beiden Bereiche überschneiden (vgl. Abbildung). Wir schreiben die beiden Grenzfunktionen als

$$y_g = 1 - x \quad \text{(für die Gerade)} \quad \text{und} \quad y_h = \frac{2}{9}\frac{1}{x} \quad \text{(für die Hyperbel)}.$$

Offensichtlich schneidet die Hyperbel die Gerade in den Abszissenpunkten $x_i = i/3$, $i = 1, 2$. Diese Fläche lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}\int_0^{1/3} y_g\,dx + \int_{1/3}^{2/3} y_h\,dx + \int_{2/3}^{1} y_g\,dx &= \int_0^{1/3}(1-x)\,dx + \frac{2}{9}\int_{1/3}^{2/3}\frac{1}{x}\,dx + \int_{2/3}^{1}(1-x)\,dx \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2 \approx 48,74\%.\end{aligned}$$

Aufgabe 2.10. Lösung: Wir schreiben $x, y \in [0, T]$ für die Ankunftszeiten. Der W-Raum ist daher das Quadrat $[0, T]^2$ und wir betrachten darauf die Gleichverteilung, d.h. das durch T^{-2} normierte Lebesguemaß. Wir interessieren uns für die „Fläche“, wo $|x - y| \leqslant t$ gilt. Diese ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



Der gesuchte Bereich (schraffiert dargestellt) liegt zwischen den Geraden $x - y = \pm t$ bzw. $y = x \pm t$. Damit erhalten wir für die Fläche

$$T^2 - \frac{1}{2}(T-t)^2 - \frac{1}{2}(T-t)^2 = 2Tt - t^2.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$\frac{2Tt - t^2}{T^2} = \left[1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2\right]$$

■■

Aufgabe 2.11. Lösung: **Schritt 1:** Wir beginnen mit der Situation $n = 1$ (das ist die geometrische Verteilung):

$$\mathbb{P}(X = i) = q^i p \quad \text{wir beobachten erst } i \in \mathbb{N}_0 \text{ Misserfolge, dann den Erfolg}$$

d.h. $X = W - 1$ aus Beispiel 2.4.f) und wir finden $\mathbb{E}X = \mathbb{E}W - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$. Die Varianz berechnen wir mit

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

d.h. wir müssen noch $\mathbb{E}(X^2)$ finden. Das geht analog zur Rechnung in 2.4.f)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \mathbb{P}(X = i) = p \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^i = qp \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{d}{dq} q^i = qp \frac{d}{dq} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} i q^i}_{= \mathbb{E}X/p} \\
&= qp \frac{d}{dq} \frac{q}{(1-q)^2} = qp \left(\frac{1}{(1-q)^2} + \frac{2q}{(1-q)^3} \right) = \frac{q}{p} + 2\frac{q^2}{p^2}.
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{q}{p} + 2\frac{q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Schritt 2: Wir benötigen eine Summationsformel für Binomialkoeffizienten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n+1}, \quad x \in (0,1). \tag{2.1}$$

Proof. Der ,,übliche" Differentiationstrick. Wir differenzieren die geometrische Summenformel auf beiden Seiten n-fach:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \implies \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) x^{k-n} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) x^{k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+n) \cdot (k+n-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} n! \binom{k+n}{k} x^k. \qquad \square\end{aligned}$$

Schritt 3: Wenn wir $i = 0, 1, 2, \ldots$ Misserfolge vor dem n-ten Erfolg betrachten heißt das, dass wir $i \geqslant 0$ Misserfolge und $n - i \geqslant 0$ Erfolge haben, und zum Schluss den n-ten Erfolg verbuchen. Wir müssen also auf den $(n-1)+i$ ersten Plätzen die Erfolge und Misserfolge plazieren und dann am Ende (Platz Nr. $n+i$) einen Erfolg haben. Das geht auf

$$\binom{n-1+i}{i} = \binom{n-1+i}{n-1} \text{ Arten, damit ist die W-keit } \mathbb{P}(X = i) = \binom{n-1+i}{i} q^i p^n.$$

Schritt 4: Erwartungswert (direct attack). Nach Definition ist

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=0}^{\infty} i \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} i \binom{n-1+i}{i} q^i p^n = p^n \sum_{i=1}^{\infty} i \binom{n-1+i}{i} q^i.$$

Wir beachten nun

$$i\binom{n-1+i}{i} = i\frac{(n-1+i)!}{(n-1)!i!} = n\frac{(n-1+i)!}{n!(i-1)!} = n\binom{n+i-1}{i-1}$$

und daher

$$\mathbb{E}X = np^n \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n+i-1}{i-1} q^{(i-1)+1} = np^n q \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} q^k \overset{(2.1)}{=} np^n q \frac{1}{(1-q)^{n+1}} = n\frac{q}{p}.$$

Schritt 5: Varianz (direct attack). Wir berechnen $\mathbb{E}(X^2)$. Das geht so:

$$\mathbb{E}(X^2) = p^n \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \binom{n+i-1}{i} q^i = np^n \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n+i-1}{i-1} i q^i = np^n \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n+i-1}{i-1} q \frac{d}{dq} q^i$$

$$= np^n q \frac{d}{dq} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \binom{n+i-1}{i-1} q^i}_{=\mathbb{E}X/np^n} = np^n q \frac{d}{dq} \frac{q}{(1-q)^{n+1}}$$

$$= np^n q \left(\frac{1}{(1-q)^{n+1}} + \frac{(n+1)q}{(1-q)^{n+2}} \right) = np^n q \frac{1}{p^{n+1}} + n(n+1)p^n q^2 \frac{1}{p^{n+2}}$$

$$= n\frac{q}{p} + n(n+1)\frac{q^2}{p^2}.$$

Insgesamt also

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = n\frac{q}{p} + n(n+1)\frac{q^2}{p^2} - n^2\frac{q^2}{p^2} = \cdots = n\frac{q}{p^2}.$$

Schritt 6: Think! Wenn wir die Beobachtung der ersten i Misserfolge darstellen als

$$X = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

wo G_k die Zahl der Misserfolge nach dem $(k-1)$ten Erfolg und vor dem $k$ten Erfolg darstellt, dann haben wir

- die G_k sind alle gleichartig verteilt, d.h. $\mathbb{E}G_1 = \mathbb{E}G_k$, $\mathbb{V}G_1 = \mathbb{V}G_k$;
- G_k entspricht der negativen Binomialverteilung mit $n = 1$.

Daher ist

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}G_k \overset{\text{Schritt 1}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{q}{p} = n\frac{q}{p}.$$

Für die Varianz gilt

$$\mathbb{V}X \overset{\text{Schritt 6}}{=} n\frac{q}{p^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q}{p^2} \overset{\text{Schritt 1}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}G_k.$$

Wenn wir also begründen könnten, dass

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(G_1 + \cdots + G_n) \overset{(?!)}{=} \mathbb{V}G_1 + \cdots + \mathbb{V}G_k$$

gilt, wären wir ohne große Rechnung schon nach Schritt 1 fertig! Im Allgemeinen ist (?!) falsch, aber weil die G_k *unabhängig* sind (wir führen dieses Konzept in Kapitel 5 ein, vgl. Satz 5.22), gilt (?!), d.h. wir können die Rechnung wirklich vereinfachen....

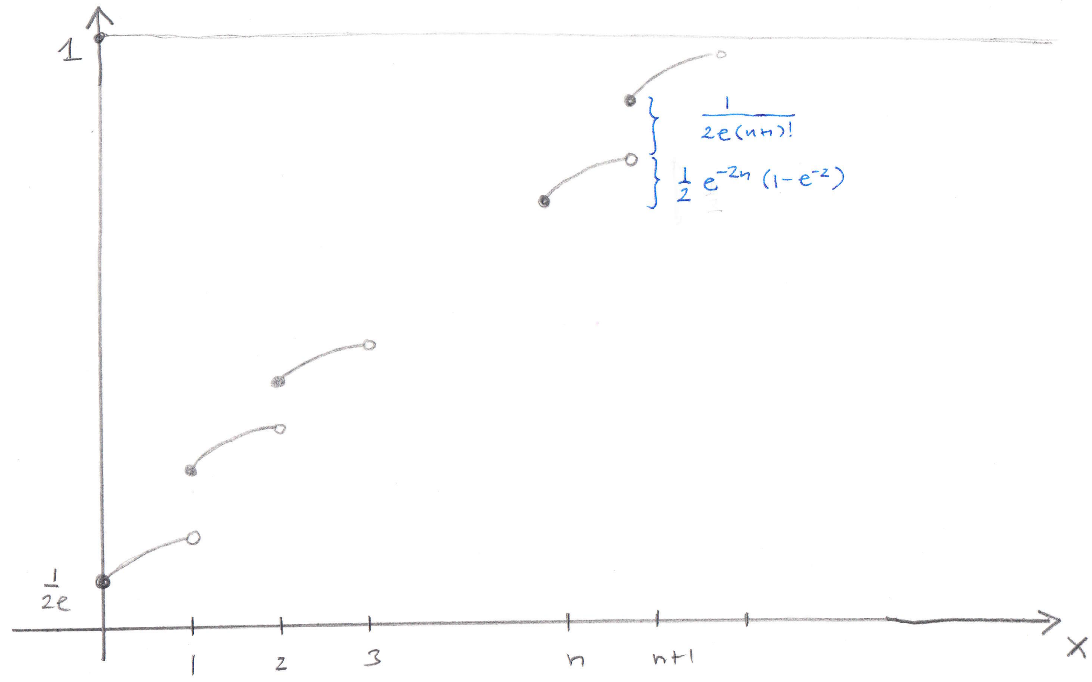
Aufgabe 2.12. Lösung: Weil $N \subset \mathbb{N}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, und $(0,\infty) \setminus \mathbb{N}$ eine Nullmenge für das Zählmaß $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$ ist, haben wir

$$\mu\{k\} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{und} \quad \mu((0,t) \setminus \mathbb{N}) = \lambda(0,t) \quad \forall t > 0.$$

Daher erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2ek!} + \int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2e} \cdot e + \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Die Verteilungsfunktion ist stetig auf $(-\infty, 0)$ und auf $(n, n+1)$ und hat Sprünge bei $n = 0, 1, 2, 3,$, vgl. die nachfolgende Skizze – auf $\mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion rechtsstetig: $\mu(-\infty, t] = \int_{(-\infty,t]} p(x)\,dx$.



Aufgabe 2.13. Lösung: Wir schreiben im folgenden stets: $q = 1 - p$.

(a) Binomialverteilte ZV.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & 0 \leqslant x \leqslant n \\ 1 & x > n \end{cases}$$

Für den Erwartungswert von X gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-1-l} \\
&= np.
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert von $X(X-1)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} p^2 p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} p^l (1-p)^{n-2-l}
\end{aligned}$$

$$= n(n-1)p^2.$$

Und wir erhalten für die Varianz

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq.$$

Einfachere Rechnung: $X = X_1 + \cdots + X_n$ wobei die X_k unabhängige (siehe Kapitel 5) Bernoulli-ZV mit jeweils derselben Erfolgswahrscheinlichkeit p sind. Dann gilt

$$\mathbb{E}X_1 = p, \quad \mathbb{E}(X_1^2) = p, \quad \mathbb{V}X_1 = p - p^2 = pq \implies \mathbb{E}X = n\mathbb{E}X_1 = np, \quad \mathbb{V}X = n\mathbb{V}X_1 = npq$$

wobei wir für die Gleichheit der Varianz die Bienaymé-Identität verwenden (Satz 5.22).

(b) Geometrisch verteilte ZV. Achtung: Tippfehler in der Aufgabenstellung – $n \in \mathbb{N}_0$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} pq^k = p\frac{1-q^{\lfloor x \rfloor+1}}{1-q} = 1 - q^{\lfloor x \rfloor+1}, & 0 \leqslant x \end{cases}$$

Für den Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sum_{n=0}^{\infty} npq^n = pq\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dq}q^n \\ &= pq\frac{d}{dq}\sum_{n=1}^{\infty} q^n = pq\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} = pq\left(\frac{1}{p} + \frac{q}{p^2}\right) = \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert von $X(X-1)$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)pq^n = pq^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{d^2}{dq^2}q^n = pq^2\frac{d^2}{dq^2}\sum_{n=1}^{\infty} q^n \\ &= pq^2\frac{d^2}{dq^2}\frac{q}{1-q} = pq^2\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = pq^2\frac{2}{p^3} = \frac{2q^2}{p^2}. \end{aligned}$$

Und wir erhalten für die Varianz

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q}{p^2}.$$

(c) Poissonverteilte ZV.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, & 0 \leqslant x \end{cases}$$

Für den Erwartungswert gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert von $X(X-1)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2.\end{aligned}$$

Und wir erhalten für die Varianz

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

(d) Gamma-verteilte ZV (Achtung: Tippfehler in der Angabe: $\beta^\alpha \to \beta^{-\alpha}$). Die Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0;\\ \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t/\beta}\,dt & x \geqslant 0;\end{cases}$$

das Integral kann nicht weiter ausgerechnet werden, es handelt sich um eine sog. unvollständige Gammafunktion.

Der Erwartungswert ist wegen der Funktionalgleichung der Gammafunktion $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t\cdot t^{\alpha-1}e^{-t/\beta}\,dt\\ &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha}e^{-t/\beta}\,dt\\ &= \frac{\beta}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty (\beta s)^{\alpha}e^{-s}\,ds\\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{(\alpha+1)-1}e^{-s}\,ds\\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\alpha\Gamma(\alpha) = \alpha\beta.\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert von X^2 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^2\cdot t^{\alpha-1}e^{-t/\beta}\,dt\\ &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha+1}e^{-t/\beta}\,dt\\ &= \frac{\beta}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty (\beta s)^{\alpha+1}e^{-s}\,ds\\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{(\alpha+2)-1}e^{-s}\,ds\\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2) = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha+1)\beta^2.\end{aligned}$$

Und wir erhalten für die Varianz

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2.$$

(e) Laplace-verteilte ZV: Die Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} (2\sigma)^{-1} e^{-|t|/\sigma}\, dt.$$

Der Erwartungswert ist wegen der Symmetrie der Dichte 0. Beachte, dass das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} |t| (2\sigma)^{-1} e^{-|t|/\sigma}\, dt < \infty.$$

Weil $\mathbb{E}X = 0$ gilt, ist $\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2)$, d.h.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}X &= (2\sigma)^{-1} \int_{\mathbb{R}} t^2\, e^{-|t|/\sigma}\, dt \\
&= \sigma^{-1} \int_0^{\infty} t^2\, e^{-t/\sigma}\, dt \\
&= \int_0^{\infty} (s\sigma)^2\, e^{-s}\, ds \\
&= \sigma^2 \int_0^{\infty} s^2\, e^{-s}\, ds = \sigma^2 \Gamma(3) = 2\sigma^2.
\end{aligned}$$

(f) (Tippfehler in der Angabe: $p = W/N$) hypergeometrisch verteilte ZV: Die Verteilungsfunktion ist eine Treppenfunktion, die an den Stellen $x = 0, 1, 2, \dots, W$ wächst.

Wir folgen dem Hinweis und schreiben $X = X_1 + \cdots + X_W$, wobei X_i genau dann „1" ist, wenn die weiße Kugel mit Nummer i gezogen wurde. Jede weiße Kugel hat dieselbe Wahrscheinlichkeit n/N unter den gezogenen Kugeln zu sein. Daher gilt

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{n}{N} \implies \mathbb{E}X = W\mathbb{E}X_1 = W\frac{n}{N} = np.$$

Weiterhin gilt

$$X^2 = \sum_i X_i^2 + \sum_{i \neq k} X_i X_k = \sum_i X_i + \sum_{i \neq k} X_i X_k$$

und wir finden

$$\mathbb{E}(X_i X_k) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_k = 1) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

woraus sich

$$\mathbb{E}(X^2) = np + W(W-1)\frac{n(n-1)}{N(N-1)} = np + np(W-1)\frac{(n-1)}{(N-1)}$$

ergibt. Schließlich haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 &= np + np(W-1)\frac{(n-1)}{(N-1)} - (np)^2 \\
&= np\left[1 + (W-1)\frac{n-1}{N-1} - W\frac{n}{N}\right] = np\frac{(N-n)(N-W)}{N(N-1)} \\
&= npq\frac{N-n}{N-1}
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 2.14. Lösung: Die Dichte von X ist $f_X(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$. Mit Hilfe der Taylorreihe sieht man leicht, dass

$$e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \geqslant 1 + c'_N x^{2N} \geqslant c_N(1+x^2)^N$$

und daher

$$e^{-x^2/2} \leqslant C_N(1+x^2)^{-N}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Weiter ist $x^2 \leqslant 1+x^2$ oder $|x| \leqslant (1+x^2)^{1/2} \leqslant 1+x^2$. Somit gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x|^k e^{-x^2/2}\,dx &\leqslant C_N \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^k(1+x^2)^{-N}\,dx \\
&\overset{\text{wähle } N=k+1}{=} C_{k+1} \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^k(1+x^2)^{-k-1}\,dx \\
&= C_{k+1} \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{-1}\,dx
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist endlich (warum?).

Damit existieren die Momente beliebiger Ordnung und wir können damit rechnen. Für ungerade Momente gilt aus Symmetriegründen:

$$\mathbb{E}(X^{2k+1}) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2/2}\,dx = 0$$

und für gerade Momente gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^{2k}) = m(2k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2/2}\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{2k} e^{-x^2/2}\,dx \\
&\overset{t=x^2/2}{=} \frac{2\cdot 2^k}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^k e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{k-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt \\
&= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{(k+\frac{1}{2})-1} e^{-t}\,dt.
\end{aligned}$$

Der Integralausdruck ist ganau die Eulersche Gamma-Funktion $\Gamma(k+\frac{1}{2})$ und mittels der bekannten Funktionalgleichung $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ finden wir

$$m(2k) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \cdot (k-\tfrac{1}{2}) \cdot (k-\tfrac{3}{2}) \cdot \cdots \tfrac{1}{2} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2})$$

und da $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (warum? — findet man z.B. aus der Kenntnis von $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx$ und dem oben verwendeten Variablenwechsel), erhalten wir

$$m(2k) = (2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1 = \frac{(2k)!}{2^k\,k!}.$$

∎∎

Aufgabe 2.15. Lösung:

(a) Wir zeigen, dass $\sum_{i,k} p(i,k) = 1$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} p(i,k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} ab(1-a)^i(1-b)^k = ab\sum_{i=0}^{\infty}(1-a)^i\sum_{k=0}^{\infty}(1-b)^k$$
$$= ab\frac{1}{1-(1-a)}\frac{1}{1-(1-b)} = 1.$$

Weil in einem diskreten Raum alle Abbildungen messbar sind, sind X, Y (als Projektionen) trivialerweise ZV.

(b) $\mathbb{P}(X = i, Y = k) = p(i,k)$. Die Marginalverteilung von X ist

$$\mathbb{P}(X = i, Y \in \mathbb{N}_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X = i, Y = k) = a(1-a)^i\sum_{k=0}^{\infty} b(1-b)^k = a(1-a)^i$$

und entsprechend haben wir $\mathbb{P}(Y = k) = b(1-b)^k$, d.h. es handelt sich jeweils um geometrische Verteilungen.

(c)

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(X = i, Y = i) = \sum_{i=0}^{\infty} ab(1-a)^i(1-b)^i$$
$$= \frac{ab}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{ab}{a+b-ab}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > Y) &= \sum_{(i,k)\in\mathbb{N}_0^2, i>k} ab(1-a)^i(1-b)^k \\ &= ab\sum_{k=0}^{\infty}(1-b)^k\sum_{i=k+1}^{\infty}(1-a)^i \\ &= ab\sum_{k=0}^{\infty}(1-b)^k\frac{(1-a)^{k+1}}{1-(1-a)} \\ &= b(1-a)\sum_{i=0}^{\infty}(1-b)^i(1-a)^i \\ &= b(1-a)\frac{1}{1-(1-a)(1-b)} \\ &= \frac{b(1-a)}{a+b-ab}.\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 2.16. Lösung: Weil X messbar ist, folgt offenbar aus $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ mit Hilfe der behaupteten Ungleichung, dass $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$ für alle $r < p$ gilt. Damit ist also $X \in L^p$ bereits in L^r enthalten, d.h. $L^p \subset L^r$.

Die behauptete Ungleichung folgt aber unmittelbar aus der Hölderschen Ungleichung für die konjugierten Indizes $s, t \geqslant 1$ mit $1/s + 1/t = 1$:

$$\mathbb{E}(|X|^r) = \mathbb{E}(|X|^r \cdot 1) \leqslant \left[\mathbb{E}(|X|^{rs})\right]^{1/s}\left[\mathbb{E}(1^t)\right]^{1/t} \leqslant \left[\mathbb{E}(|X|^{rs})\right]^{1/s}.$$

Wir wählen nun s so, dass $rs = p$ gilt, also $s = p/r$ und die Annahme $p > r$ garantiert, dass $s > 1$.

Aufgabe 2.17. Lösung: $g(X)$ ist messbar. Setze $A = \{X \geqslant a\}$. Nun folgt:

$$g(a)\mathbb{P}(A) = g(a)\int_A d\mathbb{P} \leqslant \int_A g(X)\ d\mathbb{P} \leqslant \|g(X)\|_{L^\infty}\mathbb{P}(A)$$

und

$$0 \leqslant \int_{A^c} g(X)\, d\mathbb{P} \leqslant \mathbb{P}(A^c) g(a) \leqslant g(a).$$

Offensichtlich gilt

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_A g(X)\, d\mathbb{P} + \int_{A^c} g(X)\, d\mathbb{P}$$

und daher folgen die behaupteten Ungleichungen aus

$$g(a)\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{E}(g(X)) \leqslant \|g(x)\|_{L^\infty}\mathbb{P}(A) + g(a).$$

(Allerdings gilt die erste Ungleichung nur wenn $\|g(X)\|_\infty$ endlich und positiv ist, und die zweite nur falls $g(a) > 0$.)

Aufgabe 2.18. Lösung: Wir verwenden die Formel

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty P(X > t)\, dt.$$

Weil $X \geqslant 0$ ist, gilt diese Formel auf $[0, +\infty)$. Offenbar ist

$$1 - F(x) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X > x).$$

(a) Es gilt

$$0 \leqslant x(1 - F(x)) = x\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{E}(x\mathbb{1}_{\{X>x\}}) \leqslant \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X>x\}}) \xrightarrow[x\to\infty]{\text{dom. Konv., } X \in L^1} 0.$$

(b) Es sei $1 - F(x) = e/(x\log x)$ auf $[e, \infty)$. Damit ist $F(e) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, F ist stetig und monoton, und damit eine Verteilungsfunktion. Die zugehörige Dichte ist

$$f(x) = F'(x) = \frac{e(\log x - 1)}{(x\log x)^2}, \quad x \geqslant e$$

und wegen der oben angesprochenen Formel für den Erwartungswert haben wir

$$\mathbb{E}X = \int_e^\infty (1 - F(x))\, dx = e\int_e^\infty \frac{dx}{x\log x} \overset{x=e^t}{=} e\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \infty.$$

Andererseits gilt

$$\lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{xe}{x\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e}{\log x} = 0.$$

(c) Die angegebene Bedingung impliziert, dass $1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x) \leqslant C_\epsilon x^{-1-\epsilon}$ für $x \geqslant 1$ gilt. Daher sehen wir mit Hilfe der oben angegebenen Formel für $\mathbb{E}X$

$$\mathbb{E}X \leqslant \int_0^1 1\,dx + C_\epsilon \int_1^\infty x^{-1-\epsilon}\,dx < \infty.$$

Aufgabe 2.19. Lösung: Es sei $(x_i)_{i\in J} = \{x : P\{x\} > 0\}$ und definiere $p_i := P\{x_i\}$, $i \in J$. Die x_i sind offenbar die Sprungstellen (Unstetigkeitsstellen) der Verteilungsfunktion $F(x) = P(-\infty, x]$.

Die Menge $M_n = \{i \in J : \mathbb{P}\{x_i\} \geqslant \frac{1}{n}\}$ ist für alle n endlich, sonst ergäbe sich aus

$$1 = P(\mathbb{R}) \geqslant \sum_{i\in M} P\{x_i\} \geqslant \sum_{i\in M} \frac{1}{n} = \infty$$

ein Widerspruch. Daher ist $J = \bigcup_n M_n$ höchstens abzählbar.

Sei $Q' = \sum_{i\in J} p_i \delta_{x_i}$ und definiere $Q := \mathbb{P} - Q'$.

(a) $\forall A:\ Q(A) \geqslant 0$ weil $\mathbb{P}(A) \geqslant Q'(A)$.

(b) Q ist σ-additiv, da $\mathbb{P}, Q'$ σ-additiv sind – also ist Q ein Maß.

(c) $Q(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) - Q'(\mathbb{R}) \leqslant \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$.

(d) Es gilt $Q\{x\} = 0$, denn:

- $x \notin (x_i)_{i\in J} \implies Q\{x\} = \mathbb{P}\{x\} - Q'\{x\} = 0 - 0 = 0$;
- $x = x_k \in (x_i)_{i\in J} \implies Q\{x\} = \mathbb{P}\{x\} - Q'\{x\} = p_k - p_k = 0$.

---

3 Elementare Kombinatorik

Aufgabe 3.1. Lösung: Für ein Paßwort wählen wir zunächst vier Zeichen ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge aus den $10 + 26 = 36$ Ziffern und Kleinbuchstaben. Dafür gibt es $36\cdot35\cdot34\cdot33$ Möglichkeiten. Diejenigen Wörter, die nur aus Ziffern bestehen (insg. $10\cdot9\cdot8\cdot7$) und solche, die nur aus Kleinbuchstaben bestehen (insg. $26\cdot25\cdot24\cdot23$) sind nicht erlaubt, alle anderen so konstruierten Wörter sind Paßwörter. Die Anzahl möglicher Paßwörter ist also

$$36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 - 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1\,049\,880.$$

Es gibt

$$36^4 = 1\,679\,616$$

Möglichkeiten, ein 4-Zeichen-Wort aus 10 Ziffern und 26 Kleinbuchstaben zu wählen (bei dem auch Zeichen mehrfach auftreten dürfen – beachte: hier geht ein, dass erst einmal zufällig erzeugt wird, und wir nehmen an, dass wir hier mit Zurücklegen ziehen. Offensichtlich haben wir hier ein „schlecht" gestelltes Problem, da wir eine Zusatzannahme machen müssen, die nicht klar aus der Angabe hervorgeht). Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig ein Paßwort zu erhalten, gleich

$$\frac{\text{Anzahl der Paßwörter}}{\text{Anzahl aller möglichen 4-Zeichen-Wörter}} = \frac{1\,049\,880}{1\,679\,616} = 0.625.$$

■■

Aufgabe 3.2. Lösung: Wir wählen zunächst 3 Torwarte aus 23 Spielern, dafür gibt es $\binom{23}{3}$ Möglichkeiten. Dies multiplizieren wir mir $\binom{20}{6}$ Möglichkeiten, aus den verbleibenden Spielern 6 Stürmer zu wählen, usw. Insgesamt ergeben sich somit

$$\binom{23}{3}\binom{20}{6}\binom{14}{7}\binom{7}{3}\binom{4}{4} = \frac{23!}{3!6!7!3!4!} = \binom{23}{3,6,7,3,4}$$

Möglichkeiten, die Spieler einzuteilen.

■■

Aufgabe 3.3. Lösung: Wir denken uns die Buchstaben auf nummerierte Kärtchen geschrieben:

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$$

Diese Kärtchen sind nun alle unterscheibar und es gibt 8! Möglichkeiten, sie anzuordnen. Nun wollen wir von den Indizes wieder abstrahieren. Dazu betrachten wir das folgende vereinfachte Beispiel: A_1, A_2, B_1, B_2. Von den in diesem Fall möglichen 24 Anordnungen liefern zum Beispiel die folgenden Möglichkeiten

$$(A_1, B_1, B_2, A_2) = (A_1, B_2, B_1, A_2) = (A_2, B_1, B_2, A_1) = (A_2, B_2, B_1, A_1)$$

das selbe Wort. Es müssen also die möglichen Vertauschungen beim Buchstaben A mit den möglichen Vertauschungen beim Buchstaben B kombiniert werden. Übertragen auf unsere eigentliche Aufgabenstellung ergibt das 6 Möglichkeiten bei A, 2 bei B und C. Diese müssen noch herausdividiert werden es ergibt sich:

$$\frac{8!}{3!2!2!1!} = 1680.$$

■■

Aufgabe 3.4. Lösung:

(a) Wir gehen wie üblich vor: Es gibt 8! Möglichkeiten, die Personen anzuordnen, davon ist nur eine günstig. Also ist die Wahrscheinlichkeit: 1/8!.

(b) Dieses Problem ist wesentlich komplexer. Definiere A_j = „j-te Person sitzt richtig", $j = 1, .., 8$. Damit gilt:

$$A_1 \cup \cdots \cup A_8 \quad \text{mindestens eine Person sitzt richtig}$$

oder $(A_1 \cup \cdots \cup A_8)^c$ = „alle sitzen falsch".

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_8) &= 1 + \sum_{k=1}^{8} (-1)^k \sum_{j_1,..,j_k \in \{1,..,8\}} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{8} (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{2119}{5760} \approx 0.3679 \end{aligned}$$

Beachte::

- Um $\mathbb{P}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k})$ zu berechnen, machen wir auch hier wieder einen Laplace Ansatz: k Personen sind gesetzt, für die übrigen gibt es $(8-k)!$ Möglichkeiten, also ist die Wahrscheinlichkeit $(8-k)!/8!$.
- Durch die Einschluss–Ausschluss–Formel muss man *nicht mehr* sicherstellen, dass die übrigen $8-k$ Personen falsch sitzen.
- Die Summe $\sum_{j_1,..,j_k \in \{1,..,8\}}$ hat $\binom{8}{k}$ Summanden.

■■

Aufgabe 3.5. Lösung: Für $r < t$ gibt es keine Möglichkeit. Daher nehmen wir $r \geq t$ an. Um sicherzustellen, dass kein Topf leer bleibt, legen wir zuerst in jeden Topf ein Reiskorn. Dann sind noch $\bar{r} := r - t$ Reiskörner übrig. Nach dem Kästchenmodell bzw. analog gibt es nun

$$\binom{t + \bar{r} - 1}{\bar{r}} = \binom{t + \bar{r} - 1}{t - 1} = \binom{r-1}{t-1}$$

Möglichkeiten, diese $\bar{r}$ Reiskörner auf t Töpfe zu verteilen.

■■

Aufgabe 3.6. Lösung:

(i) Es handelt sich hier um das Problem Kästchenmodell, ununterscheidbar und Mehrfachbelegung mit $n = 3$ und $k = 10$. Damit

$$\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = 66.$$

(ii) Wir setzen in jeden Käfig eine Maus. Die verbleibenden $10 - 3 = 7$ Tiere verteilen wir wie in Teil (i):

$$\binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = 36.$$

(ii) Wir setzen in jeden Käfig zwei Mäuse. Die verbleibenden $10 - 6 = 4$ Tiere verteilen wir wie in Teil (i):

$$\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15.$$

■■

Aufgabe 3.7. Lösung: Gewinnzahlen mit lauter gleichen Ziffern werden am seltensten gezogen, z.B. hat die Zahl 7.777.777 die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{7}{70} \cdot \frac{6}{69} \cdot \frac{5}{68} \cdot \frac{4}{67} \cdot \frac{3}{66} \cdot \frac{2}{65} \cdot \frac{1}{64}.$$

Nummern mit lauter verschiedenen Ziffern werden am häufigsten gezogen, z.B. hat die Nummer 1.234.567 die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{7}{70} \cdot \frac{7}{69} \cdot \frac{7}{68} \cdot \frac{7}{67} \cdot \frac{7}{66} \cdot \frac{7}{65} \cdot \frac{7}{64}.$$

Somit ist $p/P = 7!/7^7 = 5040/823543 \approx 0.00612$.

■■

Aufgabe 3.8. Lösung: Fall (i): Wenn wir einen Würfel 4 mal werfen, gibt es 6^4 verschiedene Ausgänge. Statt ,,mindestens eine 6“ betrachten wir ,,keine 6“, und das kommt 5^4 mal vor. Damit ist die Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - (5/6)^4 \approx 51.77\%$$

Fall (ii): Wir werfen nun 2 Würfel 24 mal. Daher gibt es $(6 \cdot 6)^{24}$ verschiedene Ausgänge. Statt ,,mindestens eine (6,6)“ betrachten wir ,,nie eine (6,6)“, was 35^{24} mal vorkommt. Damit ist die Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 1 - (35/36)^{24} \approx 49.14\%.$$

■■

Aufgabe 3.9. Lösung:

(a) Die Flaggen denken wir uns in einer festen Reihenfolge neben uns gestapelt. Nun hängen wir die erste Flagge an einen beliebigen Mast j. Dafür haben wir n Möglichkeiten. Für die zweite Flagge haben wir $n+1$ Möglichkeiten, nämlich einen der $n-1$ noch leeren Masten *oder* über der ersten Flagge *oder* unter der ersten Flagge. Und so geht es weiter.

Unabhängig davon, wo ich die m-te Flagge hinhänge, habe ich für die $m+1$-te eine Möglichkeit mehr als ich für die m-te hatte. Es ist hierbei wichtig, sich klar zu machen, dass es wirklich egal ist, wo die vorherigen Flaggen hängen. Also ergibt sich als Lösung:

$$n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot [n+(r-1)]$$

(b) Wir verteilen im Kästchenmodell identische (ununterscheidbare) Elemente mit Mehrfachbesetzung bzw. ziehen im Urnenmodell ,,mit Zurücklegen ohne Reihenfolge“. Es gilt

$$\binom{n+r-1}{r}$$

In einem solchen Fall benötigt man keine lange Erklärung. Man gibt einfach nur die Übertragung an: Fahnenmasten = Kästchen, Flaggen = Kugeln.

(c) Wir verteilen zunächst r weiße Flaggen wie in Teil (b). Anschließend färben wir b der Flaggen blau ein. Damit ergibt sich die Formel:

$$\binom{n+r-1}{r} \cdot \binom{r}{b}$$

Eine interessante Alternativlösung hierzu ist die folgende: Man verteilt erst die weißen Flaggen (wie in Aufgabenteil (b)) und dann die blauen Flaggen (wieder wie in (b) nur mit mehr Möglichkeiten, nämlich zwischen/über/unter die weißen Flaggen) Beide Ansätze liefern dasselbe Ergebnis.

Aufgabe 3.10. Lösung:

(a) Mit dem Argument von Aufgabe 3.2 sehen wir, dass es

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$$

Möglichkeiten gibt. Alternativ könnten wir so argumentieren: Wähle aus n Elementen k_1 aus, dann aus $n-k_1$ Elementen k_2 usw. Das geht auf

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-k_1-\cdots-k_{r-i}}{k_r}$$

Möglichkeiten. Das ergibt dasselbe Resultat (natürlich!).

(b) Es stehen n Kästchen geordnet nebeneinander. Und wir verteilen auf diese r Kugeln. Die Anzahl der Kugeln im Kästchen i steht dabei für einen Eintrag r_i im Vektor

$(r_1, r_2, ..., r_n)$ und die Summe der Einträge in diesem Vektor ist gerade r. Damit ergibt sich:

$$\binom{r+n-1}{r}.$$

(c)

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n &= \left(\sum_{i_1=1}^{m} x_{i_1}\right)\left(\sum_{i_2=1}^{m} x_{i_2}\right)\cdots\left(\sum_{i_n=1}^{m} x_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \\
&= \sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_m\le n \\ k_1+\dots+k_m=n}} \; \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_n\le n \\ (i_1,\dots,i_n)\in A_{k_1,\dots,k_m}}} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} \\
&= \sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_m\le n \\ k_1+\dots+k_m=n}} \; \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_n\le n \\ (i_1,\dots,i_n)\in A_{k_1,\dots,k_m}}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m} \\
&= \sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_m\le n \\ k_1+\dots+k_m=n}} \binom{n}{k_1,\dots,k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m},
\end{aligned}$$

wobei

$$A_{k_1,\dots,k_m} := \{(i_1,\dots,i_n) : 1 \le i_1,\dots,i_n \le m, |\{j : i_j = l\}| = k_l, l = 1,\dots,m\}.$$

Die letzte Gleichheit folgt wegen

$$|A_{k_1,\dots,k_m}| = \binom{n}{k_1,\dots,k_m} \quad \text{für alle} \quad 0 \le k_1,\dots,k_m \le n, \sum_{l=1}^{m} k_l = n.$$

Aufgabe 3.11. Lösung: Wir bezeichen das Koordinatensystem mit (x, y, z). Offensichtlich muß der Käfer $n = i + k + l$ Schritte machen, wobei er i in x-Richtung, k in y-Richtung und l in z-Richtung machen muß (andere Richtungen verbieten sich wegen der Forderung ,,entlang des Gitters auf dem kürzesten Weg“). Es stellt sich nur die Frage, *wann* der Käfer in welche Richtung geht. Wir können die verschiedenen Wahlen mit der Formel

$$\binom{i+k+l}{i,k,l} = \frac{(i+k+l)!}{i! \cdot k! \cdot l!}$$

ausrechnen.

Aufgabe 3.12. Lösung:

- $\binom{n}{2}$ – weil sich immer 2 Geraden schneiden müssen;
- $\binom{n}{3}$ – weil je drei Geraden ein Dreieck bestimmen.

Aufgabe 3.13. Lösung: Beachte den Tippfehler in der Aufgabenstellung $(0,n) \to (n,0)$ und $(k,0) \to (0,k)$.

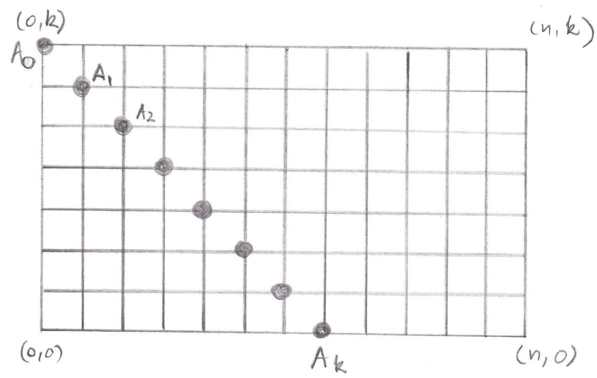
Um in einem Rechteck von $(0,0)$ nach (a,b) ohne Umwege zu gelangen, benötigt man $a+b$ Schritte, davon a nach rechts und b nach oben. Die Zahl der Wege ist bestimmt durch die Zahl der Möglichkeiten, an einem Gitterpunkt nach oben bzw. nach rechts zu gehen, also gibt es

$$\binom{a+b}{a} \text{ Wege von } (0,0) \to (a,b).$$

Wir setzen $B_i := \{\text{alle Wege } (0,0) \to A_i = (i,k-i) \to (n,k)\}$ und bemerken, dass mit der eben hergeleiteten Formel gilt

$$|B_i| = \binom{i+(k-i)}{i} \times \binom{(n-i)+(k-(k-i))}{k-(k-i)} = \binom{k}{i} \times \binom{n}{i} = \binom{k}{k-i} \times \binom{n}{i}, \quad i = 0,1,\dots,k.$$

Da wir auf dem Weg von $(0,0) \to (n,k)$ stets einen der Punkte A_i, $i = 0,\dots,k$ passieren müssen (vgl. Skizze), und da die Gesamtzahl der Wege $\binom{n+k}{n}$ ist, gilt die in der Aufgabenstellung angegebene Formel.



Aufgabe 3.14. Lösung: Diese Aufgabe ist äquivalent zur vorangehenden Aufgabe 3.13: $\binom{n+k}{k}$.

Aufgabe 3.15. Lösung: Wir schreiben A für das Ereignis, dass mindestens zwei gezogene Zahlen nebeneinander liegen. Wir berechnen $\mathbb{P}(A^c)$, d.h. die (Gegen-)Wahrscheinlichkeit, dass keine der Zahlen benachbart sind. Wir ordnen die Lottokugeln in einer Reihe von 1,2,3 bis 49 an, wobei die 6 gezogenen Kugeln schwarz eingefärbt sind, die 43 nicht gezogenen weiß eingefärbt sind. Weil die 6 schwarzen Kugeln nicht nebeneinander liegen dürfen, gibt es 44 mögliche Positionen (klar: es müssen mindestens 5 weiße Kugeln zwischen den schwarzen liegen!) und wir können auf $\binom{44}{6}$ Arten die 6 Positionen besetzen. Da wir 6 aus 49 auf $\binom{49}{6}$ Arten ziehen können, erhalten wir

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}} \implies \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}} \approx 0.4952.$$

Aufgabe 3.16. Lösung: Wir zeigen die Behauptung mit Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 2$ und $k = 1$ ($k > 1$ ist sinnlos). Wir haben wegen der starken Additivität von (W-)Maßen und der sub-Additivität

$$\underbrace{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)}_{=S_1} - \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}_{=S_2} \overbrace{\leqslant}^{\text{sogar „= “}} \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leqslant \underbrace{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)}_{=S_1}.$$

Induktionsannahme (IA): Die Bonferroni-Ungleichungen gelten für beliebige Vereinigungen von n Mengen.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir betrachten die Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ und A_{n+1} und wir schreiben für $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\
T_k &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\
U_k &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}).
\end{aligned}$$

(das sind die Summanden in den Bonferroni-Ungleichungen für die Mengen $A_1, \dots, A_n$ bzw. $A_1 \cap A_{n+1}, \dots, A_n \cap A_{n+1}$ bzw. $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$. Man macht sich leicht klar, dass folgende Beziehung gilt:

$$U_k = S_k + T_{k-1}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Wir verwenden nun die starke Additivität von W-Maßen und die Induktionsannahme:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\overset{\text{IA}}{\leqslant} S_1 - S_2 + S_3 - \dots + S_{2k-1} + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\overset{\text{IA}}{\leqslant} S_1 - S_2 + S_3 - \dots + S_{2k-1} + \mathbb{P}(A_{n+1}) - (T_1 - T_2 + T_3 - \dots + T_{2k-2}) \\
&= (S_1 + \mathbb{P}(A_{n+1})) - (S_2 + T_1) + (S_3 + T_2) - \dots + (S_{2k-1} + T_{2k-2}) \\
&= U_1 - U_2 + \dots + U_{2k-1}.
\end{aligned}$$

Die untere Abschätzung zeigt man analog.

■■

Aufgabe 3.17. Lösung:

(a) Nach Definition gilt

$$B^I \cap B^J = \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{k \notin I} A_k^c \cap \bigcap_{j \in J} A_j \cap \bigcap_{l \notin J} A_l^c = \underbrace{\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{l \notin J} A_l^c}_{=\varnothing \text{ da } I \neq J} \cap \bigcap_{k \notin I} A_k^c \cap \bigcap_{j \in J} A_j = \varnothing.$$

(b) Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\omega \in B_m &\iff \exists J, |J| = m : \omega \in B^J \\
&\iff \exists J, |J| = m : \omega \in A_i, i \in J \quad \text{und} \quad \omega \notin A_j, j \notin J \\
&\iff \omega \quad \text{genau in } m \text{ der Mengen } A_1, \dots, A_n
\end{aligned}$$

(c) Das ist gerade die Einschluss-Ausschluss Formel in der Form (3.9) mit $B = A$.

(d) Es sei $J \subset \{1, \dots, n\}$, $|J| = m$ und $J^c = \{i_1 < i_2 < \dots < i_{n-m}\}$. Wir wenden Teil c) auf folgende Mengen an:

$$A = A_J \quad \text{und} \quad B_0 = \bigcap_{k=1}^{n-m} A_{i_k}^c$$

Wir sehen dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B^J) = \mathbb{P}(A_J) - \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}(A_{i_k} \cap A_J) + \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n-m} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_J) + \\
+ \dots + (-1)^{n-m} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{n-m}} \cap A_J) \\
= \mathbb{P}(A_J) - \sum_{\substack{K \supset J \\ |K| = m+1}} \mathbb{P}(A_K) + \sum_{\substack{K \supset J \\ |K| = m+2}} \mathbb{P}(A_K) + \dots + (-1)^{n-m} \mathbb{P}(A_N)
\end{aligned}$$

Indem wir diese Gleichheit über $|J| = m$ summieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B_m) = \sum_{|J|=m} \mathbb{P}(B^J) \\
&= \sum_{|J|=m} \mathbb{P}(A_J) - \sum_{|J|=m} \sum_{\substack{K \supset J \\ |K|=m+1}} \mathbb{P}(A_K) + \sum_{|J|=m} \sum_{\substack{K \supset J \\ |K|=m+2}} \mathbb{P}(A_K) + \dots + (-1)^{n-m} \sum_{|J|=m} \mathbb{P}(A_N) \\
&= \sum_{|J|=m} \mathbb{P}(A_J) - \sum_{|K|=m+1} \sum_{\substack{J \subset K \\ |J|=m}} \mathbb{P}(A_K) + \sum_{|K|=m+2} \sum_{\substack{J \subset K \\ |J|=m}} \mathbb{P}(A_K) + \dots + (-1)^{n-m} \sum_{|J|=m} \mathbb{P}(A_N) \\
&= \sum_{|J|=m} \mathbb{P}(A_J) - \sum_{|K|=m+1} \binom{m+1}{m} \mathbb{P}(A_K) + \sum_{|K|=m+2} \binom{m+2}{m} \mathbb{P}(A_K) + \dots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \mathbb{P}(A_N) \\
&= S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+1} - + \dots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S_n.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.18. Lösung: Wir bezeichnen die Personen mit $1, 2, \dots, n$ und wir denken uns die Mäntel entsprechend durchnummeriert. Wie oben setzen wir $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Als W-Raum wählen wir $\Omega = \{\omega : N \to N \mid \omega \text{ ist eine Bijektion}\}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ ist die Gleichverteilung auf Ω: $\mathbb{P}\{\omega\} = 1/n!$.

Wir setzen $A_i := \{\omega \in \Omega \mid \omega(i) = i\}$, d.h. Person i erhält ihren eigenen Mantel zurück. Offensichtlich gilt $|A_i| = (n-1)!$, da wir einen Platz festhalten und die anderen $(n-1)$ Plätze beliebig besetzen können. Wir interessieren uns für das Gegenereignis

$$B_0 := \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

d.h. niemand erhält seinen eigenen Mantel zurück. Wir wollen die Einschluss-Ausschluss Formel aus Aufgabe 3.17(c) mit $A = \Omega$ verwenden. Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_i) &= \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} \\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) &= \frac{|A_i \cap A_j|}{|\Omega|} = \frac{(n-2)!}{n!}, \quad i \neq j \\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \frac{|A_i \cap A_j \cap A_k|}{|\Omega|} = \frac{(n-3)!}{n!}, \quad i,j,k \text{ unterschiedlich}\end{aligned}$$

usw. Daher gibt die Einschluss-Ausschluss Formel

$$\mathbb{P}(B_0) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

(also: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_0) = 1/e \approx 0.3679$).

Wir wollen noch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B_m berechnen, dass genau m Personen den eigenen Mantel erhalten. Mit der Notation aus der vorigen Aufgabe finden wir

$$\mathbb{P}(A_J) = \frac{(n-j)!}{n!} \quad \text{für alle } J \subset N \text{ mit } |J| = j$$

also

$$S_j = \binom{n}{j}\frac{(n-j)!}{n!} = \frac{1}{j!}$$

und die verallgemeinerte Einschluss-Ausschluss Formel aus Aufgabe 3.17(d) ergibt

$$\mathbb{P}(B_m) = \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \cdots + (-1)^{n-m}\frac{1}{(n-m)!}\right).$$

Die erwartete Anzahl von Personen, die ihren eigenen Mantel erhalten ist damit

$$\sum_{m=0}^{n} m\mathbb{P}(B_m) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \cdots + (-1)^{n-m}\frac{1}{(n-m)!}\right).$$

Diese Doppelsumme ist unangenehm auszurechnen, es gibt aber ein einfaches Argument zur Berechnung der erwartete Anzahl von Personen, die ihren eigenen Mantel erhalten. Dazu formulieren wir das Problem zunächst um: Wir denken uns zwei Kartenspiele, deren Karten mit $1, 2, \ldots n$ bezeichnet seien. Wir mischen die Kartenspiele und decken simultan die obersten 2 Karten auf. Wenn diese dieselben Nummern tragen, dann entspricht das einer Person, die ihren eigenen Mantel erhält.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieselbe Zahl obenauf liegt ist offensichtlich $1/n$. Das trifft aber auch auf die 2., 3., usw. Position zu, d.h. der Erwartungswert einer Übereinstimmung ist $n \times \frac{1}{n} = 1$.

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 4.1. Lösung: Es gilt

$$\mathbb{P}(A \mid B \cap C)\,\mathbb{P}(C \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B)}$$

Eine analoge Rechnung gilt, wenn wir C durch C^c austauschen. Somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \mid B \cap C)\,\mathbb{P}(C \mid B) + \mathbb{P}(A \mid B \cap C^c)\,\mathbb{P}(C^c \mid B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \mid B).
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 4.2. Lösung: Für die Gegenbeispiele nehmen wir einen fairen Würfel: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\mathbb{P}\{i\} = 1/6$.

(i) Ist falsch. Sieht man mit $A = \{6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$. Dann gilt nämlich

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}\{6\}}{\mathbb{P}\{4,5,6\}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(A^c \mid B^c) = \frac{\mathbb{P}\{1,2,3\}}{\mathbb{P}\{1,2,3\}} = 1.$$

(i) Ist falsch. Sieht man mit $A = \{6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$. Dann gilt nämlich

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}\{6\}}{\mathbb{P}\{4,5,6\}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(A \mid B^c) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}\{1,2,3\}} = 0.$$

(iii) Ist wahr. Das folgt aus

$$\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A^c \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

■■

Aufgabe 4.3. Lösung: Wir haben

$$\mathbb{P}(A \mid C) > \mathbb{P}(B \mid C) \implies \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} > \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \implies \mathbb{P}(A \cap C) > \mathbb{P}(B \cap C).$$

Entsprechend haben wir

$$\mathbb{P}(A \mid C^c) > \mathbb{P}(B \mid C^c) \implies \mathbb{P}(A \cap C^c) > \mathbb{P}(B \cap C^c),$$

und indem wir die resultierenden Ungleichungen addieren, erhalten wir $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$.

■■

Aufgabe 4.4. Lösung:

(a) Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen ist 6/16. In der Urne sind jetzt noch 15 Kugeln, davon sind 5 rot und 10 blau, d.h. die Wahrscheinlichkeit nun eine blaue Kugel zu ziehen ist 10/15. Insgesamt haben wir

$$\frac{6}{16} \times \frac{10}{15} = \frac{1}{4}.$$

(b) Die Wahrscheinlichkeit ist dieselbe wie in Fall a): $\frac{1}{4}$. Der Grund ist intuitiv klar: Um das Ergebnis „R-*-*-*-B" zu berechnen, haben wir es mit Produkten der Form

$$\frac{6}{16} \times \frac{*}{15} \times \frac{*}{14} \times \frac{*}{13} \times \frac{*}{12}$$

zu tun, und wir können die Zähler austauschen! Betrachten wir die möglichen Fälle, in denen „B" an fünfter Stelle steht. Wir können dann, ohne die Wahrscheinlichkeiten zu ändern, folgendermaßen umordnen, damit an der zweiten Stelle stets „B" erscheint (beachte: die Zähler ändern sich nicht).

$$\begin{aligned}
RRRRB &\xrightarrow{\text{umordnen}} RB|RRR \\
RRRBB &\xrightarrow{\text{umordnen}} RB|BRR \\
RRBRB &\xrightarrow{\text{umordnen}} RB|RBR \\
RRBBB &\xrightarrow{\text{umordnen}} RB|BBR \\
RBRRB &\xrightarrow[\text{umordnen}]{\text{bleibt}} RB|RRB \\
RBRBB &\xrightarrow[\text{umordnen}]{\text{bleibt}} RB|RBB \\
RBBRB &\xrightarrow[\text{umordnen}]{\text{bleibt}} RB|BRB \\
RBBBB &\xrightarrow[\text{umordnen}]{\text{bleibt}} RB|BBB
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass ab dem „|" eine vollständige Partitionierung des W-Raums stattfindet (8 Fälle), d.h. die hinteren drei Ausfälle nach dem „|" beeinflussen die Wahrscheinlichkeit nicht. Damit:

$$\mathbb{P}(RB) = \mathbb{P}(R * * * B).$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit drei rote Kugeln nacheinander zu ziehen ist

$$\frac{6}{16} \times \frac{5}{15} \times \frac{4}{14}$$

und die Wahrscheinlichkeit drei blaue Kugeln nacheinander zu ziehen ist

$$\frac{10}{16} \times \frac{9}{15} \times \frac{8}{14}.$$

Diese Wahrscheinlichkeiten müssen wir addieren. Das ergibt

$$\frac{6}{16} \times \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} + \frac{10}{16} \times \frac{9}{15} \times \frac{8}{14} = \frac{840}{3360} = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 4.5. Lösung: Wir führen folgende Notation ein:

$$\begin{aligned} O &= \{0 \text{ wurde empfangen}\}, \\ I &= \{1 \text{ wurde empfangen}\}, \\ G_0 &= \{0 \text{ wurde gesendet}\}, \\ G_1 &= \{1 \text{ wurde gesendet}\}. \end{aligned}$$

Wir wissen

$$\frac{\mathbb{P}(G_0)}{\mathbb{P}(G_1)} = \frac{5}{3} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1) = 1 \implies \mathbb{P}(G_0) = \frac{5}{8},\ \mathbb{P}(G_1) = \frac{3}{8}.$$

Weiterhin wissen wir (die eingerahmten Größen sind aus der Angabe entnommen, die übrigen Größen ergeben sich aus der Tatsache, dass $\mathbb{P}(O \mid G_i) + \mathbb{P}(I \mid G_i) = 1$ gilt):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(O \mid G_0) &= \frac{3}{5} & \qquad \mathbb{P}(O \mid G_1) &= \boxed{\frac{1}{3}} \\ \mathbb{P}(I \mid G_0) &= \boxed{\frac{2}{5}} & \qquad \mathbb{P}(I \mid G_1) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit errechnen wir nun $\mathbb{P}(O)$ und $\mathbb{P}(I)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(O) &= \mathbb{P}(G_0)\mathbb{P}(O \mid G_0) + \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(O \mid G_1) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(I) &= \mathbb{P}(G_0)\mathbb{P}(I \mid G_0) + \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(I \mid G_1) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mithin können wir die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Bayesschen Formel ausrechnen:

$$\mathbb{P}(G_0 \mid O) = \frac{\mathbb{P}(G_0)\mathbb{P}(O \mid G_0)}{\mathbb{P}(O)} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}; \mathbb{P}(G_1 \mid I) \quad = \frac{\mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(I \mid G_1)}{\mathbb{P}(I)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.6. Lösung: Vorbemerkung: Die Aufgabe ist nur sinnvoll, wenn man davon ausgeht, dass die Polizei ,,zufällig“ Temposünder anhält und wenn das Fahrverhalten nicht von der Autofarbe abhängt. Tatsächlich hat ein Rechtsanwalt einen Streckenabschnitt knapp über der Geschwindigkeitsgrenze befahren und folgendes festgestellt: (i) Er wurde von 2062 Autos überholt, (ii) er hat selbst 34 Autos überholt, d.h. die Polizei hätte fast jeden Fahrer wegen Tempoüberschreitung stoppen können, (iii) der Anteil schwarzer Wagen unter den 2062 Fahrzeugen entsprach mit ca. 15% dem Anteil an der Gesamtpopulation.

Wir bezeichnen „angehalten“ mit A und „schwarz“ mit S. Dann ergeben sich aus dem Text die folgenden beobachteten relativen Häufigkeiten (die wir als Wahrscheinlichkeiten interpretieren):

$$\mathbb{P}(S \mid A) = \frac{127}{275} \approx 0.4618, \qquad \mathbb{P}(S^c \mid A) = 1 - \mathbb{P}(S \mid A) = \frac{148}{275} \approx 0.5382,$$
$$\mathbb{P}(S) = 0.15, \qquad \mathbb{P}(S^c) = 1 - \mathbb{P}(S) = 0.85$$

Für die im Text nicht angegebene Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ schreiben wir p. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(A \mid S) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(S \mid A)}{\mathbb{P}(S)} = p \cdot 3.079$$

bzw.

$$\mathbb{P}(A \mid S^c) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(S^c \mid A)}{\mathbb{P}(S^c)} = p \cdot 0.633$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit – unabhängig von p – deutlich größer kontrolliert zu werden, wenn man ein schwarzes Auto fährt. Die erste Formel liefert darüberhinaus eine obere Schranke für p.

■■

Aufgabe 4.7. Lösung: Wir schreiben S = spricht spanisch, M = Mathematiker/in, A = Anglist/in und f/m für weiblich/männlich.

(a) Im Text sind folgende (bedingte) Wahrscheinlichkeiten enthalten:

$$\mathbb{P}(S \mid M \cap f) = \frac{15}{100} = 0.15, \qquad \mathbb{P}(S \mid M \cap m) = \frac{20}{100} = 0.20,$$
$$\mathbb{P}(S \mid A \cap f) = \frac{100}{400} = 0.25, \qquad \mathbb{P}(S \mid A \cap m) = \frac{3}{10} = 0.30,$$
$$\mathbb{P}(f|M) = \frac{100}{200} = 0.50, \qquad \mathbb{P}(m|M) = \frac{100}{200} = 0.50,$$
$$\mathbb{P}(f|A) = \frac{400}{410} = 0.9756, \qquad \mathbb{P}(m|A) = \frac{10}{410} = 0.0244,$$

Und in der gemischten Population $A \cup M$ gilt:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{410}{610} = 0.6721, \qquad \mathbb{P}(M) = \frac{200}{610} = 0.3279,$$
$$\mathbb{P}(f) = \frac{500}{610} = 0.8197, \qquad \mathbb{P}(m) = \frac{110}{610} = 0.1803.$$

(b) Es gilt

$$\mathbb{P}(S \mid f) = \frac{\mathbb{P}(S \cap f)}{\mathbb{P}(f)} = \frac{\mathbb{P}(S \cap f \cap A) + \mathbb{P}(S \cap f \cap M)}{\mathbb{P}(f)} = 0.23$$
$$\mathbb{P}(S \mid m) = \frac{\mathbb{P}(S \cap m)}{\mathbb{P}(m)} = \frac{\mathbb{P}(S \cap m \cap A) + \mathbb{P}(S \cap m \cap M)}{\mathbb{P}(m)} = 0.2090$$

(c) Im vorliegenden Fall ist es einfacher, direkt die gemischte Population zu betrachten: Von 110 Männern sprechen 23 Spanisch. Also anteilig: 0.2090.

Von 500 Frauen sprechen 115 Spanisch. Das liefert: 0.23

(d) Betrachtet man die einzelnen Fachbereiche, so gilt Folgendes: Wählt man zufällig einen der Männer aus, so ist die Wahrscheinlichkeit größer, dass er Spanisch spricht als eine zufällig ausgewählte Frau. Mischt man allerdings die Populationen, so kehrt sich diese Beziehung gerade um.

Aufgabe 4.8. Lösung: Wir schreiben B = Erkrankung ist bakteriell verursacht und V = Erkrankung ist viral verursacht. ,,Befund“ steht für den Befund.

(a) Aus dem Text lassen sich folgende Wahrscheinlichkeiten entnehmen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Befund} \mid B) &= \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3087}{100000}, \\ \mathbb{P}(\text{Befund} \mid V) &= \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{81}{100000}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt (nach Meinung des Arztes!) $\mathbb{P}(B) : \mathbb{P}(V) = 4 : 1$, d.h. $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{5}$ und $\mathbb{P}(V) = \frac{1}{5}$. Setzen wir diese Werte in die Formel von Bayes ein, so erhalten wir:

$$\mathbb{P}(B \mid \text{Befund}) = \frac{\mathbb{P}(\text{Befund} \mid B) \cdot \frac{4}{5}}{\mathbb{P}(\text{Befund} \mid B)\frac{4}{5} + \mathbb{P}(\text{Befund} \mid V)\frac{1}{5}} = 0.9935$$

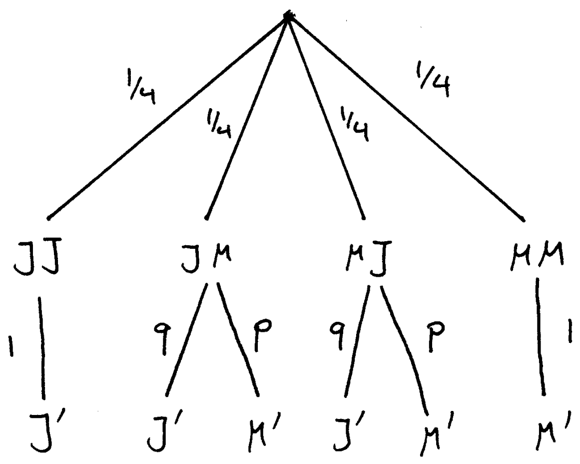
Bei einem so deutlichen Ergebnis wird der Arzt wohl dazu raten, dass Mittel zur anti-bakteriellen Behandlung einzusetzen.

(b) Wir tauschen in der letzten Berechnung die Werte $1/5$ und $4/5$. Als Ergebnis erhalten wir 0.9050, also ein deutlich weniger signifikantes Ergbnis als in Aufgabenteil a). Es ist bemerkenswert, wie die Voreinschätzung des Arztes in diesem Fall die gesuchte Wahrscheinlichkeit beeinflusst.

Aufgabe 4.9. Lösung: Wir unterscheiden die beiden Kinder in ihrer Geburtsreihenfolge und schreiben JJ, JM, MJ und MM wobei J=Junge, M=Mädchen bedeutet und an erster Stelle das ältere Kind steht. Mit M', J' bezeichnen wir unsere Beobachtung eines Mädchens bzw. Jungens.

(a) Ergibt sich als Spezialfall von b) mit $p = 1/2$. Die Lösung ist in diesem Fall $1/2$.

(b) Man betrachte den folgenden Baum:



Es ergibt sich die folgende Lösung:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(MM \mid M') \\
&= \frac{\mathbb{P}(MM)\cdot\mathbb{P}(M' \mid MM)}{\mathbb{P}(MM)\cdot\mathbb{P}(M' \mid MM) + \mathbb{P}(MJ)\cdot\mathbb{P}(M' \mid MJ) + \mathbb{P}(JM)\cdot\mathbb{P}(M' \mid JM)} \\
&= \frac{1}{1+2p}.
\end{aligned}$$

Man beachte dabei insbesondere die Sonderfälle $p = 0$ und $p = 1$ (entspricht dem Ziegenproblem!). Wenn man eine solche Formel ausgerechnet hat, ist es oft sinnvoll zur eigenen Kontrolle Randpunkte oder Spezialfälle zu betrachten.

■■

Aufgabe 4.10. Lösung: Es handelt sich hier um eine unvollständig gestellte Aufgabe, da wir nicht wissen, *wie* die in (a) und (b) dargestellten Zusatzinformationen erworben wurden (für (a) wird das durch die vorangehende Aufgabe hübsch illustriert). Die Standard„lösung“ geht so:

Wir unterscheiden die beiden Kinder in ihrer Geburtsreihenfolge und schreiben JJ, JM, MJ und MM wobei J=Junge, M=Mädchen bedeutet und an erster Stelle das ältere Kind steht. Damit ist unser W-Raum gegeben durch $\{JJ, JM, MJ, MM\}$ und das W-Maß ist die Gleichverteilung $\mathbb{P}(JJ) = \mathbb{P}(JM) = \mathbb{P}(MJ) = \mathbb{P}(MM) = \frac{1}{4}$.

(a) Die in (a) enthaltene Zusatzinformation reduziert unseren W-Raum auf $\{JJ, JM, MJ\}$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist 1/3.

(b) Die in (b) enthaltene Zusatzinformation reduziert unseren W-Raum auf $\{JJ, JM\}$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist 1/2.

■■

Aufgabe 4.11. Lösung: Wir schreiben für $n = 0, 1, 2, \dots$

D_n = Prof. S. hat n Doktorschüler

W_n = Prof. S. hat n weibliche Doktorschüler (Doktorandinnen)

$$M_n = \text{Prof. S. hat } n \text{ männliche Doktorschüler (Doktoranden)}$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathbb{P}(D_n) = p_n$.

(a) Wir suchen $\mathbb{P}(D_2 \mid W_2)$. Mit Hilfe der Bayesschen Formel sehen wir

$$\mathbb{P}(D_2 \mid W_2) = \frac{\mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}(W_2 \mid D_2)}{\mathbb{P}(W_2)}$$

und die Annahme „Anteil von Frauen und Männern unter allen Doktoranden ist gleich" zeigt

$$\mathbb{P}(W_2 \mid D_n) = \binom{n}{2}2^{-n}$$

(Binomialverteilung, jede Promotion ist ein Zufallsexperiment...). Damit können wir mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(W_2)$ ausrechnen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_2) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}(W_2 \mid D_n)\\ &= \mathbb{P}(D_0)\cdot 0 + \mathbb{P}(D_1)\cdot 0 + \sum_{n=2}^{\infty} p_n\binom{n}{2}2^{-n}\\ &= 2(1-2p)\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{2}2^{-2n}\\ &= \frac{1}{16}(1-2p)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)2^{-2n+4}\\ &= \frac{1}{16}(1-2p)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)4^{-(n-2)}\end{aligned}$$

Um diese Reihe auszurechnen, verwenden wir den üblichen Differentiationstrick

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1-x} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Mithin

$$\mathbb{P}(W_2) = \frac{1}{16}(1-2p)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)4^{-(n-2)} = \frac{8(1-2p)}{27}$$

und wir erhalten schließlich

$$\mathbb{P}(D_2 \mid W_2) = \frac{\mathbb{P}(D_2)\binom{2}{2}2^{-2}}{\frac{8(1-2p)}{27}} = \frac{(1-2p)2^{-1}2^{-2}}{\frac{8(1-2p)}{27}} = \frac{27}{64} \approx 0.4219.$$

(b) Wir suchen nun $\mathbb{P}(M_2 \mid W_2)$. Mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_2 \cap W_2) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}(M_2 \cap W_2 \mid D_n) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(D_4)\mathbb{P}(M_2 \cap W_2 \mid D_4)\\ &= (1-2p)2^{-3}\binom{4}{2}2^{-4} = \frac{3(1-2p)}{64}\end{aligned}$$

(in (*) sind alle bedingten Wahrscheinlichkeiten sind für $n \neq 4$ gleich Null!). Das zeigt schließlich

$$\mathbb{P}(M_2 \mid W_2) = \frac{\mathbb{P}(M_2 \cap W_2)}{\mathbb{P}(W_2)} = \frac{\frac{3(1-2p)}{64}}{\frac{8(1-2p)}{27}} = \frac{81}{512} \approx 0.1582$$

Aufgabe 4.12. Lösung: Wir schreiben KK bzw. KW für die Münze mit ,,Kopf/Kopf" bzw. für eine faire Münze, mit κ bezeichnen wir das Ereignis, dass wir beim k-fachen werfen nur ,,Kopf" beobachten. Es gilt

$$\mathbb{P}(KK) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(KW) = \frac{n-1}{n}$$

sowie

$$\mathbb{P}(\kappa \mid KK) = 1, \quad \mathbb{P}(\kappa \mid KW) = 2^{-k}.$$

Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir daher

$$\mathbb{P}(\kappa) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} 2^{-k}$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(KK \mid \kappa) = \frac{\mathbb{P}(KK \& \kappa)}{\mathbb{P}(\kappa)} = \frac{\mathbb{P}(\kappa \mid KK)\mathbb{P}(KK)}{\mathbb{P}(\kappa)} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} 2^{-k}} = \frac{2^k}{2^k + n - 1}.$$

Aufgabe 4.13. Lösung: Offensichtlich muß n gerade sein, sonst ist die Wahrscheinlichkeit stets Null. Wir betrachten zunächst das Ereignis, in den ersten $k = n/2$ Ziehungen stets rot/rot zu ziehen, und dann weiß/weiß. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist offenbar

$$p' = \frac{n(n-1)}{\binom{2n}{2}} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{\binom{2n-2}{2}} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot 1}{\binom{n+2}{2}} \cdot \frac{n(n-1)}{\binom{n}{2}} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{\binom{n-2}{2}} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot 1}{\binom{2}{2}}$$

wobei im Zähler jeden Bruchs die Zahl der Möglichkeiten steht, aus den (verbliebenen) Kugeln zwei gleichfarbige zu ziehen, und im Nenner steht jeweils die Zahl der Möglichkeiten, grundsätzlich 2 Kugeln zu ziehen. Wir haben

$$p' = \frac{n! \cdot n! \cdot 2^n}{(2n)!}$$

und da wir in der ursprünglichen Definition von p' das Produkt in Zähler permutieren können, sind alle Abfolgen von Paaren gleichfarbiger Kugeln gleich wahrscheinlich (vgl. die Überlegung mit der von Beispiel 2.7.c)!), und da gibt es $\binom{n}{n/2}$ Fälle. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p = \binom{n}{n/2} p' = \frac{n!}{(n/2)! \cdot (n/2)!} \frac{n! \cdot n! \cdot 2^n}{(2n)!} = \frac{(n!)^3 \cdot 2^n}{(n/2)! \cdot (n/2)! \cdot (2n)!}.$$

Eigentlich sollte in der Aufgabenstellung: ,,in jedem Zug zwei verschiedenfarbige Kugeln" stehen. Das hat dann folgende Lösung: Wir schreiben V_i für das Ereignis, dass bei der $i$ten Ziehung zwei verschiedenfarbige Kugeln (eine rot, eine weiß) gezogen werden. Es gilt

$$\mathbb{P}(V_1) = \frac{n^2}{\binom{2n}{2}}$$

da wir auf n^2 Arten eine weiße und eine rote Kugel ziehen können und da wir auf insgesamt $\binom{2n}{2}$ Arten 2 Kugeln ziehen können. Entsprechend sieht man, dass

$$\mathbb{P}(V_{i+1} \mid V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_i) = \frac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}}.$$

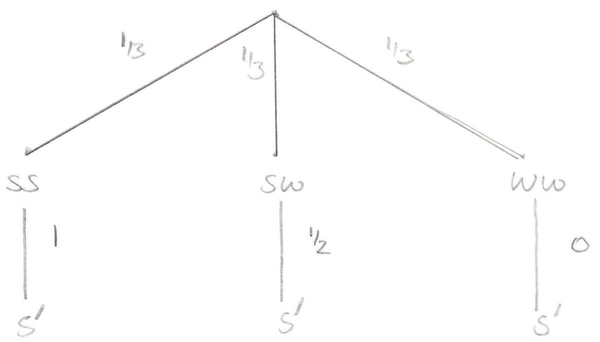
Die Multiplikationsformel lehrt daher

$$\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n) = \mathbb{P}(V_1) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(V_{i+1} \mid V_1 \cap \cdots \cap V_i) = \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n!)^2}.$$

Aufgabe 4.14. Lösung: Wir bezeichen die drei Karten, entsprechend ihrer Seiten mit SS, SW und WW und mit S' bzw. W' bezeichnen wir das von uns beobachtete Ereignis, dass die obenliegende Seite schwarz bzw. weiß ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathbb{P}(SW \mid S') = \frac{\mathbb{P}(SW \& S')}{\mathbb{P}(S')} = \frac{\mathbb{P}(S' \mid SW)\mathbb{P}(SW)}{\mathbb{P}(S')} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

vgl. hierzu das nachfolgende Baumdiagramm:



Aufgabe 4.15. Lösung: Wir schreiben S für das Ereignis, dass eine schwarze Kugel gezogen wird, und wir schreiben U_i für das Ereignis, dass Urne i ausgewählt wird.

Hier ist die optimale Strategie: wir legen eine schwarze Kugel in eine Urne 1, alle anderen $s + w - 1$ Kugeln in die zweite Urne. Das ergibt dann

$$\mathbb{P}(S) = 1 \cdot \mathbb{P}(U_1) + \frac{s-1}{w+s-1}\mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{s-1}{w+s-1}\right) = \frac{s + (w+s-2)}{2(w+s-1)} =: p.$$

Wir zeigen nun, dass diese Strategie optimal ist. Wir legen $k \leqslant (w+s)/2$ Kugeln in Urne 1; davon seien r schwarz und $k - r$ weiß. Die restlichen Kugeln legen wir in Urne 2, die dann $s - r$ schwarze und $w + r - k$ weiße Kugeln enthält. Somit erhalten wir

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{k} + \frac{s-r}{w+s-k}\right) = \frac{ks + r(w+s-2k)}{2k(w+s-k)}.$$

Für festes k ist dieser Ausdruck maximal, wenn r möglichst groß wird: weil $r \leqslant k$ und $r \leqslant s$ gilt ist, ergibt die Wahl $r = s$ (wenn es denn erlaubt ist) die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S) \leqslant \frac{1}{2} < p$. Wenn wir $r = k$ wählen, dann wird der Ausdruck für

$$\mathbb{P}(S) = \frac{w + 2s - 2k}{2w + 2s - 2k}$$

maximal, wenn k möglichst klein ist, d.h. $k = 1 = r$ ist tatsächlich die optimale Strategie.

Aufgabe 4.16.

Lösung: Wir folgen der Anleitung und schreiben $m = k_1$, $n = k_2$ und $p_{m,n}$ für die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat 1 über die gesamte Auszählung hinweg führt.

Fall 1: $m > 0$ und $n = 0$. Dann ist $p_{m,0} = 1$, da Kandidat 2 gar keine Stimmen hat. Offensichtlich gilt hier $p_{m,n} = (m - n)/(m + n)$.

Fall 2: $m = n > 0$. Dann ist $p_{m,m} = p_{n,n} = 0$, da Kandidat 1 nicht gewinnt. Offensichtlich gilt hier $p_{m,n} = (m - n)/(m + n)$.

Fall 3: Wir nehmen an, dass die Formel für $p_{m-1,n}$ und $p_{m,n-1}$ gilt. Wenn wir in der Auszählung einen Schritt zurückgehen (wenn $m + n - 1$ Stimmen ausgezählt sind), dann kann sich $p_{m,n}$ aus zwei Arten ergeben: aus $p_{m-1,n}$ (wenn Kandidat 1 eine Stimme dazubekommt) und aus $p_{m,n-1}$, wenn Kandidat 2 eine Stimme dazubekommt, d.h.

$$p_{m,n} = p_{m,n-1}\frac{n}{m+n} + p_{m-1,n}\frac{m}{m+n}.$$

Beachte die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat 1 eine Stimme erhalten hat ist – unabhängig von der Auszählung – stets $m/(n+m)$; dasselbe gilt für Kandidat 2, der die Wahrscheinlichkeit $n/(n+m)$ hat. Wenn wir nun die Induktionsannahme einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
p_{m,n} &= p_{m,n-1}\frac{n}{m+n} + p_{m-1,n}\frac{m}{m+n}\\
&= \frac{m-n+1}{m+n-1}\cdot\frac{n}{m+n} + \frac{m-1-n}{m+n-1}\cdot\frac{m}{m+n}\\
&= \frac{(m^2-n^2)-(m-n)}{(m+n-1)(m+n)}\\
&= \frac{(m-n)(m+n)-(m-n)}{(m+n-1)(m+n)}\\
&= \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n-1)(m+n)}\\
&= \frac{m-n}{m+n}.
\end{aligned}$$

---

5 Unabhängigkeit

Aufgabe 5.1. Lösung:

(a) Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist die Summe aller Tabelleneinträge; man sieht leicht, dass 1 herauskommt.

(b) $\mathbb{P}(Y \text{ ist gerade}) = \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$

$\mathbb{P}(X \cdot Y \text{ ist ungerade}) = \mathbb{P}(Y \neq 2) = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$

(c) Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=-2) &= \mathbb{P}(\{(-1,-1)\}) = \frac{1}{27}\\
\mathbb{P}(X+Y=0) &= \mathbb{P}(\{(-1,1),(1,-1)\}) = \frac{2}{9}\\
\mathbb{P}(X+Y=1) &= \mathbb{P}(\{(-1,2)\}) = \frac{1}{27}\\
\mathbb{P}(X+Y=2) &= \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{2}{9}\\
\mathbb{P}(X+Y=3) &= \mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \frac{1}{9}\\
\mathbb{P}(X+Y=4) &= \mathbb{P}(\{(-1,5),(5,-1)\}) = \frac{7}{27}\\
\mathbb{P}(X+Y=6) &= \mathbb{P}(\{(1,5),(5,1)\}) = \frac{1}{9}\\
\mathbb{P}(X+Y=7) &= \mathbb{P}(\{(5,2)\}) = 0\\
\mathbb{P}(X+Y=10) &= \mathbb{P}(\{(5,5)\}) = 0.
\end{aligned}$$

Die ZV X und Y sind nicht unabhängig, denn z.B. ist

$$0 = P(X=5, Y=2) \neq P(X=5)P(X=2) = \frac{7}{27} \cdot \frac{4}{27}.$$

Aufgabe 5.2. Lösung:

(a) „$\Rightarrow$“:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A \setminus B)\\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)\\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\
&= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

„$\Leftarrow$“: A und B^c seien unabhängig. Wende nun die vorherige Überlegung auf diese Mengen an, um zu sehen, dass A und $(B^c)^c = B$ unabhängig sind.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) &= \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C))\\ &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\\ &= \mathbb{P}(C)(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))\\ &= \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A \cup B).\end{aligned}$$

Aufgabe 5.3. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{P}(\emptyset) &= \mathbb{P}((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c)\\ &= \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)\\ &= (1 - \mathbb{P}(A_1))(1 - \mathbb{P}(A_2))(1 - \mathbb{P}(A_3))\end{aligned}$$

und daher muß mindestens einer der Faktoren Null sein, also gibt es ein $i \in \{1,2,3\}$: $\mathbb{P}(A_i) = 1$.

Aufgabe 5.4. Lösung: Es gilt wegen Korollar 5.9

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \int \mathbb{P}(X \neq y)\,\mathbb{P}(Y \in dy) = \int 1\,\mathbb{P}(Y \in dy) = 1.$$

Die Stetigkeit der Verteilung von X garantiert, dass $\mathbb{P}(X = y) = 0$ bzw. $\mathbb{P}(Y \neq y) = 1$ für alle y gilt.

Aufgabe 5.5. Lösung: Die Richtung „$\Rightarrow$“ ist trivial. Umgekehrt sei $\{X = 1\} \perp\!\!\!\perp \{Y = 1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}) &= \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}^c)\\ &= \mathbb{P}(\{X = 1\} \setminus \{Y = 1\})\\ &= \mathbb{P}(\{X = 1\}) - \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})\\ &= \mathbb{P}(\{X = 1\}) - \mathbb{P}(\{X = 1\})\mathbb{P}(\{Y = 1\})\\ &= \mathbb{P}(\{X = 1\})(1 - \mathbb{P}(\{Y = 1\}))\\ &= \mathbb{P}(\{X = 1\})\mathbb{P}(\{Y = 0\})\end{aligned}$$

und die anderen Produktbeziehungen zeigt man analog:

$$\mathbb{P}(\{X=0\}\cap\{Y=0\}) = \mathbb{P}(\{X=0\})\mathbb{P}(\{Y=0\})$$
$$\text{und}\quad \mathbb{P}(\{X=0\}\cap\{Y=1\}) = \mathbb{P}(\{X=0\})\mathbb{P}(\{Y=1\}).$$

Das zeigt die Unabhängigkeit von $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$.

Lösungsalternative: Verwende Aufgabe 5.2.a).

Aufgabe 5.6. Lösung:

(a) Für alle $x, y \in \{-1, 1\}$ gilt $\{X = x, Y = y\} = \{U = x, V = xy\}$. Weil $U \perp\!\!\!\perp V$ gilt, sehen wir

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(U=x)\mathbb{P}(V=xy).$$

Daher ergeben sich vier Fälle

$$\mathbb{P}(X=1,Y=1) = \frac{4}{9}, \qquad \mathbb{P}(X=1,Y=-1) = \frac{2}{9},$$
$$\mathbb{P}(X=-1,Y=1) = \frac{1}{9}, \qquad \mathbb{P}(X=-1,Y=-1) = \frac{2}{9}.$$

Für die Randverteilungen gilt

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1,Y=-1) + \mathbb{P}(X=1,Y=1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1,Y=1) + \mathbb{P}(X=-1,Y=1) = \frac{5}{9}.$$

Wir sehen daher, dass

$$\mathbb{P}(X=1,Y=1) = \frac{4}{9} \neq \frac{10}{27} = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1),$$

d.h. X und Y sind nicht unabhängig.

(b) Offensichtlich gilt $X^2 = U^2$ und $Y^2 = V^2$, d.h. X^2 und Y^2 erben die Unabhängigkeit von U und V (vgl. Korollar 5.7, Funktionen von unabhängigen ZV sind unabhängig).

Aufgabe 5.7. Lösung: Existenz der Dichte: OE sei $i = 1$ gewählt (die anderen Rechnungen gehen ganz analog)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in B) &= \mathbb{P}(X_1 \in B, X_2 \in \mathbb{R}, \dots, X_d \in \mathbb{R})\\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_d)\, dx_d \dots dx_2\, dx_1\\ &= \int_B f_1(x_1)\, dx_1\end{aligned}$$

wobei wir $f_1(y) := \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(y, x_2, \dots, x_d)\, dx_d \dots dx_2$ setzen. Also haben die X_i Dichten, die wir aus ,,wegintegrieren“ aller anderen Variablen x_n, $n \neq i$, in der gemeinsamen Dichte erhalten.

Damit folgt aus Satz 5.8:

$$\begin{aligned} X_1,\dots,X_d \text{ unabhängig} &\iff \mathbb{P}_{X_1,\dots,X_d} = \mathbb{P}_{X_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{P}_{X_d} \\ &\iff f(x_1,\dots,x_d) = \prod_{i=1}^d f_i(x_i). \end{aligned}$$

Aufgabe 5.8. Lösung: Wir rechnen die Bedingung 5.8.b) nach. Es seien $A_i \subset X_i(\Omega)$ beliebige Mengen. Da die ZV X diskret ist, sind diese Mengen höchstens abzählbar. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1\in A_1,\dots,X_d\in A_d) &= \sum_{a_1\in A_1}\cdots\sum_{a_d\in A_d}\mathbb{P}(X_i=a_i, i=1,\dots,d) \\ &= \sum_{a_1\in A_1}\cdots\sum_{a_d\in A_d}\prod_{i=1}^d \mathbb{P}(X_i=a_i) \\ &= \sum_{a_1\in A_1}\mathbb{P}(X_1=a_1)\times\cdots\times\sum_{a_d\in A_d}\mathbb{P}(X_d=a_d) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\times\cdots\times\mathbb{P}(A_d). \end{aligned}$$

Aufgabe 5.9. Lösung: Durch „Weglassen von Mengen" kann man die Unabhängigkeit nicht zerstören:

$$\begin{aligned} \mathscr{B}\perp\!\!\!\perp\mathscr{C} &\iff \forall B\in\mathscr{B},\ C\in\mathscr{C}: \mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ &\implies \forall B\in\mathscr{F},\ C\in\mathscr{G}: \mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \quad \big[\text{da gilt: } \mathscr{F}\subset\mathscr{B}, \mathscr{G}\subset\mathscr{C}\big] \\ &\iff \forall F\in\mathscr{F},\ G\in\mathscr{C}: \mathbb{P}(F\cap G) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G) \\ &\iff \mathscr{F}\perp\!\!\!\perp\mathscr{G}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.10. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y\leqslant z) &= \int \mathbb{1}_{(-\infty,z]}(x+y)\,\mathbb{P}(X\in dx, Y\in dy) \\ &\overset{\text{unabh.}}{\underset{\text{Tonelli}}{=}} \int\left(\int \mathbb{1}_{(-\infty,z]}(x+y)\,\mathbb{P}(X\in dx)\right)\mathbb{P}(Y\in dy) \\ &= \int\left(\int \mathbb{1}_{(-\infty,z-y]}(x)\,\mathbb{P}(X\in dx)\right)\mathbb{P}(Y\in dy) \\ &= \int \mathbb{P}(X\leqslant z-y)\,\mathbb{P}(Y\in dy) \\ &= \int F(z-y)\,dG(y). \end{aligned}$$

Aufgabe 5.11. Lösung: Für beliebige Borelmengen $B \subset \mathbb{R}^d$ gilt wegen Tonelli

$$\begin{aligned}\mu * \nu(B) := (f\lambda^d) * \nu(B) &= \int\int \mathbb{1}_B(x+y)\, f(x)\, dx\, \nu(dy)\\ &= \int\int \mathbb{1}_B(x)\, f(x-y)\, dx\, \nu(dy)\\ &= \int_B \left(\int f(x-y)\, \nu(dy)\right) dx,\end{aligned}$$

also ist $h(z) = \int f(z-y)\, \nu(dy)$.

■■

Aufgabe 5.12. Lösung:

(a) Jede endliche Teilmenge $H \subset \mathbb{N}$ ist in einer Menge der Art $\{1, 2, \dots, n\}$ enthalten. Daher gilt

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} : \{A_1, \dots, A_n\} \text{ unabhängig} &\iff \forall H \subset \mathbb{N}, |H| < \infty : \{A_h, h \in H\} \text{ unabhängig}\\ &\overset{\text{Def}}{\iff} \{A_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ unabhängig.}\end{aligned}$$

(b) Vgl. Lemma 5.4.

■■

Aufgabe 5.13. Lösung:

(a) Wir schreiben f und g für die Dichten der ZV X und Y; weil $X \perp\!\!\!\perp Y$, hat $X+Y$ die Dichte (vgl. Satz 5.17)

$$\begin{aligned}f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t)\, dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t) \beta e^{-\beta(x-t)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x-t)\, dt\\ &= \begin{cases} 0, & x \leqslant 0\\ \alpha\beta e^{-\beta x} \int_0^x e^{(\beta-\alpha)t}\, dt, & x > 0\end{cases}\\ &= \alpha\beta \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{\beta - \alpha} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).\end{aligned}$$

(b) X, Y sind unabhängig und haben jeweils die Dichte $f(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, daher hat $X+Y$ die Dichte

$$\begin{aligned}f * f(x) &= \int f(t) f(x-t)\, dt\\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x-t)\, dt\\ &= \frac{1}{4}\lambda([-1,1] \cap [x-1, x+1])\\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}(2-|x|), & |x| \leqslant 2\\ 0, & |x| > 2\end{cases}\end{aligned}$$

Der Graph dieser Dichte sieht wie ein Dreieck aus.

Bemerkung: Wenn X die Dichte $f(x)$ hat, dann hat $\frac{X}{2}$ die Dichte $2f(2x)$. (Denn: $\mathbb{P}(\frac{X}{2} < x) = \int_{-\infty}^{2x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 2f(2y)\,dy$.) Damit ist die Dichte von $\frac{X+Y}{2}$ gegeben durch $(1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

Aufgabe 5.14. Lösung: Wir schreiben $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$, $a,b>0$, für die Eulersche Betafunktion. Es gilt $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ wobei $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ die Eulersche Gammafunktion ist.

(a) Definiere $S = X+Y$, $T = \frac{X}{X+Y}$; die ZV T ist sinnvoll definiert, da $X+Y>0$ f.s. $(X,Y \geqslant 0,\ P(X=0)=0)$. Sei $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(S,T)) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(s,t)\,d\mathbb{P}_{S,T}(s,t)\\
&= \mathbb{E}h\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) d\mathbb{P}_{X,Y}(x,y)\\
&= \iint_{x>0,y>0} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda(x+y)} x^{a-1}y^{b-1}\,dx\,dy\\
&\quad \text{Variablenwechsel:} \left[\ \begin{cases} s = x+y\\ t = \frac{x}{x+y}\\ x>0, y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ts\\ y = s(1-t)\\ s>0, 0<t<1\end{cases}\right.\\
&\quad \text{Funktionaldet.:} \left[\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| = \begin{vmatrix} t & s\\ 1-t & -s\end{vmatrix} = -ts - s + ts = -s(\neq 0)\right.\\
&= \iint_{s>0,0<t<1} h(s,t)\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda s}(ts)^{a-1}(s(1-t))^{b-1}|-s|\,ds\,dt.
\end{aligned}
$$

Also ist die gemeinsame Dichte von S und T gegeben durch

$$f_{S,T}(s,t) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda s} t^{a-1} s^{a-1+b}(1-t)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(s)\mathbb{1}_{(0,1)}(t)$$

Falls sich diese Dichte als Produkt von zwei Dichten darstellen lässt, folgt dass S und T unabhängig sind und ihre jeweilige Verteilung ist durch die Faktoren bestimmt.

$$f_S(s) = \int_{\mathbb{R}} f_{S,T}(s,t)\,dt = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda s} s^{a-1+b} B(a,b)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(s)$$

ist eine Dichte, wie die folgende Formel zeigt:

$$\int_{\mathbb{R}} f_S(s)\,ds = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} B(a,b) \int_0^\infty \gamma_{a+b,\frac{1}{\lambda}}(s)\,ds = 1.$$

Also gilt

$$f_{S,T}(s,t) = f_S(s)\cdot \frac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(t) =: f_S(s)f_T(t),$$

wobei $f_T(t)$ auch eine Dichte ist, da $\int f_T(t)\,dt = 1$ (Def. der Betafunktion $B(a,b)$).

(b) Definiere $Z = \frac{X}{Y}$. Die Definition ist sinnvoll, da $Y > 0$ f.s. Sei $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}k(Z) &= \int_{\mathbb{R}} k(z)\, \mathbb{P}_Z(dz) \\
&= \iint_{x>0,y>0} k\left(\tfrac{x}{y}\right) \gamma_{a,\frac{1}{\lambda}}(x)\gamma_{b,\frac{1}{\lambda}}(y)\, dx\, dy \\
&\text{Variablenwechsel:}\left[\ \begin{cases} z = \frac{x}{y} \\ t = y \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tz \\ y = t \\ t > 0, z > 0 \end{cases}\right. \\
&\text{Funktionaldet.:}\left[\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)}\right| = \begin{vmatrix} t & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = t - z \cdot 0 = t\right. \\
&= \int_{z>0} k(z) \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{a-1} \int_{t>0} e^{-\lambda t(z+1)} t^{a+b-1}\, dt\, dz \\
&= \int_{z>0} k(z) \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{a-1} (\lambda(z+1))^{-(a+b)} \Gamma(a+b)\, dz \\
&= \int_{z>0} k(z) \frac{1}{B(a,b)} \frac{z^{a-1}}{(1+z)^{a+b}}\, dz,
\end{aligned}$$

d.h. X/Y hat die Dichte $\frac{1}{B(a,b)} \frac{z^{a-1}}{(1+z)^{a+b}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z)$.

Aufgabe 5.15. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X/Y \leqslant t) &= \mathbb{P}(X/Y \leqslant t, Y > 0) + \mathbb{P}(X/Y \leqslant t, Y < 0) \\
&= \mathbb{P}(X \leqslant tY, Y > 0) + \mathbb{P}(X \geqslant tY, Y < 0).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit gilt (verwende z.B. Korollar 5.9)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant tY, Y > 0) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X \leqslant ty)\, \mathbb{P}(Y \in dy) \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{ty} \mathbb{P}(X \in dx)\, \mathbb{P}(Y \in dy) \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{ty} f(x) g(y)\, dx\, dy \\
&\overset{x=zy}{\underset{dx=y\,dz}{=}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{t} f(zy) g(y) y\, dz\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{t} \left(\int_0^\infty f(zy) g(y) y\, dy \right) dz.
\end{aligned}$$

Eine ganz ähnliche Rechnung liefert

$$\mathbb{P}(X \geqslant tY, Y < 0) = \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{-\infty}^{0} f(zy) g(y)(-y)\, dy \right) dz$$

und insgesamt folgt, dass gilt

$$\frac{X}{Y} \sim \int_{-\infty}^{\infty} f(zy) g(y) |y|\, dy.$$

Wenn X, Y standardnormalverteilt sind, gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|y|e^{-z^2y^2/2}e^{-y^2/2}\,dy &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ye^{-z^2y^2/2}e^{-y^2/2}\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ye^{-(z^2+1)y^2/2}\,dy \\
&\underset{dt=y\,dy}{\overset{t=y^2/2}{=}} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(z^2+1)t}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{z^2+1}
\end{aligned}$$

und das ist die Cauchy-Verteilung.

Aufgabe 5.16. Lösung:

(a) Wenn $X \in L^2(\mathbb{P})$ ist, dann ist auch $X \in L^1(\mathbb{P})$, $c = \mathbb{E}X$ existiert und $(X - c) \in L^2(\mathbb{P})$, also gilt $\mathbb{V}X = \mathbb{E}((X-c)^2)|_{c=\mathbb{E}X} < \infty$.

Umgekehrt sei $\mathbb{V}X < \infty$. Insbesondere erfordert das, dass $\mathbb{E}X$ existiert. Dann gilt für $c = \mathbb{E}X$ wegen der elementaren Ungleichung $(a-b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}((X-c+c)^2) \leqslant 2\mathbb{E}((X-c)^2) + 2c^2 = 2\mathbb{V}X + 2c^2 < \infty.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n X_iX_k\right) - \left(\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(X_iX_k\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i\neq k}^n X_iX_k\right) - \sum_{i=1}^n\left(\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)^2 - \sum_{i\neq k}^n\left(\mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_k\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left(X_i^2\right) - \sum_{i=1}^n\left(\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)^2 + \sum_{i\neq k}^n\left(\mathbb{E}\left(X_iX_k\right) - \left(\mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{V}X_i + \sum_{i\neq k}^n \operatorname{Cov}\left(X_i, X_k\right).
\end{aligned}$$

(c) Offensichtlich gilt auf dem Raum $L_0^2(\mathbb{P})$ $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$. Dies ist eine symmetrische Bilinearform und $\mathbb{E}(X^2) = 0 \iff X = 0$. In diesem Raum ist offensichtlich $\sqrt{\mathbb{V}X}$ die Norm (was sonst nicht der Fall ist, da $\mathbb{V}X = \mathbb{V}(X+c)$, d.h. die Normierung $\mathbb{E}X = 0$ ist wichtig).

Aufgabe 5.17. Lösung: „$\Rightarrow$“: $E \in \mathscr{E} \implies E \in \mathscr{F}$. Da $\mathscr{E}$ und $\mathscr{F}$ unabhängig sind, folgt

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap E) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(E),$$

also $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$.

„$\Leftarrow$“: Seien $E \in \mathscr{E}$ und $F \in \mathscr{F}$.

$$\text{1. Fall: } \mathbb{P}(E) = 0 \implies 0 \leqslant \mathbb{P}(E \cap F) \leqslant \mathbb{P}(E) = 0$$
$$\implies 0 = \mathbb{P}(E \cap F) = 0 \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F).$$

$$\text{2. Fall: } \mathbb{P}(E) = 1 \implies \mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F \cup E) = \mathbb{P}(F) + 1 - 1$$
$$= 1 \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F).$$

■■

Aufgabe 5.18. Lösung: Weil die ZV X, Y unabhängig sind, gilt

$$1 = \mathbb{P}(X + Y = c) = \int \mathbb{P}(X = c - y)\,\mathbb{P}(Y \in dy).$$

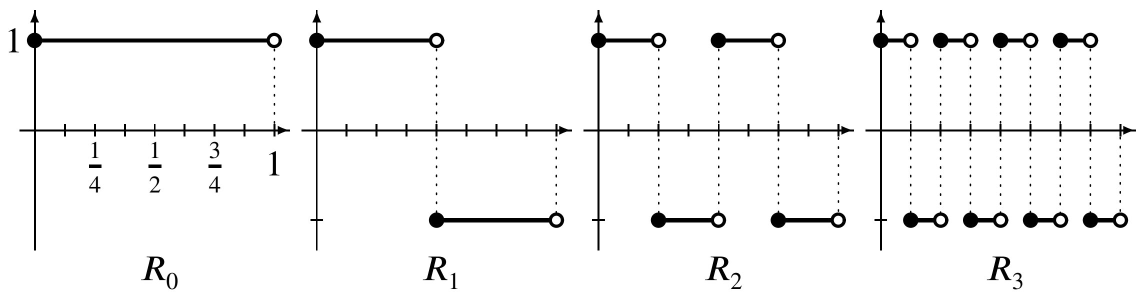
Das zeigt, dass $\mathbb{P}(X = c - y) < 1$ nicht für alle y gelten kann. Mithin muß $\mathbb{P}(X = c - y) = 1$ für ein y gelten, d.h. $X = c'$ f.s. und $Y = c - c'$ f.s.

■■

Aufgabe 5.19. Lösung: Zunächst sollten wir uns klarmachen, wie die Funktionen R_n aussehen. Weil sin 2π-periodisch ist, erhalten wir

$$R_0 := \mathbb{1}_{[0,1)}, \quad R_1 := \mathbb{1}_{[0,\frac12)} - \mathbb{1}_{[\frac12,0)}, \quad R_2 := \mathbb{1}_{[0,\frac14)} - \mathbb{1}_{[\frac14,\frac12)} + \mathbb{1}_{[\frac12,\frac34)} - \mathbb{1}_{[\frac34,1)}, \dots$$

wobei wir die Sprungstellen so abgeändert haben, dass der Wert nicht Null wird sondern die Funktion rechtsstetig macht. Das ist im Hinblick auf das Lebesgue-Maß (es handelt sich um endlich viele Punkte) irrelevant. Die Graphen der ersten 4 Rademacher-Funktionen sind also



Offensichtlich gilt stets $\mathbb{P}(R_k = \pm 1) = \frac12$ und weil die Rademacher-Funktionen „selbstähnlich“ sind, folgt auch $\mathbb{P}(R_k = 1, R_{k+1} = \pm 1) = \frac14 = \mathbb{P}(R_k = 1)\mathbb{P}(R_{k+1} = \pm 1)$. Wir sehen entsprechend

$$\mathbb{P}(R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_k = 1, R_{k+1} = \pm 1) = 2^{-k+1} = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(R_i = 1) \cdot \mathbb{P}(R_{k+1} = \pm 1)$$

und dieselbe Überlegung zeigt auch

$$\mathbb{P}(R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_k = r_k, R_{k+1} = \pm 1) = 2^{-k+1} = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(R_i = 1) \cdot \mathbb{P}(R_{k+1} = \pm 1)$$

wenn $r_1, r_2, \ldots, r_k$ beliebige Werte ± 1 annehmen. Das zeigt die Unabhängigkeit der Familie $(R_k)_k$. Ein ganz ähnliches Argument finden Sie auf Seite 61 des Lehrbuchs [Schilling-WT].

Die paarweise Unkorreliertheit sieht man so: Es seien $m \neq n$. Dann haben wir wegen $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(2^n \pi t) \sin(2^m \pi t)\, dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2^n - 2^m)\pi t\, dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2^n + 2^m)\pi t\, dt \\ &= 0 - 0\end{aligned}$$

weil $2^n \pm 2^m$ ganzzahlig ist und weil für ganze N

$$\int_0^1 \cos N\pi t\, dt = \frac{\sin N\pi t}{N\pi}\bigg|_0^1 = \frac{\sin N\pi}{N\pi} = 0.$$

Man kann sich übrigens auch überlegen, dass Produkte von ungerade vielen [bzw. gerade vielen] Sinusfunktionen als Summe von Sinusfunktionen [bzw. Cosinusfunktionen] dargestellt werden können. Die Argumente sind immer von der Form $N\pi t$ mit ganzem N, d.h. es gilt auch

$$\int_0^1 \prod_{i=1}^n \sin(2^{k(i)} \pi t)\, dt = 0, \quad k(1) < k(2) < \cdots < k(n) \text{ natürliche Zahlen}$$

(aber das war nicht Teil der Aufgabe...).

Aufgabe 5.20.

Lösung: Wir schreiben X für die Zahl der benötigten Packungen, um einen vollständigen Satz von Sammelbildern zu erhalten. Es gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X \geqslant k).$$

Dem Hinweis folgend sei $A_{i,k}$ das Ereignis, dass Bild Nr. i *nicht* in den Packungen $1, 2, \ldots, k-1$ enthalten ist. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{i,k}) = (1-p_i)^{k-1} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(A_{i,k} \cap A_{j,k}) = (1-p_i-p_j)^{k-1} \quad (i \neq j) \\ \text{und} \quad \mathbb{P}(A_{i,k} \cap A_{j,k} \cap A_{l,k}) = (1-p_i-p_j-p_l)^{k-1} \quad (i,j,l \text{ unterschiedlich})\end{aligned}$$

usw. Nun gilt

$$X(\omega) \geqslant k \iff \omega \in \bigcup_{i=1}^k A_{i,k}$$

und daher erhalten wir mit der Einschluss–Ausschluss Formel

$$\mathbb{P}(X \geqslant k) = S_1(k) - S_2(k) + S_3(k) - \cdots + (-1)^{n-1} S_n(k)$$

wo

$$S_m(k) = \sum_{\{i_1,\ldots,i_m\} \subset \{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(\cap_{l=1}^m A_{i_l,k}) = \sum_{\{i_1,\ldots,i_m\} \subset \{1,\ldots,n\}} (1 - p_{i_1} - p_{i_2} - \cdots - p_{i_m})^{k-1}.$$

($S_m(k)$ ist die Summe über die Wahrscheinlichkeiten dass genau m Sammelbilder nicht in den Packungen $1, 2, \ldots, k-1$ enthalten waren.) Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} S_m(k) \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} S_m(k) \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\{i_1,\ldots,i_m\}\subset\{1,\ldots,n\}} (1 - p_{i_1} - p_{i_2} - \cdots - p_{i_m})^{k-1} \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_m\}\subset\{1,\ldots,n\}} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_{i_1} - p_{i_2} - \cdots - p_{i_m})^{k-1} \\
&\qquad \text{(geometrische Reihe!)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_m\}\subset\{1,\ldots,n\}} \frac{1}{p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_m}} \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} Y_m.
\end{aligned}$$

■■

6 Konstruktion von (unabhängigen) Zufallsvariablen

Aufgabe 6.1. Lösung: Es sei F eine Verteilungsfunktion. Wir schreiben

$$H(s) := \inf\{t : F(t) > s\}$$
$$G(s) := \sup\{t : F(t) \leqslant s\}$$

und wir müssen zeigen, dass $H = G$.

Es sei s fest und t_0 so, dass $F(t_0) > s$. Offensichtlich gilt dann

$$t_0 \geqslant \sup\{t : F(t) \leqslant s\} \implies \inf\{t_0 : F(t_0) > s\} \geqslant \sup\{t : F(t) \leqslant s\} \implies H(s) \geqslant G(s).$$

Umgekehrt betrachten wir für ein s und beliebiges $\epsilon > 0$ den Wert $G(s) + \epsilon$. Nach der Definition von $G(s)$ gilt dann

$$F(G(s) + \epsilon) > s \implies H(s) \leqslant G(s) + \epsilon$$

also $H(s) \leqslant \lim_{\epsilon \to 0}(G(s) + \epsilon) = G(s)$.

Aufgabe 6.2. Lösung: Es gilt: $\mathbb{P}(X = x_0) = F(x_0) - F(x_0-)$ also

$$P(X = x_0) = 0 \iff F(x_0) = F(x_0-) \ \text{(d.h. linksstetig)} \iff F \ \text{ ist stetig in } x_0,$$

da eine Verteilungsfunktion immer rechtsstetig ist.

Aufgabe 6.3. Lösung: Das ist einfach eine weitere Spielart der Rademacher-Folge! Vgl. Aufgabe 5.19 oder S. 61 in [Schilling-WT].

Aufgabe 6.4. Lösung: Es sei $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ eine Borelmenge. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \in B\right) &= \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{n=0}^{\infty}} \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \in B\right\} \cap \{N = n\}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \in B\right\} \cap \{N = n\}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in B\right) \cdot \mathbb{P}(N = n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n(B) \cdot p_n.$$

Wir verwenden in der letzten Zeile Satz 5.17.

Eine äquivalente Berechnungsmethode basiert auf bedingten Erwartungen und geht so:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \in B\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in B \,\middle|\, N = n\right) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in B\right) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n(B) \cdot p_n.
\end{aligned}$$

wobei wir verwenden, dass $\mathbb{P}(A \mid C) = \mathbb{P}(A)$ für $A \perp\!\!\!\perp C$ gilt.

Aufgabe 6.5. Lösung: Wir berechnen zunächst die Verteilung von M_n. Es gilt für alle $x > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n \leqslant x) &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x) \\
&\overset{\text{unabhängig}}{=} \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leqslant x) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \leqslant x) \\
&\underset{X_1 \sim \mathsf{Exp}}{\overset{\text{iid}}{=}} \left(\int_0^x e^{-t}\,dt\right)^n.
\end{aligned}$$

Indem wir nach x ableiten, sehen wir dass M_n eine W-Dichte hat:

$$M_n \sim f_{M_n}(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) n e^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}\,dx.$$

Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt $M_1 = X_1 = C_1$.

Induktionsannahme (IAnn): $M_n \sim C_n$.

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n + 1$: Es gilt auf Grund der Unabhängigkeit der X_i:

$$C_{n+1} = C_n + (n+1)^{-1} X_{n+1} \sim \mathbb{P}_{C_n} * \mathbb{P}_{X_{n+1}/(n+1)}.$$

Weil $X_{n+1} \sim X_1 \sim \mathsf{Exp}(1)$, folgt sofort, dass $X_{n+1} \sim \mathsf{Exp}(n+1)$ gilt (der Parameter gibt ja den reziproken Erwartungswert an!). Mithin erhalten wir für $x > 0$

$$\begin{aligned}
f_{C_{n+1}}(x) &= \int_0^{\infty} \underbrace{n e^{-y}(1 - e^{-y})^{n-1}}_{\text{IAnn}} (n+1) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x - y) e^{-(n+1)(x-y)}\,dy \\
&= \int_0^x n e^{-y}(1 - e^{-y})^{n-1} (n+1) e^{-(n+1)(x-y)}\,dy \\
&= n(n+1) e^{-(n+1)x} \int_0^x e^{ny}(1 - e^{-y})^{n-1}\,dy \\
&= n(n+1) e^{-(n+1)x} \int_0^x e^{y}(e^{y} - 1)^{n-1}\,dy \\
&= n(n+1) e^{-(n+1)x} \left.\frac{(e^y - 1)^n}{n}\right|_{z=0}^{x} dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n+1)(e^x - 1)^n \\
&= (n+1)e^{-nx}(1-e^{-x})^n = f_{M_{n+1}}(x).
\end{aligned}
$$

Weil die ZV X_i iid $\mathsf{Exp}(1)$ sind, gilt $\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_1 = 1$ und $\mathbb{V}X_i = \mathbb{V}X_1 = 1$. Weil $M_n \sim C_n$, gilt $\mathbb{E}M_n = \mathbb{E}C_n$ und $\mathbb{V}M_n = \mathbb{V}C_n$, aber die Momente von C_n sind viel einfacher zu berechnen, d.h.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}M_n = \mathbb{E}C_n = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}\right) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{i}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\mathbb{E}X_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \\
\mathbb{V}M_n = \mathbb{V}C_n = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}\right) &\overset{\text{Satz 5.22}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\left(\frac{X_i}{i}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}\mathbb{V}X_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.
\end{aligned}
$$

■■

Aufgabe 6.6. Lösung:

(a) $V = (V_1, V_2)$. Zunächst machen wir uns klar, dass V und $\bar{X}$ ZV auf dem Produktraum sind. Da $\bar{X}$ durch messbare Operationen aus den Komponenten von V hervorgeht, reicht es, die Messbarkeit von V zu zeigen. Dazu seien $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Es gilt

$$
V^{-1}(A \times B) = X^{-1}(A) \times X^{-1}(B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A} \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}.
$$

Definitionsgemäß gilt außerdem

$$
V_1^{-1}(A) \cap V_2^{-1}(B) = V^{-1}(A \times \mathbb{R}) \cap V^{-1}(\mathbb{R} \times B) = X^{-1}(A) \times X^{-1}(B).
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}(V_1^{-1}(A) \cap V_2^{-1}(B)) &= \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}(X^{-1}(A) \times X^{-1}(B)) \\
&= \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \cdot \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \\
&= \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}(X^{-1}(A) \times \Omega) \cdot \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}(\Omega \times X^{-1}(B)) \\
&= \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}(V_1^{-1}(A)) \cdot \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}(V_2^{-1}(B)).
\end{aligned}
$$

Diese Rechnung zeigt einerseits, dass $V_1 \perp\!\!\!\perp V_2$ und andererseits (man wähle $A = \mathbb{R}$ bzw. $B = \mathbb{R}$), dass $V_1 \sim X$, $V_2 \sim X$.

(b) Es gilt für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}(\bar{X} \in B) &= \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}\{(\omega, \omega') : X(\omega) - X(\omega') \in B\} \\
&= \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}\{(\omega', \omega) : X(\omega') - X(\omega) \in B\} \\
&\qquad \text{Umbenennen der Variablen } \omega \leftrightarrow \omega' \\
&= \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}\{(\omega', \omega) : -(X(\omega) - X(\omega')) \in B\} \\
&= \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}\{(\omega, \omega') : -(X(\omega) - X(\omega')) \in B\} \qquad \text{Fubini} \\
&= \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}(-\bar{X} \in B)
\end{aligned}
$$

und es folgt $\bar{X} \sim -\bar{X}$.

(c) Mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ bezeichnen wir den Erwartungswert bezüglich des Maßes $\mathbb{Q}$. Weil $V_i \sim X$, folgt $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|X|^p) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}}(|V_i|^p)$ und wir sehen sofort

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}}\left(|\bar{X}|^p\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}}\left(|V_1 - V_2|^p\right) \leqslant \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}}\left(2^{p-1}(|V_1|^p + |V_2|^p)\right)\\ &= 2^p\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}}\left(|V_1|^p\right) = 2^p\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(|X|^p\right).\end{aligned}$$

(d) Es seien X_i, $i \in I$, unabhängige ZV und mit X_i', $i \in I$, bezeichnen wir eine Familie von ZV mit folgenden Eigenschaften:

$$(X_i)_i \perp\!\!\!\perp (X_i')_i \quad \text{und} \quad X_i' \text{ unabhängig} \quad \text{und} \quad \forall i : X_i \sim X_i'.$$

Dann zeigt das Blockbildungslemma (Korollar 6.8), dass die ZV $\big((X_i, X_i')\big)_i$ und daher die $(X_i - X_i')_i$ unabhängig sind.

Wir können das auch mit einer direkten Rechnung zeigen. Dazu reicht es, auf Grund der Definition der Unabhängigkeit einer Familie, I als endlich anzunehmen. Für beliebige Borelmengen $A_i, B_i \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}\left(\bigcap_i \{(X_i, X_i') \in A_i \times B_i\}\right) &= \mathbb{P}\otimes\mathbb{P}\left(\bigcap_i \{X_i \in A_i\} \times \bigcap_k \{X_k' \in B_k\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_i \{X_i \in A_i\}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\bigcap_k \{X_k' \in B_k\}\right)\\ &\underset{X_i' \text{ unabh.}}{\overset{X_i \text{ unabh.}}{=}} \prod_i \mathbb{P}(X_i \in A_i)\prod_k \mathbb{P}(X_k' \in B_k)\\ &= \prod_i \mathbb{P}\otimes\mathbb{P}(\{X_i \in A_i\} \times \{X_i' \in B_i\})\\ &= \prod_i \mathbb{P}\otimes\mathbb{P}((X_i, X_i') \in A_i \times B_i).\end{aligned}$$

Das zeigt die Unabhängigkeit der Vektoren (X_i, X_i'), $i \in I$, und als messbare Funktionen sind die $X_i - X_i'$, $i \in I$, auch wieder unabhängig. ■■

7 Charakteristische Funktionen

Aufgabe 7.1. Lösung: Bemerkung: Wir bemerken zunächst eine Eigenschaft dieser Verteilungen: Wenn wir zwei unabhängige ZV X, Y, die

- normalverteilt (mit jeweils beliebigen Parametern)
- gammaverteilt (mit gleichem zweiten Parameter)
- Binomialverteilt (mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit)
- Poissonverteilt (mit beliebigen Parametern)

addieren, kommt wieder derselbe Typ von Verteilung heraus. Daher können wir uns die Parameter der Summe aus der Bedeutung erschließen: z.B. addieren sich die Erwartungswerte und die Varianzen, d.h. die neuen Parameter $\mu + m$ und $\sigma^2 + s^2$ bei der Normalverteilung sind klar *wenn wir bereits wissen, dass der Grundtyp der Verteilung erhalten bleibt.*

Die Form der charakteristischen Funktionen entnehmen wir den Tabelle auf S. 222*ff.* des Buchs [Schilling-WT].

Normalverteilung. Für $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt $\mathbb{E}e^{i\xi X} = \exp\left[i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2\right]$. Wenn $Y \sim \mathsf{N}(m, s^2)$, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{i\xi(X+Y)} = \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{i\xi Y} &= \exp\left[i\mu\xi - \sigma^2\xi^2/2\right]\exp\left[im\xi - s^2\xi^2/2\right] \\ &= \exp\left[i(\mu+m)\xi - (\sigma^2+s^2)\xi^2/2\right]\end{aligned}$$

also $X + Y \sim \mathsf{N}(\mu + m, \sigma^2 + s^2)$.

Gammaverteilung. Für $X \sim \Gamma_{\alpha,\beta}$ gilt $\mathbb{E}e^{i\xi X} = (1 - i\xi\beta)^{-\alpha}$. Wenn $Y \sim \Gamma_{A,\beta}$, dann gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi(X+Y)} = \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{i\xi Y} = (1 - i\xi\beta)^{-\alpha}(1 - i\xi\beta)^{-A} = (1 - i\xi\beta)^{-(\alpha+A)}$$

und es folgt $X + Y \sim \Gamma_{\alpha+A,\beta}$.

Binomialverteilung. Für $X \sim \mathsf{B}(m, p)$ gilt $\mathbb{E}e^{i\xi X} = (q + pe^{i\xi})^m$. Wenn $X \sim \mathsf{B}(n, p)$, dann ist

$$\mathbb{E}e^{i\xi(X+Y)} = \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{i\xi Y} = (q + pe^{i\xi})^m(q + pe^{i\xi})^n = (q + pe^{i\xi})^{m+n},$$

d.h. $X + Y \sim \mathsf{B}(m + n, p)$.

Poissonverteilung. Für $X \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$ gilt $\mathbb{E}e^{i\xi X} = \exp\left[-\lambda(1 - e^{i\xi})\right]$. Wenn $Y \sim \mathsf{Poi}(\mu)$, dann gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi(X+Y)} = \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{i\xi Y} = \exp\left[-\lambda(1 - e^{i\xi})\right]\exp\left[-\mu(1 - e^{i\xi})\right] = \exp\left[-(\lambda + \mu)(1 - e^{i\xi})\right]$$

und es folgt $X + Y \sim \mathsf{Poi}(\lambda + \mu)$.

Aufgabe 7.2. Lösung: Erwartungswert: Es gilt

$$\mathbb{E}|X| = \frac{1}{C}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n}{2n^2\log n} = \frac{1}{C}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$$

und diese Reihe divergiert. Das macht man sich am einfachsten mit dem Integralvergleichskriterium klar:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n} \approx \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\log x} = \log(\log x)\big|_2^{\infty} = \infty.$$

Charakteristische Funktion: Es gilt

$$\phi_X(\xi) = \frac{1}{C}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n^2\log n}\left(e^{in\xi} + e^{-in\xi}\right) = \frac{1}{C}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\xi}{n^2\log n}.$$

Wir differenzieren diese Reihe gliedweise

$$\phi_X'(\xi) = \frac{1}{C}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-n\sin n\xi}{n^2\log n} = -\frac{1}{C}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n\xi}{n^2\log n}$$

und weil die formal differenzierte Reihe gleichmäßig konvergiert (Hinweis!), ist sie auch die Ableitung von ϕ_X, vgl. [7], Satz 7.17.

Wir haben also ein Beispiel gefunden, wo $\mathbb{E}|X| = \infty$ (d.h. der Erwartungswert existiert nicht), aber ϕ_X ist bei Null diff'bar und es gilt $\phi_X'(0) = 0$ (was dem Hauptwert von $\mathbb{E}X$ entspräche...).

Bemerkung: Das im Hinweis angegebene Konvergenzkriterium für die Reihe $\sum_n a_n \sin(nx)$ mit monoton fallenden Gliedern $a_n \downarrow$ geht zurück auf T.W. Chaundy & A.E. Jollife: The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series. *Proceedings of the London Mathematical Society* **15** (1916/17) 215–216.

Aufgabe 7.3. Lösung: Für eine Cauchyverteilte ZV X gilt $\mathbb{E}e^{i\xi X} = e^{-|\xi|}$. Wenn X, Y iid Cauchy-ZV sind, dann gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi(X+Y)} = \mathbb{E}e^{i\xi X}e^{i\xi Y} = \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{i\xi Y} = \left(\mathbb{E}e^{i\xi X}\right)^2 = e^{-2|\xi|} = \mathbb{E}e^{i\xi(2X)}$$

und somit $X + Y \sim 2X$.

Weiter haben wir

$$\phi_V(\xi,\xi) = \mathbb{E}e^{i\langle V,(\xi,\xi)^\top\rangle} = \mathbb{E}e^{i\langle (X,X)^\top,(\xi,\xi)^\top\rangle} = \mathbb{E}e^{i2\xi X} = e^{-2|\xi|} = \phi_X(\xi)\phi_X(\xi).$$

Weil X nicht von sich selbst unabhängig ist, muß $\phi_V(\xi,\eta) = \phi_{(X,X)}(\xi,\eta) \neq \phi_X(\xi)\phi_X(\eta)$ gelten.

Aufgabe 7.4. Lösung: Wir schreiben $A := \{|Y| \leqslant a\}$ und $A^c = \{|Y| > a\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} e^{i\xi Z} &= e^{i\xi Y \mathbb{1}_A} e^{-i\xi Y \mathbb{1}_{A^c}} \\ &= \left(e^{i\xi Y} \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}\right)\left(e^{-i\xi Y} \mathbb{1}_{A^c} + \mathbb{1}_A\right) \\ &= e^{i\xi Y} \mathbb{1}_A + e^{-i\xi Y} \mathbb{1}_{A^c} \end{aligned}$$

und wenn wir zum Erwartungswert übergehen und die Definition von A verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{i\xi Z} &= \mathbb{E}\left[e^{i\xi Y} \mathbb{1}_{\{|Y| \leqslant a\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-i\xi Y} \mathbb{1}_{\{|Y| > a\}}\right] \\ &\overset{Y \sim -Y}{=} \mathbb{E}\left[e^{i\xi Y} \mathbb{1}_{\{|Y| \leqslant a\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-i\xi (-Y)} \mathbb{1}_{\{|-Y| > a\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{i\xi Y} \mathbb{1}_{\{|Y| \leqslant a\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{i\xi Y} \mathbb{1}_{\{|Y| > a\}}\right] \\ &= \mathbb{E}e^{i\xi Y} \end{aligned}$$

und wir sehen, dass $Y \sim Z$ also $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$ gilt.

Andererseits ist

$$Y + Z = (Y\mathbb{1}_A + Y\mathbb{1}_{A^c}) + (Y\mathbb{1}_A - Y\mathbb{1}_{A^c}) = 2Y\mathbb{1}_A$$

und daher hat $Y + Z$ beschränkten Wertevorrat $[-2a, 2a]$, kann also nicht normal sein.

Weil $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}Z = 0$, gilt

$$\operatorname{Cov}(Y, Z) = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}\left[Y(Y\mathbb{1}_A - Y\mathbb{1}_{A^c})\right] = \mathbb{E}\left[Y^2\mathbb{1}_A - Y^2\mathbb{1}_{A^c}\right]$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(Y, Z) = 0 &\iff \mathbb{E}\left[Y^2\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[Y^2\mathbb{1}_{A^c}\right] \\ &\iff \mathbb{E}\left[Y^2\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}\left[Y^2\mathbb{1}_A\right] = 1 - \mathbb{E}\left[Y^2\mathbb{1}_A\right] \\ &\iff \mathbb{E}\left[Y^2\mathbb{1}_A\right] = \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} y^2 e^{-y^2/2}\, dy = \frac{1}{2} \\ &\iff \int_0^a y^2 e^{-y^2/2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Wir können numerisch nach a auflösen und erhalten $\approx 1.5381\ldots$[1].

Bemerkung. Weil $\mathbb{P}(Y > a, Z > a) = 0 \neq \mathbb{P}(Y > a)\mathbb{P}(Z > a)$ sind X und Y unkorreliert aber nicht unabhängig.

■■

Aufgabe 7.5. Lösung:

(a) Weil $X \perp\!\!\!\perp Y$ gilt, können wir Korollar 5.9 verwenden, und wir erhalten

$$\phi_{XY}(\xi) = \mathbb{E}e^{i\xi XY} = \int \mathbb{E}e^{i(\xi y)X}\, \mathbb{P}(Y \in dy) = \int \phi_X(y\xi)\, \mathbb{P}(Y \in dy).$$

[1] Ich danke Herrn Dr. Böttcher, TU Dresden, für die Berechnung dieser Zahl.

(b) Nun seien X, Y, U, V iid standard-normalverteilt. Dann gilt wegen $\phi_X(\xi) = e^{-\xi^2/2}$ und $Y \sim (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ nach Teil (a) gilt…

- …für XY

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{i\xi XY} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2\xi^2} (2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2}\, dy \\ &\overset{x^2=(1+\xi^2)y^2}{=} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{1+\xi^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}. \end{aligned}$$

- …für $XY + UV$, weil $XY \perp\!\!\!\perp UV$ und $XY \sim UV$

$$\mathbb{E}e^{i\xi(XY+UV)} = \mathbb{E}e^{i\xi XY}\mathbb{E}e^{i\xi UV} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

  Damit hat $XY + UV$ eine zweiseitige Exponentialverteilung mit Varianz 1 und Mittelwert 0 (vgl. Eintrag Nr. 14, S. 224 in der Verteilungstabelle in [Schilling-WT]).

- …für $|XY + UV|$. Wir verwenden das Resultat aus dem vorigen Teil, wonach $XY + UV \sim \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Damit finden wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{i\xi|XY+UV|} &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi|x|} \mathbb{P}(XY + UV \in dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi|x|} e^{-|x|}\, dx \\ &= \int_0^\infty e^{ix\xi} e^{-x}\, dx \\ &= \frac{1}{1-i\xi}. \end{aligned}$$

  Damit hat $|XY + UV|$ eine Exponentialverteilung mit Parameter 1 (vgl. Eintrag Nr. 13, S. 224 in der Verteilungstabelle in [Schilling-WT]).

■■

Aufgabe 7.6. Lösung: Die Richtung „⇒“ folgt sofort aus der Tatsache, dass $X \perp\!\!\!\perp A \iff X \perp\!\!\!\perp \mathbb{1}_A$ gilt und Korollar 5.10.

Die Umkehrung „⇐“ verwendet Korollar 7.9. Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{E}e^{i\xi X + \eta \mathbb{1}_A} = \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{i\eta \mathbb{1}_A}$ für alle ξ, η gilt. Wir beachten, dass

$$e^{i\eta \mathbb{1}_A} = e^{i\eta}\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}$$

gilt. Wenn wir die Voraussetzung verwenden, dann sehen wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{i\xi X + i\eta \mathbb{1}_A} &= \mathbb{E}\left[e^{i\xi X} e^{i\eta \mathbb{1}_A}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\left(e^{i\eta}\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}\right)\right] \\ &= e^{i\eta}\mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\mathbb{1}_A\right] + \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}(1 - \mathbb{1}_A)\right] \\ &= e^{i\eta}\mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right]\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right] - \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right]\mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right]\left(e^{i\eta}\mathbb{P}(A) + 1 - \mathbb{P}(A)\right)\\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right]\mathbb{E}\left[e^{i\eta}\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A_c}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right]\mathbb{E}\left[e^{i\eta \mathbb{1}_A}\right].
\end{aligned}
$$

■■

Aufgabe 7.7. Lösung: Weil die ZV beschränkt sind, existieren alle Momente. Daher ist die Richtung „⇒" unmittelbar aus Korollar 5.10 abzulesen.

Umgekehrt gelte $\forall k, l \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{E}(X^k Y^l) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^l)$. Indem wir $e^{i\xi X}$ in eine gleichmäßig konvergente Potenzreihe entwickeln (hier geht die Beschränktheit der ZV wiederum ein!) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\xi X + i\eta Y}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{i\xi X} e^{i\eta Y}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\xi)^k X^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(i\eta)^l Y^l}{l!}\right)\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(i\xi)^k}{k!}\frac{(i\eta)^l}{l!}\mathbb{E}\left[X^k Y^l\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(i\xi)^k}{k!}\frac{(i\eta)^l}{l!}\mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{(i\xi)^k X^k}{k!}\right]\mathbb{E}\left[\frac{(i\eta)^l Y^l}{l!}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\xi)^k X^k}{k!}\right]\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(i\eta)^l Y^l}{l!}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\xi X}\right]\mathbb{E}\left[e^{i\eta Y}\right].
\end{aligned}
$$

Die Unabhängigkeit folgt somit aus Korollar 7.9.

Die zitierte Arbeit von Bisgaard und Sasvari zeigt, dass die Analytizität der charakteristischen Funktionen für die Gültigkeit der Aussage wesentlich ist. Hier wird diese durch die Beschränktheit der ZV X, Y gewährleistet.

■■

Aufgabe 7.8. Lösung: Weil die charakteristische Funktion $e^{-\xi^2/2}$ beliebig oft differenzierbar ist, garantiert Satz 7.6.h), g) die Existenz aller Momente.

Es gilt $\mathbb{E}G^{2n} = i^{-2n}\partial^{2n}e^{-\xi^2/2}\big|_{\xi=0}$. Wir wollen rekursiv vorgehen:

$\mathbb{E}G^0 = \mathbb{E}G^2 = 1$. Für $\mathbb{E}G^{2n+2}$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}G^{2n+2} &= i^{-2n-2}\partial^{2n}\partial^2 e^{-\xi^2/2}\Big|_{\xi=0}\\
&= i^{-2n-2}\partial^{2n}\left[(\xi^2-1)e^{-\xi^2/2}\right]\Big|_{\xi=0}\\
&= i^{-2n-2}\left[\partial^{2n}\left(\xi^2 e^{-\xi^2/2}\right) - \partial^{2n}e^{-\xi^2/2}\right]\Big|_{\xi=0}\\
&= i^{-2n-2}\left[\binom{2n}{0}\xi^2\partial^{2n}e^{-\xi^2/2} + \binom{2n}{1}2\xi\partial^{2n-1}e^{-\xi^2/2} + \binom{2n}{2}2\partial^{2n-2}e^{-\xi^2/2} - \partial^{2n}e^{-\xi^2/2}\right]\Big|_{\xi=0}
\end{aligned}
$$

wobei wir die Leibnizsche Produktformel für Ableitungen im letzten Schritt verwenden

$$
\begin{aligned}
&= i^{-2n-2}\left[2\binom{2n}{2}\partial^{2n-2}e^{-\xi^2/2} - \partial^{2n}e^{-\xi^2/2}\right]\Big|_{\xi=0}\\
&= \mathbb{E}G^{2n} + 2\binom{2n}{2}\mathbb{E}G^{2n-2}\\
&= \mathbb{E}G^{2n} + 2n(2n-1)\mathbb{E}G^{2n-2}.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformel zeigt man sehr schnell die Gültigkeit der Formel für $\mathbb{E}G^{2n}$.

Bemerkung 1: Tatsächlich ist eine direkte Berechung der Momente einfacher:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}G^{2n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^{2n}e^{-x^2/2}\,dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2n+1}\partial_x x^{2n+1}e^{-x^2/2}\,dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}(-1)\partial_x e^{-x^2/2}\,dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}xe^{-x^2/2}\,dx\\
&= \frac{1}{2n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^{2n+2}e^{-x^2/2}\,dx\\
&= \frac{1}{2n+1}\mathbb{E}G^{2n+2}
\end{aligned}
$$

also $\mathbb{E}G^{2n+2} = (2n+1)\mathbb{E}G^{2n}$ usw.

Bemerkung 2: Man könnte auch auf die Idee kommen, $\partial^n e^{-\xi^2}$ für alle ξ auszurechnen. Das geht in der Tat und führt zu Ausdrücken der Art $(-1)^n H_n(\xi)e^{-\xi^2}$ wobei die $H_n(\xi)$ die Hermite-Polynome sind. Man erhält (analog zu den Rechnungen oben) folgende Rekursionsformeln

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}H_n(x) &= 2nH_{n-1}(x)\\
H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

und es gilt folgende ,,geschlossene" Darstellung:

$$
H_n(x) = 2^n x^n - 2^{n-1}\binom{n}{2}x^{m-2} + 2^{n-2}\cdot 1\cdot 3\cdot\binom{n}{4}x^{n-4} - 2^{n-3}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\binom{n}{6}x^{n-6} + - \cdots
$$

Aufgabe 7.9. Lösung: Die Existenz beliebiger exponentieller Momente folgt aus der folgenden Rechnung (die immer nur positive Integranden hat, d.h. es reicht der Nachweis, dass der resultierende Ausdruck endlich ist – was offenbar der Fall ist): Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x}e^{-x^2/2}\,dx &= e^{\lambda^2/2}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda^2-2\lambda x+x^2)/2}\,dx\\
&= e^{\lambda^2/2}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda-x)^2/2}\,dx
\end{aligned}
$$

$$= e^{\lambda^2/2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \, dy$$
$$= e^{\lambda^2/2}.$$

Nun ersetzen wir λ durch $\zeta = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\zeta x} e^{-x^2/2} \, dx \right| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{\zeta x} \right| e^{-x^2/2} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\operatorname{Re} \zeta x} e^{-x^2/2} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} e^{-x^2/2} \, dx \\ &= e^{\lambda^2/2} < \infty \end{aligned}$$

und das zeigt, dass wir $\phi_X(-i\zeta)$ für beliebige $\zeta \in \mathbb{C}$ definieren können und dass diese Funktion eine Fortsetzung der charakteristischen Funktion darstellt, da die charakteristische Funktion reell-analytisch auf $\mathbb{R}$ ist. Die Eindeutigkeit zeigt auch, dass $\phi_X(-i\zeta) = e^{\zeta^2/2}$ oder $\phi_X(\zeta) = e^{-\zeta^2/2}$ ist, d.h. Holomorphie ist offensichtlich.

■■

Aufgabe 7.10. Lösung: $\phi_X = \operatorname{Re} \Phi_X$ sagt wegen der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion und Satz 7.6.d), dass $X \sim \epsilon X$. Nun ist aber $\epsilon X \sim (-\epsilon) X = -(\epsilon X)$, d.h. X ist symmetrisch. Die Umkehrung ist trivial.

■■

Aufgabe 7.11. Lösung: Wir haben

$$\phi_{X_1, X_2, \dots, X_d}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = \mathbb{E} e^{i \langle (X_1, X_2, \dots, X_d)^\top, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)^\top \rangle} = \mathbb{E} e^{i(\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \dots + \xi_d X_d)}.$$

(a) Aus unserer Vorüberlegung erhalten wir

$$\phi_{X_1, \dots, X_d}(\eta, 0, \dots, 0) = \mathbb{E} e^{i(\eta X_1 + 0 \cdot X_2 + \dots + 0 \cdot X_d)} = \mathbb{E} e^{i \eta X_1} = \phi_{X_1}(\eta).$$

(b) Aus unserer Vorüberlegung erhalten wir

$$\phi_{X_1, \dots, X_d}(\eta, \eta, \dots, \eta) = \mathbb{E} e^{i(\eta X_1 + \eta X_2 + \dots + \eta X_d)} = \mathbb{E} e^{i \eta (X_1 + X_2 + \dots + X_d)} = \phi_{X_1 + X_2 + \dots + X_d}(\eta).$$

■■

Aufgabe 7.12. Lösung: (ohne Verwendung der Umkehrformel für die Fourier-Transformation) Wir konstruieren unabhängige, normalverteilte ZV $G_k \sim \mathsf{N}(0, t)$, $k = 1, \dots, d$, die zudem von X unabhängig sind; insbesondere ist $G := (G_1, \dots, G_d)^\top$ unabhängig von X und (7.5) zeigt

$$\mathbb{E}\, e^{i \langle \xi, tG \rangle} = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{E}\, e^{i t \xi_k G_k} = \prod_{k=1}^{d} e^{-t \xi^2/2} = e^{-t|\xi|^2/2}$$

mit der Euklidischen Norm $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2$. Für alle $u \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ gilt

$$\mathbb{E} u(X + \sqrt{t} G) \underset{(7.5)}{\overset{5.9}{=}} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} u(X + y) e^{-|y|^2/2t} (2\pi t)^{-d/2} \, dy = \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\, \mathbb{E}\, e^{-|X-z|^2/2t} (2\pi t)^{-d/2} \, dz.$$

Wenn wir die Formel (7.6) für $x \rightsquigarrow \eta$, $\xi \rightsquigarrow X - z$ verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}u(X+\sqrt{t}G) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} u(z)\,\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle\eta,\,X-z\rangle} e^{-t|\eta|^2/2}\,d\eta\,dz\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} u(z)\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\,e^{-i\langle\eta,\,X\rangle}\,e^{i\langle\eta,\,z\rangle}\,e^{-t|\eta|^2/2}\,d\eta\,dz\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} u(z)\int_{\mathbb{R}^d} \phi_X(-\eta)\,e^{i\langle\eta,\,z\rangle}\,e^{-t|\eta|^2/2}\,d\eta\,dz.\end{aligned}$$

Da ϕ_X beschränkt ist, ist der Integrand $d\eta\otimes dz$-integrierbar, und wir können Fubini anwenden. Damit sehen wir

$$\mathbb{E}u(X+\sqrt{t}G) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{u}(-\eta)\,\phi_X(-\eta)e^{-t|\eta|^2/2}\,d\eta = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{u}(\xi)\,\phi_X(\xi)e^{-t|\xi|^2/2}\,d\xi.$$

Weil $\widehat{u}$ integrierbar ist, können wir dominierte Konvergenz verwenden und wir erhalten für $t\to 0$ die behauptete Gleichheit.

Ein eleganterer (aber nicht so elementarer) Beweis findet sich in [Schilling-MI], Satz 22.12, S. 126.

■■

Aufgabe 7.13. Lösung:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha e^{i\langle x,\,\xi\rangle} &= \partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n} e^{i\sum x_k\xi_k}\\ &= \partial_{x_1}^{\alpha_1}e^{ix_1\xi_1}\cdot\ldots\cdot\partial_{x_n}^{\alpha_n}e^{ix_n\xi_n}\\ &= i^{\alpha_1}\xi_1^{\alpha_1}e^{ix_1\xi_1}\cdot\ldots\cdot i^{\alpha_n}\xi_n^{\alpha_n}e^{ix_n\xi_n}\\ &= (i\xi)^\alpha e^{i\langle x,\,\xi\rangle}.\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}|x^\alpha| &= |x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}|\\ &= |x_1^{\alpha_1}|\cdot\ldots\cdot|x_n^{\alpha_n}|\\ &= |x_1|^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot|x_n|^{\alpha_n}\\ &\leqslant |x|^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot|x|^{\alpha_n}\\ &= |x|^{\|\alpha\|}.\end{aligned}$$

(c) Beachte den Tippfehler in der Angabe: $(sx)^{\|\alpha\|}\to(sx)^\alpha$. Es gilt:

$$\begin{aligned}s^{\|\alpha\|}x^\alpha &= s^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}\\ &= (sx_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(sx_n)^{\alpha_n}\\ &= (sx)^\alpha.\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 7.14. Lösung: Vgl. auch [Schilling-MI], Beispiel 16.5, S. 84. Wir folgen dem Hinweis und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi &= \int_0^R \int_0^\infty e^{-t\xi}\,\sin\xi\,dt\,d\xi \\
&= \int_0^\infty \int_0^R e^{-t\xi}\,\sin\xi\,d\xi\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^R e^{-t\xi}\,\operatorname{Im} e^{i\xi}\,d\xi\,dt \\
&= \int_0^\infty \operatorname{Im} \int_0^R e^{-t\xi}\,e^{i\xi}\,d\xi\,dt \\
&= \int_0^\infty \operatorname{Im} \int_0^R e^{-(t-i)\xi}\,d\xi\,dt \\
&= \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{-(t-i)\xi}}{i-t}\right]_0^R d\xi\,dt \\
&= \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{e^{(i-t)R}-1}{i-t}\,dt \\
&= \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{(e^{(i-t)R}-1)(-i-t)}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{-te^{-tR}\sin R - e^{-tR}\cos R + 1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{-te^{-tR}\sin R}{1+t^2}\,dt + \int_0^\infty \frac{-e^{-tR}\cos R+1}{1+t^2}\,dt \\
&\overset{s=tR}{=} \int_0^\infty \frac{-se^{-s}\sin R}{R^2+s^2}\,ds + \int_0^\infty \frac{-e^{-tR}\cos R+1}{1+t^2}\,dt \\
&\xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \arctan t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 7.15. Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^T \frac{e^{i\xi(x-a)}-e^{i\xi(x-b)}}{i\xi}\,d\xi \\
&= \int_{-T}^0 \frac{e^{i\xi(x-a)}-e^{i\xi(x-b)}}{i\xi}\,d\xi + \int_0^T \frac{e^{i\xi(x-a)}-e^{i\xi(x-b)}}{i\xi}\,d\xi \\
&= -\int_0^{-T} \frac{e^{i\xi(x-a)}-e^{i\xi(x-b)}}{i\xi}\,d\xi + \int_0^T \frac{e^{i\xi(x-a)}-e^{i\xi(x-b)}}{i\xi}\,d\xi \\
&= \int_0^T \frac{-e^{-i\xi(x-a)}+e^{-i\xi(x-b)}}{i\xi}\,d\xi + \int_0^T \frac{e^{i\xi(x-a)}-e^{i\xi(x-b)}}{i\xi}\,d\xi \\
&= 2\int_0^T \frac{\sin(\xi(x-a))}{\xi}\,d\xi - 2\int_0^T \frac{\sin(\xi(x-b))}{\xi}\,d\xi.
\end{aligned}$$

(b) Mit dem Hinweis gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^T \left|\frac{e^{i\xi(x-a)}-e^{i\xi(x-b)}}{i\xi}\right| d\xi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^T (b-a)\,d\xi = \frac{(b-a)T}{\pi}.$$

(c) Fubini ist wegen (b) anwendbar:

$$\frac{1}{2\pi}\int\int_{-T}^{T}\frac{e^{i\xi(x-a)}-e^{i\xi(x-b)}}{i\xi}\,d\xi\,\mu(dx)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ia\xi}-e^{-ib\xi}}{i\xi}\int e^{ix\xi}\,\mu(dx)\,d\xi.$$

(d) $$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{\sin(\xi(x-a))}{\xi}\,d\xi=\begin{cases}0 & \text{für } x=a\\ \lim_{T\to\infty}\int_0^{T(x-a)}\frac{\sin\eta}{\eta}\,d\eta & =\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{für } x>a\\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x<a\end{cases}\end{cases}$$

Da $a<b$ folgt mit Teil (a) durch Zusammensetzen die Behauptung.

(e)

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}&\frac{e^{-ia\xi}-e^{-ib\xi}}{i\xi}\,\hat\mu(\xi)\,d\xi\\ &\overset{(c)}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\int_{-T}^{T}\frac{e^{i\xi(x-a)}-e^{i\xi(x-b)}}{i\xi}\,d\xi\,\mu(dx)\\ &\overset{(\star)}{=}\int\left[\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{a\}}+\mathbb{1}_{(a,b)}+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{b\}}\right]d\mu\\ &=\tfrac{1}{2}\mu\{a\}+\mu(a,b)+\tfrac{1}{2}\mu\{b\}.\end{aligned}$$

Im mit $(\star)$ gekennzeichneten Schritt wird dominierte Konvergenz angewendet. Die Majorante erhält man mit (a) und der Tatsache, dass die Funktion

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$$

eine stetige beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^+$ ist.

---

8 Drei klassische Grenzwertsätze

Aufgabe 8.1. Lösung: Wegen der Unabhängigkeit der zwei Zufallsvariablen gilt:

$$\mathbb{P}_{X,Y}((n,k)) = \mathbb{P}(X = n, Y = k) = \mathbb{P}(X = n) \cdot \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}.$$

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis ,,Mannschaft 1 gewinnt“:

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbb{P}_{X,Y}((n,k)) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

und das Ereignis ,,Mannschaft 2 gewinnt“ ist analog zu behandeln, lediglich μ und λ tauschen die Rollen.

Zum Unentschieden:

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2}.$$

Bemerkung. Dieses sehr simple Modell (evtl. mit einigen kleineren Variationen) wurde u.a. für die Voraussage (mit Hilfe von Simulation) zu den letzten Fußball-WMs herangezogen. Recht effektiv übrigens...

Aufgabe 8.2. Lösung:

(a) Es gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1-x} = -1.$$

Da $\lim_{n\to\infty} a_n/n = 0$ gilt, folgt

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 - \frac{a_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} \ln\left(1 - \frac{a_n}{n}\right) = -a,$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\left\{n \ln\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)\right\} = e^{-\lim_{n\to\infty} a_n} = e^{-a}.$$

(b) Sei $\lambda_n := np(n)$; nach Voraussetzung gilt $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Wir wählen $k \in \mathbb{N}_0$ so dass $n \geq k$.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k}\end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} e^{\lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\lambda_n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = 1$$

für festes k, folgt die Behauptung.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} p^n q^n &= \frac{(2n)! p^n q^n}{n!n!} \\
&\overset{\text{Stirling}}{=} \frac{\sqrt{2\pi(2n)} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}} p^n q^n}{\left(\sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\pi n}\, 2^{2n} p^n q^n n^{2n} e^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^2 e^{2n} n^{2n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4pq)^n \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

da $4pq = 4p(1-p) \leqslant 1$, $p \in (0,1)$.

Interpretation: Teil (c) besagt, dass $\mathbb{P}(S_{2n} = n) \to 0$, wenn $S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} X_i$ die Summe von iid Bernoulli-ZV ist. Nun ist $\mathbb{P}(S_{2n} = n)$ sogar maximal (es ist die „Mitte“ des Histogramms), und trotzdem konverigert diese Einzelwahrscheinlichkeit gegen Null. Der CLT macht nur Aussagen über Bereiche $\mathbb{P}((S_{2n} - \mathbb{E}S_{2n})/\sigma^2\sqrt{n} \in (a,b))$ und vermeidet damit Einzelwahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 8.3. Lösung:

(a) S_{2n} muß gerade sein.

(b) Der Betrunkene muß genau n Schritte nach Norden und n nach Süden machen. Daher

$$P(S_{2n} = n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Die Asymptotik wurde bereits in Aufgabe 8.2 ausgerechnet:

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} &= \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} \\
&\overset{\text{Stirling}}{=} \frac{\sqrt{2\pi(2n)} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}{\left(\sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}\right)^2 2^{2n}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\pi n}\, 2^{2n} n^{2n} e^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^2 e^{2n} n^{2n} 2^{2n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

(c) Beachte, dass $\mathbb{V}S_{100} = 100$ ist, d.h. mit dem CLT ist

$$\mathbb{P}(S_{100} \in [-10, 10]) = \mathbb{P}(S_{100}/\sqrt{100} \in [-1, 1]) \approx \Phi(1) - \Phi(-1)$$
$$= 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826.$$

(d) Wie oben sehen wir

$$\begin{aligned} P(S_{100} \in [-a, a]) &= P\left(\frac{S_{100}}{\sqrt{100}} \in [-a/10, a/10]\right) \\ &\approx \Phi(a/10) - \Phi(-a/10) \\ &= 2\Phi(a/10) - 1 \overset{!}{=} 0.95. \end{aligned}$$

Also $\Phi(a/10) = 0.975$, d.h. $a/10 = z_{0.975} = 1.96$ und somit $a = 19.6$.

(e) (Tippfehler in der Angabe: $[n - 10, n + 10] \to [-10, 10]$) Analog zu (d) und (e) gilt

$$P\left(S_{2n} \in [-a, +a]\right) = P\left(\frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} \in \left[-a/\sqrt{2n},\ a/\sqrt{2n}\right]\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2n}}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{2n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2n}}\right) - 1 \overset{!}{\leq} 0.1.$$

Wir erhalten $\Phi\left(a/\sqrt{2n}\right) \overset{!}{\leq} 0.55$, d.h. $a/\sqrt{2n} = z_{0.55} = 0.126$ und somit $\sqrt{2n} = a/z_{0.55}$, also $n \geqslant \frac{1}{2}(a/z_{0.55})^2 = 3150$ (für $a = 10$).

Aufgabe 8.4. Lösung: Wir schreiben $Y_i = 1$, wenn die Bank im i-ten Spiel gewinnt (und der Spieler verliert), sonst schreiben wir $Y_i = -1$. Aus Sicht der Bank ergibt sich für jedes einzelne Spiel:

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{19}{37}, \qquad \mathbb{P}(Y_i = -1) = \frac{18}{37}.$$

Wir wenden den CLT an: Da wir die Formeln für den CLT v.a. für Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen hergeleitet haben, führen wir obige Verteilung auf eine solche zurück. Das machen wir folgendermaßen: Sei $X_i, i \in \mathbb{N}$ Bernoulli-verteilt mit $p = 19/37$, dann ist

$$X_i := \frac{1}{2}(Y_i + 1) \quad \text{Bernoulli-verteilt mit } p = 19/37.$$

Damit ist

$$S_n = Y_1 + ... + Y_n = 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j - n$$

und

$$\begin{aligned} 0.5 \quad &\overset{!}{\leqslant} \quad \mathbb{P}(S_n \geqslant 1000) = \mathbb{P}\left(2\sum_{i=1}^{n} X_i - n \geqslant 1000\right) \\ &= \quad \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \frac{1000 + n}{2}\right) \\ &= \quad \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\sigma(\sum_{i=1}^{n} X_i)} \geqslant \frac{500 + \frac{n}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

$$\approx \quad \mathbb{P}\left(Z \geqslant \frac{500 + \frac{n}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

wobei Z standardnormalverteilt ist. Da die Dichte dieser Verteilung achsensymmetrisch und um Null zentriert ist, wird die Wahrscheinlichkeit kleiner als 0.5 , wenn der Ausdruck

$$\frac{500 + \frac{n}{2} - np}{\sqrt{npq}} \leqslant 0$$

ist. D.h. $500 + n(1/2 - 19/37)$ muss negativ sein und das ist der Fall für $n \geqslant 37000$.

■■

Aufgabe 8.5. Lösung: Es sind $n = 200$ Maschinen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.95$ arbeiten. Wir modellieren dies (wie üblich) durch eine Folge Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen $X_i, i \in \{1,..,200\}$. Für die Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ergibt sich: $\mathbb{E}S_n = n \cdot p = 190$ und $\sqrt{\mathbb{V}S_n} = 3.08$. Mit dem CLT erhalten wir

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant 180) \approx \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{3.08}}_{\text{ca. normalvert.}} \geqslant \underbrace{\frac{180 - 190}{3.08}}_{-3.246} \Big) \approx 1$$

Dass sich eine so hohe Wahrscheinlichkeit ergibt liegt daran, dass die Abweichung von $10 \cdot (190 - 180)$ außerhalb des Drei-σ-Intervalls (also dreimal der Standardabweichung) liegt. Malen Sie sich das mal auf! Als Faustregel gilt:

Bei der Normalverteilung $\mathsf{N}(0,1)$ sind

- ca. 68.27% der Masse im Intervall $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ (eine Standardabweichung vom Mittel),
- ca. 95.45% der Masse im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ (zwei Standardabweichungen vom Mittel),
- ca. 99.73% der Masse im Intervall $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ (drei Standardabweichungen vom Mittel).

■■

Aufgabe 8.6. Lösung: Da es sich um ein seltenes Ereignis handelt wenden wir die Poisson-Verteilung an. Kennt man von dieser den Erwartungswert, so kennt man bereits die gesamte Verteilung. Die Zähldichte der Verteilung hängt nur von λ ab und dieses λ ist gerade der Erwartungswert. Um den Erwartungswert zu schätzen berechnen wir die durchschnittliche Anzahl von Briefen pro Tag, die ohne Adresse aufgegeben wurden:

$$\frac{1017}{365} \approx 2.786 = \lambda$$

Sei X die zufällige Anzahl solcher Briefe an einem beliebigen Tag, dann gilt:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} \approx 0.062$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} \approx 0.172$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} \approx 0.239$$

Also erhalten wir, indem wir über das Gegenereignis argumentieren:

$$\mathbb{P}(X > 2) = 0.527$$

und damit sind es circa $365 \cdot 0.527 = 192$ Tage. Das Geburtstagsproblem ist lediglich eine Umformulierung.

9 Konvergenz von Zufallsvariablen

Aufgabe 9.1. Lösung: Das sieht man sofort aus der Definition, die ja nur die Differenz $X_n - X$ betrachtet:

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X &\iff \forall\epsilon : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \\ &\iff \forall\epsilon : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|(X_n - X) - 0| > \epsilon) = 0 \\ &\iff (X_n - X) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \end{aligned}$$

■■

Aufgabe 9.2. Lösung:

(a) Es gilt $\mathbb{E}(|X_n|^p) = \int_{1/n}^1 \omega^{-1}\,d\omega = -\log\frac{1}{n} \to \infty$, d.h. X_n kann nicht in L^p konvergieren, da die Konvergenz von $\mathbb{E}(|X_n|^p) = \|X_n\|_{L^p}^p$ eine notwendige Bedingung ist!

Beachten Sie:

$$|\|X_n\|_{L^p} - \|X\|_{L^p}| \leqslant \|X_n - X\|_{L^p}$$

und wenn X_n in L^p konvergieren würde, dann wäre $X \in L^p$ und daher wäre die Folge $(\|X_n\|_{L^p})_n$ beschränkt — ist sie aber nicht.

Alternative Argumentation: Wenn $X_n \to X$ in L^p, dann müßte der Grenzwert in L^p liegen. Den Grenzwert kriegen wir aber über die Tatsache, dass $X_{n(k)} \to X$ f.s. für eine Teilfolge konvergieren muß: da $X_n(\omega)$ gegen $\omega^{-1/p}$ konvergiert, ist $X(\omega) = \omega^{-1/p}$ der punktweise und der potentielle L^p-limes. Letzteres ist nicht möglich, da $\int_0^1 (\omega^{1/p})^p\,d\omega = \infty$.

(b) Offensichtlich ist $\mathbb{E}|X_{n,k} - 0| = \frac{1}{n} \to 0$ wenn $(n,k) \to \infty$ (lexikographisch), d.h. der L^1-Limes ist $X = 0$. Dieser muß mit dem punktweisen Limes (sollte er existieren) übereinstimmen, da die L^1-Konvergenz die Existenz einer Teilfolge $(X_i')_i \subset (X_{n,k})_{n,k}$ garantiert mit $X_i' \to X = 0$.

Allerdings kann $X_{n,k}(\omega) \to 0$ für kein ω gelten, da wir offensichtlich

$$\limsup_{n,k} X_{n,k}(\omega) = 1 > 0 = \liminf_{n,k} X_{n,k}(\omega) \quad \forall\omega \in [0,1)$$

haben (wähle für den limsup die Teilfolge, wo wir nur die $X_{n,k}$ nehmen, so dass $\omega \in \operatorname{supp} X_{n,k}$ liegt und für den liminf nehmen wir genau die gegenteilige Bedingung $\omega \notin X_{n,k}$. Beachte, dass die Träger der $X_{n,k}$ von links nach rechts durch das Intervall $[0,1)$ wandern, dann die Intervalllänge verkürzen und wieder durchwandern etc. etc.)

(c) Es gilt $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n = 1$, d.h. der L^1-Grenzwert X müßte $\mathbb{E}X = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_n = 1$ erfüllen. Andererseits muß der L^1-Grenzwert mit dem stochastischen Limes übereinstimmen, da wir die Markov-Ungleichung haben:

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leqslant \mathbb{E}|X - X_n|/\epsilon$$

und der stochastische Limes ist $X = 0$. Da $\mathbb{E}X \neq \mathbb{E}0 = 0$, kann keine L^1-Konvergenz vorliegen.

(d) Gleiches Argument wie in (b): die Folge aus (b) konvergiert stochastisch (da sie ja schon in L^1 konvergiert), aber nicht fast sicher.

(e) Das ist im Lehrbuch auf Seite 96 hinreichend gut ausgearbeitet.

■■

Aufgabe 9.3. Lösung:

(a) Wir verwenden die Stetigkeit von Maßen und finden

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \neq Y) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_k \{|X-Y| > \tfrac{1}{k}\}\right)\\
&= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(|X-Y| > \tfrac{1}{k}\right)\\
&= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(|X-X_n+X_n-Y| > \tfrac{1}{k}\right)\\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(|X-X_n|+|X_n-Y| > \tfrac{1}{k}\right)\\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{|X-X_n| > \tfrac{1}{2k}\right\} \cup \left\{|X_n-Y| > \tfrac{1}{2k}\right\}\right)\\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \left[\mathbb{P}\left(|X-X_n| > \tfrac{1}{2k}\right) + \mathbb{P}\left(|X_n-Y| > \tfrac{1}{2k}\right)\right].
\end{aligned}$$

Da X_n stochastisch gegen X bzw. Y konvergiert, finden wir für alle k und $\delta > 0$ ein N, so dass $(\mathbb{P}(|X - X_n| > \frac{1}{2k}) + \mathbb{P}(|X_n - Y| > \frac{1}{2k}) < \delta$. Also folgt $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ und daher $X = Y$ f.s.

(b) Es gilt

$$\mathbb{P}\left(|X_n + Y_n - X - Y| > \epsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \tfrac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|Y_n - Y| > \tfrac{\epsilon}{2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 + 0.$$

(c) „⇒“: Wähle $\epsilon, \delta > 0$ fest. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X_m| > \epsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_n - Z| > \tfrac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|X_m - Z| > \tfrac{\epsilon}{2}\right) \xrightarrow{n,m>N\to\infty} 0 + 0.$$

daher können wir $N = N_\delta$ so groß wählen, dass für alle $n, m \geqslant N_\delta$ gilt $\mathbb{P}\left(|X_n - X_m| > \epsilon\right) \leqslant \delta$.

„⇐“: Entweder Beweis durch Widerspruch oder folgende Konstruktion:

Wähle eine Folge $(\delta_k)_k$ mit $\delta_k > 0$ so, dass $\sum_1^\infty \delta_k < \infty$; rekursiv definieren wir nun N_k so, dass $N_0 = 0$ und

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N_k > N_{k-1}\ \forall m \geqslant N_k\ \ : \mathbb{P}(|X_m - X_{N_k}| > \delta_k) \leqslant \delta_k.$$

Sei $A_k := \{|X_{N_{k+1}} - X_{N_k}| > \delta_k\}$ dann gilt mit Borel-Cantelli

$$\sum \mathbb{P}(A_k) \leqslant \sum \delta_k < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\limsup_k A_k) = 0.$$

Das heißt insbesondere dass für alle $\omega \in A := \limsup_k A_k$ die Reihe $\sum [X_{N_{k+1}}(\omega) - X_{N_k}(\omega)]$ konvergiert (da absolut konvergent) und daher konvergiert $(X_{N_k})_k$ und wir setzen $Z(\omega) := \lim X_{N_k}(\omega)$ für alle $\omega \in A$ und außerhalb (Nullmenge) beliebig. Die Behauptung folgt nun mit

$$\mathbb{P}(|X_n - Z| > \epsilon) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_n - X_{N_k}| > \tfrac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|X_{N_k} - Z| > \tfrac{\epsilon}{2}\right) \to 0.$$

Aufgabe 9.4. Lösung: Für die f.s. Konvergenz ist die Aussage bekannt, da ein Vektor genau dann konvergiert, wenn alle seine Koordinaten konvergieren. Wer den Beweis vergessen haben sollte, kann sich den sehr ähnlichen Beweis in L^p ansehen: $X_n := (X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(d)})$ und o.E. sei $X = 0$.

Für einen Vektor ist die L^p-norm folgendermaßen definiert:

$$\|X_n\|_{L^p} = \int |X_n| \, d\mathbb{P}$$

wobei $|X_n|$ irgendeine Vektornorm in $\mathbb{R}^d$ bezeichnet – üblicherweise nimmt man die ℓ^2-Norm (also die Euklidische Norm). Weil aber in $\mathbb{R}^d$ alle Normen äquivalent sind, können wir o.E. auch die ℓ_1-Norm $|x|_1 = |x^{(1)}| + \dots + |x^{(d)}|$, $x = (x^{(1)}), \dots x^{(d)})$ nehmen. Dann gilt

$$\|X_n\|_{L^p} \leqslant \sum_{i=1}^d \|X_n^{(i)}\|_{L^p} \leqslant \sum_{i=1}^d \|X_n\|_{L^p} = d\|X_n\|_{L^p}$$

wo wir die offensichtliche Abschätzung $|x|_1 = |x^{(1)}| + \dots + |x^{(d)}| \leqslant |x|_1 + \dots + |x|_1$ verwendet haben. Das zeigt dass auch in L^p ein Vektor genau dann konvergiert, wenn die Koordinaten konvergieren.

Wir kommen nun zur $\mathbb{P}$-Konvergenz. Der eben geführte Beweis funktioniert auch hier, wenn wir bereits wissen, dass die $\mathbb{P}$-Konvergenz von einer Metrik kommt. Das zeigen wir aber erst in Aufgabe 9.5. Also gehen wir ganz elementar vor.

„$\Rightarrow$“: Sei $i \in \{1, \dots, d\}$. Dann

$$\mathbb{P}(|X_n^{(i)} - X^{(i)}| > \epsilon) \leqslant \mathbb{P}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d |X_n^{(i)} - X^{(i)}|^2} > \epsilon\right) \to 0.$$

„$\Leftarrow$“:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d |X_n^{(i)} - X^{(i)}|^2} > \epsilon\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\sqrt{d} \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |X_n^{(i)} - X^{(i)}| > \epsilon\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^d |X_n^{(i)} - X^{(i)}| > \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}\right) \to 0.\end{aligned}$$

wobei wir Aufgabe 9.3(b) verwenden bzw. wie im Beweis dieser Aussage argumentieren.

Aufgabe 9.5. Lösung: $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ist stetig, monoton wachsend auf $\mathbb{R}^+$ und beschränkt.

(a)⇒(b): $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \implies X_n - X \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \implies X_n - X \xrightarrow{d} 0$ und da f stetig und beschränkt ist, folgt mit der Definition der schwachen Konvergenz: $\mathbb{E}\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right) \to \mathbb{E}(0) = 0$.

(b)⇒(c):

$$\mathbb{E}(|X_n - X| \wedge 1) \leqslant 2\mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X| \wedge 1}{1 + |X_n - X| \wedge 1}\right) \leqslant 2\mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) \to 0$$

wobei die erste Ungleichung gilt, da der Nenner $\leqslant 2$ ist. Die zweite gilt, da f monoton ist.

(c)⇒(a): O.E. sei $\epsilon \in (0,1]$. Dann finden wir mit der Markov-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbb{P}(1 \wedge |X_n - X| > \epsilon) \leqslant \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}(1 \wedge |X_n - X|) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wir zeigen nun, dass ρ eine Metrik ist:

$\rho(X,X) = 0$, $\rho(X,Y) = 0 \Rightarrow X = Y$ f.s. und $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$.

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) = \mathbb{E}\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right) &\leqslant \mathbb{E}\left(\frac{|X-Z|+|Z-Y|}{1+|X-Z|+|Z-X|}\right)\\ &\leqslant \mathbb{E}\left(\frac{|X-Z|}{1+|X-Z|}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{|Z-Y|}{1+|Z-X|}\right)\\ &= \rho(X,Z) + \rho(Z,Y).\end{aligned}$$

Hier wurde erst die Monotonie von f benutzt, und dann der Nenner jeweils nach unten abgeschätzt.

Aufgabe 9.6. Lösung: Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis. (a)⇔(b):

$$\begin{aligned}1 &= \mathbb{P}(\lim\nolimits_n X_n = X)\\ &= \mathbb{P}(\forall\epsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \geqslant N:\ |X_n - X| < \epsilon)\\ &= \mathbb{P}(\forall k\ \exists N:\ \forall n \geqslant N:\ |X_n - X| < \tfrac{1}{k})\\ &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\exists N:\ \forall n \geqslant N:\ |X_n - X| < \tfrac{1}{k}).\end{aligned}$$

Und diese Aussage ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\forall N:\ \exists n \geqslant N:\ |X_n - X| \geqslant \tfrac{1}{k})\\ &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\limsup\nolimits_n\{|X_n - X| \geqslant \tfrac{1}{k}\}).\end{aligned}$$

Die Mengen sind monoton wachsend

$$\Leftrightarrow \forall k:\quad \mathbb{P}(\limsup\nolimits_n\{|X_n - X| \geqslant \tfrac{1}{k}\}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0: \quad \mathbb{P}(\limsup_n\{|X_n - X| > \epsilon\}) = 0.$$

(b)$\Leftrightarrow$(c): Wenn $|X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon$ für unendlich viele n gilt, dann muß der größte Teilfolgenlimes (also der limsup) der Beziehung $\limsup_n |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \epsilon$ genügen. Weil wir alle $\epsilon > 0$ betrachten, können wir o.E. $\epsilon/2$ betrachten.

Die Umkehrung zeigt man analog: wenn der limsup größer ale ϵ ist, dann gibt es eine Teilfolge, so dass für diese Teilfolgenglieder $|X_{n'} - X| > \epsilon$ gilt, und davon gibt es unendlich viele...

(b)$\Leftrightarrow$(d): Das folgt unmittelbar aus der Def. des limes superior für Mengen und der Maßstetigkeit:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon\text{unendlich oft}) &= \mathbb{P}(\limsup_n\{|X_n - X| > \epsilon\})\\ &= \mathbb{P}(\cap_k \cup_{n\geqslant k} \{|X_n - X| > \epsilon\})\\ &= \lim_k \mathbb{P}(\cup_{n\geqslant k}\{|X_n - X| > \epsilon\})\\ &= \lim_k \mathbb{P}(\{\sup_{n\geqslant k}|X_n - X| > \epsilon\}).\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 9.7. Lösung: „$\Rightarrow$“: Aus $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ folgt, dass auch jede Teilfolge (einer Teilfolge) X''_n gegen X in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Wir können die Aussage sogar verschärfen: es gibt eine Teilfolge $(X''_n)_n$, die f.s. konvergiert, vgl. Korollar 9.10.

„$\Leftarrow$“: Wir setzen nun voraus, dass jede Teilfolge $(X'_n)_n$ eine Teil-Teilfolge $(X''_n)_n$ enthält, die alle gegen denselben Grenzwert X in Wahrscheinlichkeit konvergieren. Angenommen, X_n konvergiert **nicht** gegen X in Wahrscheinlichkeit. Dann können wir eine Teilfolge $(X'_n)_n$ finden und ein $\epsilon > 0$, so dass

$$\forall n\ :\ \mathbb{P}(|X'_n - X| > \epsilon) \geqslant \epsilon.$$

Aber diese Teilfolge kann keine Teil-Teilfolge haben, die in Wahrscheinlichkeit oder f.s. gegen X konvergiert.

Wenn wir das Teilfolgenprinzip auf die ZV $\mathbb{1}_{A_n}$ mit $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ anwenden, dann sehen wir, dass $\mathbb{1}_{A_n}$ nicht punktweise konvergieren muß, aber eine Teilfolge $\mathbb{1}_{A_{n(k)}}$ konvergiert f.s.

■■

Aufgabe 9.8. Lösung:

(a), (b) Für die charakteristische Funktion von (X_n, Y_n) gilt

$$\phi_{(X_n,Y_n)}(\xi,\eta) = \mathbb{E}e^{i\xi X_n + i\eta X_n} \overset{X_n \perp\!\!\!\perp Y_n}{=} \mathbb{E}e^{i\xi X_n}\mathbb{E}e^{i\eta Y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{i\eta Y}.$$

Diese Rechnung zeigt, dass $\lim_n \phi_{(X_n,Y_n)}$ punktweise existiert und dass der Grenzwert selbst eine charakteristische Funktion ist, nämlich die einer ZV $(X', Y')^\top$ mit den Komponenten $X' \sim X$, $Y' \sim Y$.

In diesem Sinne gilt: $(X_n, Y_n)^\top \xrightarrow{d} (X, Y)^\top$ und $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Weiter gilt:

$$\mathbb{E}e^{i\xi X_n + i\eta X_n} = \mathbb{E}e^{i(\xi+\eta)X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}e^{i(\xi+\eta)X} = \mathbb{E}e^{i\xi X + i\eta X}$$

also $(X_n, X_n)^\top \xrightarrow{d} (X, X)^\top$.

(c) Wir wissen bereits, dass $\lim_n \mathbb{E}f(X_n, Y_n) = \mathbb{E}f(X, Y)$ für alle $f \in C_b(\mathbb{R}^2)$ gilt. Wenn $u \in C_b(\mathbb{R})$, dann ist $f(x,y) := u(x+y)$ in $C_b(\mathbb{R}^2)$, d.h. aus (b) folgt sofort, dass $\lim_n u(X_n + Y_n) = u(X+Y)$ gilt, und daher $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$.

Aufgabe 9.9. Lösung: Es gelte $Y \equiv c$ f.s., also $Y \sim \delta_c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Aus Lemma 9.12 wissen wir, dass in diesem Fall $Y_n \xrightarrow{d} Y$ äquivalent ist zu $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Daher kann die Zusatzfrage mit „ja“ beantwortet werden.

Wir werden zeigen, dass $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X_n, c)$ gilt, wobei wir nichts über die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (X_n, Y_n) voraussetzen (d.h. die Abhängigkeitsstruktur nicht näher spezifizieren. Weil die Abbildungen $x \mapsto x + y$ und $x \mapsto x \cdot y$ stetig sind, folgt dann aus

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f(X_n, Y_n) = \mathbb{E}f(X, c) \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

sofort

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}g(X_n Y_n) = \mathbb{E}g(Xc) \quad \forall g \in C_b(\mathbb{R})$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}h(X_n + Y_n) = \mathbb{E}h(X + c) \quad \forall h \in C_b(\mathbb{R}).$$

Um die d-Konvergenz des Vektors (X_n, Y_n) zu zeigen, verwenden wir den Satz von Lévy (Satz 9.18) und wählen $f(x,y) = e^{i(\xi x + \eta y)}$:

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}e^{i(\xi X_n + \eta Y_n)} - \mathbb{E}e^{i(\xi X + \eta c)}\right| &\leqslant \left|\mathbb{E}e^{i(\xi X_n + \eta Y_n)} - \mathbb{E}e^{i(\xi X_n + \eta c)}\right| + \left|\mathbb{E}e^{i(\xi X_n + \eta c)} - \mathbb{E}e^{i(\xi X + \eta c)}\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left|e^{i(\xi X_n + \eta Y_n)} - \mathbb{E}e^{i(\xi X_n + \eta c)}\right| + \left|\mathbb{E}e^{i(\xi X_n + \eta c)} - \mathbb{E}e^{i(\xi X + \eta c)}\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left|e^{i\eta Y_n} - e^{i\eta c}\right| + \left|\mathbb{E}e^{i\xi X_n} - \mathbb{E}e^{i\xi X}\right|.
\end{aligned}$$

Der zweite Ausdruck konvergiert offensichtlich gegen Null, weil $X_n \xrightarrow{d} X$ gilt (Satz 9.18). Für den ersten Ausdruck gilt – für festes $\eta \in \mathbb{R}$ – auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von $y \mapsto e^{i\eta y}$ mit geeigneten $\epsilon > 0$ und $\delta = \delta(\epsilon) > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|e^{i\eta Y_n} - e^{i\eta c}\right| &= \mathbb{E}\left[\left|e^{i\eta Y_n} - e^{i\eta c}\right| \mathbb{1}_{\{|Y_n - c| > \delta\}}\right] + \mathbb{E}\left[\left|e^{i\eta Y_n} - e^{i\eta c}\right| \mathbb{1}_{\{|Y_n - c| \leqslant \delta\}}\right] \\
&\leqslant 2\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|Y_n - c| > \delta\}}\right] + \mathbb{E}\left[\epsilon \mathbb{1}_{\{|Y_n - c| \leqslant \delta\}}\right] \\
&\leqslant 2\mathbb{P}(|Y_n - c| > \delta) + \epsilon \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}\text{-Konvergenz, da } \delta,\epsilon \text{ fest}} \epsilon \xrightarrow[\epsilon\downarrow 0]{} 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Für Teil (a) ist ein direkter Beweis unangenehm. Teil (b) kann folgendermaßen direkt bewiesen werden:

Für festes $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi(X_n+Y_n)} - \mathbb{E}e^{i\xi X} = \Big(\mathbb{E}e^{i\xi(X_n+Y_n)} - \mathbb{E}e^{i\xi X_n}\Big) + \underbrace{\Big(\mathbb{E}e^{i\xi X_n} - \mathbb{E}e^{i\xi X}\Big)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \text{ wg. } d\text{-Konvergenz}}.$$

Der erste Ausdruck kann wie im Beweis des Satzes von Slutsky (Satz 9.21) mittels gleichmäßiger Stetigkeit behandelt werden: für jedes $\epsilon > 0$ und geeignetes $\delta = \delta(\epsilon, \xi)$ gilt

$$\begin{aligned}
\Big|\mathbb{E}e^{i\xi(X_n+Y_n)} - \mathbb{E}e^{i\xi X_n}\Big| &\leqslant \mathbb{E}\Big|e^{i\xi X_n}\big(e^{i\xi Y_n} - 1\big)\Big| \\
&= \mathbb{E}\Big|e^{i\xi Y_n} - 1\Big| \\
&\leqslant \epsilon + \mathbb{P}\big(|Y_n| > \delta\big) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{\epsilon \text{ fest}} \epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0,
\end{aligned}$$

wobei die $\mathbb{P}$-Konvergenz in der vorletzten Zeile eingeht.

Aufgabe 9.10. Lösung: Es seien $\xi, \eta \in \mathbb{R}$; dann sind $f(x) = e^{i\xi x}$ und $g(y) = e^{i\eta y}$ Funktionen in C_b. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{i\left\langle\binom{\xi}{\eta}, \binom{X}{Y}\right\rangle} &= \mathbb{E}e^{i\xi X}e^{i\eta Y} \\
&= \mathbb{E}f(X)g(Y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f(X_n)g(Y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{i\xi X_n}e^{i\eta Y} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{i\left\langle\binom{\xi}{\eta}, \binom{X_n}{Y}\right\rangle}
\end{aligned}$$

und somit $(X_n, Y) \xrightarrow{d} (X, Y)$.

Nun gelte $X = \phi(Y)$ für eine Borel messbare Funktion ϕ. Für $f \in C_b$ sei $g := f \circ \phi$. Offensichtlich ist $f \circ \phi$ beschränkt und Borel messbar, also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f(X_n)f(X) &= \mathbb{E}f(X_n)f(\phi(Y)) \\
&= \mathbb{E}f(X_n)g(Y) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}f(X)g(Y) \\
&= \mathbb{E}f(X)f(X) \\
&= \mathbb{E}f^2(X).
\end{aligned}$$

Weil $f \in C_b \implies f^2 \in C_b$ und weil $g \equiv 1$ trivialerweise eine beschränkte Borel-Funktion ist, haben wir

$$\mathbb{E}f^2(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}f^2(X).$$

Mithin ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(|f(X)-f(X_n)|^2\big) &= \mathbb{E}f^2(X_n) - 2\mathbb{E}f(X_n)f(X) + \mathbb{E}f^2(X)\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}f^2(X) - 2\mathbb{E}f(X)f(X) + \mathbb{E}f^2(X) = 0,\end{aligned}$$

und wir erhalten, dass $f(X_n) \xrightarrow{L^2} f(X)$.

Es sei $\epsilon > 0$ und für $R > 0$ definieren wir $f(x) := -R \vee x \wedge R$. Offenbar ist $f \in C_b$ und daher

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon)\\ &\leqslant \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon,\ |X| \leqslant R,\ |X_n| \leqslant R) + \mathbb{P}(|X| \geqslant R) + \mathbb{P}(|X_n| \geqslant R)\\ &= \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon,\ |X| \leqslant R,\ |X_n| \leqslant R) + \mathbb{P}(|X| \geqslant R) + \mathbb{P}(|f(X_n)| \geqslant R)\\ &\leqslant \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon) + \mathbb{P}(|X| \geqslant R) + \mathbb{P}(|f(X_n)| \geqslant R)\\ &\leqslant \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon) + \mathbb{P}(|X| \geqslant R) + \mathbb{P}(|f(X)| \geqslant R/2) + \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geqslant R/2)\end{aligned}$$

hier geht ein, dass $\{|f(X_n)| \geqslant R\} \subset \{|f(X)| \geqslant R/2\} \cup \{|f(X_n) - f(X)| \geqslant R/2\}$ – verwende die Dreiecksungleichung: $|f(X_n)| \leqslant |f(X)| + |f(X) - f(X_n)|$

$$\begin{aligned}&\leqslant \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon) + \mathbb{P}(|X| \geqslant R/2) + \mathbb{P}(|X| \geqslant R/2) + \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geqslant R/2)\\ &= \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon) + 2\mathbb{P}(|X| \geqslant R/2) + \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geqslant R/2)\\ &\leqslant \left(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{4}{R^2}\right)\mathbb{E}\big(|f(X) - f(X_n)|^2\big) + 2\mathbb{P}(|X| \geqslant R/2)\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\epsilon, R \text{ fest und } f = f_R \in C_b} 2\mathbb{P}(|X| \geqslant R/2) \xrightarrow[R\to\infty]{X \text{ ist f.s. } \mathbb{R}\text{-wertig}} 0.\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 9.11. Lösung: Wir überlegen uns zunächst, dass die Folgen $(\mu_n)_n$ und $(\sigma_n)_n$ konvergieren. Auf Grund der Voraussetzung wissen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{i\xi X_n} = \lim_{n\to\infty} e^{i\mu_n\xi}e^{-\sigma_n^2\xi^2/2} = \phi_X(\xi) \quad \text{existiert} \tag{9.1}$$

Wenn wir den Logarithmus bilden, gilt für eine geeignete Folge $(k_n)_n \subset \mathbb{Z}$

$$\lim_{n\to\infty} \log \mathbb{E}e^{i\xi X_n} = \lim_{n\to\infty} \left(i\mu_n\xi - \frac{1}{2}\sigma_n\xi^2 + 2\pi k_n i\right) \quad \text{existiert.}$$

Weil Imaginär- und Realteile separat konvergieren, folgt $\exists\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\sigma_n^2 \geqslant 0$. Im Hinblick auf (9.1) folgt dann aber auch $\lim_{n\to\infty} e^{i\xi\mu_n} = e^{\frac{1}{2}\xi^2\sigma^2}\phi_X(\xi)$. Es gilt

$$\int_0^\epsilon e^{i\xi\mu_n}\,d\xi = \frac{1}{i\mu_n}\left(e^{i\epsilon\mu_n} - 1\right) \tag{9.2}$$

und indem wir den Grenzwert mit Hilfe von dominierter Konvergenz bilden, folgt

$$\left|\int_0^\epsilon \phi_X(\xi)e^{\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2}\,d\xi\right| = \lim_n \left|\int_0^\epsilon e^{i\xi\mu_n}\,d\xi\right| \leqslant \liminf_n \frac{1}{|i\mu_n|}\left(|e^{i\epsilon\mu_n}| + 1\right). = \liminf_n \frac{2}{|\mu_n|}.$$

Wäre $(\mu_n)_n$ unbeschränkt, dann ergäbe sich ein Widerspruch zur Stetigkeit von $\phi_X(\xi)$ bei $\xi = 0$ und $\phi_X(0) = 1$. Mit dominierter Konvergenz sehen wir wiederum mit Hilfe von (9.2), dass die Limiten

$$\lim_n \int_0^1 e^{i\xi\mu_n}\,d\xi \quad \text{und} \quad \lim_n \left(e^{i\mu_n} - 1\right)$$

existieren. Folglich existiert auch $\lim_n 1/(i\mu_n)$ oder $\lim_n \mu_n$. Weil die Folge $(\mu_n)_n$ beschränkt ist, gilt $\lim_n \mu_n = \mu \in \mathbb{R}$.

Es sei $f \in C_b$. Dann ist

$$\mathbb{E}f(X_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}\Big)\,dx$$

und nach Variablenwechsel gemäß $y = (x-\mu_n)/\sigma_n$ finden wir

$$\mathbb{E}f(X_n) = \int_{\mathbb{R}} f(y\sigma_n + \mu_n)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)\,dy.$$

Weil $\mu_n \to \mu$ und $\sigma_n \to \sigma$, folgt mit dominierter Konvergenz (f ist stetig und beschränkt!!)

$$\begin{aligned}\lim_n \mathbb{E}f(X_n) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_n f(y\sigma_n + \mu_n)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y\sigma + \mu)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big)\,dy.\end{aligned}$$

Somit ist der schwache Grenzwert der X_n eine $N(\mu,\sigma)$-verteilte ZV. Für $\sigma = 0$ liegt eine ausgeartete Gauß-ZV vor (die ist f.s. konstant mit Wert μ).

Umkehrung: *Es seien $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ ZV und es gelte $\sigma_n \to \sigma$ und $\mu_n \to \mu$. Dann existiert eine ZV $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ und $X_n \xrightarrow{d} X$.*

Beweis: Für die charakteristischen Funktionen gilt wegen unserer Annahmen

$$\phi_{X_n}(\xi) = e^{i\xi\mu_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2\xi^2} \to e^{i\xi\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2}.$$

Die r.S. ist aber die charakteristische Funktion einer ZV $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ und gemäß Satz 9.18 folgt $X_n \to X$ in Verteilung.

■■

Aufgabe 9.12. Lösung: Die Aufgabe wird interessanter, wenn wir statt Y_n die ZV $\eta_n = 1 - Y_n$ betrachten, die $\mathsf{B}(1-1/n)$-verteilt ist.

OE seien die X_n standardnormalverteilt. Die Folge X_n konvergiert (trivialerweise) schwach gegen eine $N(0,1)$-ZV X und die η_n konvergieren schwach gegen $\eta \sim \delta_1$. Es ist nämlich für $f \in C_b$:

$$\mathbb{E}f(\eta_n) = \int f(y)\,d((1-\tfrac{1}{n})\delta_1 + \tfrac{1}{n}\delta_0) = \big(1-\tfrac{1}{n}\big)f(1) + \tfrac{1}{n}f(0) \to f(1) = \int f(y)\,d\delta_1.$$

Da der limes trivial ist liegt bereits Konvergenz in Wahrscheinlichkeit vor - vgl. Lemma 9.12. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass $X_n \cdot \eta_n \xrightarrow{d} X \cdot 1$. Das prüfen wir jetzt nach. Dazu sei $g \in C_b$. Dann

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega g(X_n \eta_n)\, d\mathbb{P} - \int g(X)\, d\mathbb{P} \right| \\
&\qquad = \left| \int_\Omega g(X_n \eta_n)\, d\mathbb{P} - \int_\Omega g(X_n)\, d\mathbb{P} \right| \\
&\qquad = \left| \int_\Omega g(X_n \eta_n)\, d\mathbb{P} - \int_{\{\eta_n = 1\}} g(X_n) - \int_{\{\eta_n = 0\}} g(X_n)\, d\mathbb{P} \right| \\
&\qquad = \left| \int_\Omega g(X_n \eta_n)\, d\mathbb{P} - \int_{\{\eta_n = 1\}} g(X_n \eta_n) - \int_{\{\eta_n = 0\}} g(X_n)\, d\mathbb{P} \right| \\
&\qquad = \left| \int_{\{\eta_n = 0\}} g(X_n \eta_n)\, d\mathbb{P} - \int_{\{\eta_n = 0\}} g(X_n)\, d\mathbb{P} \right| \\
&\qquad \leqslant \int_{\{\eta_n = 0\}} |g(X_n \eta_n) - g(X_n)|\, d\mathbb{P} \\
&\qquad \leqslant 2\|g\|_\infty \mathbb{P}(\eta_n = 0) \xrightarrow{n \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

Hier verwenden wir in der ersten Gleichheit, dass $X \sim N(0,1) \sim X_n$ ist, dass in der zweiten Gleichheit $\Omega = \{\eta_n = 1\} \cup \{\eta_n = 0\}$ (bis auf eine Nullmenge) gilt, und dass $\eta_n \to 0$ in Wahrscheinlichkeit, was $\mathbb{P}(\eta_n = 0) \to 0$ impliziert.

Fazit: $\lim_n X_n \eta_n$ existiert und ist $X \sim N(0,1)$, d.h. (standard-)normalverteilt. Andererseits konvergiert $\lim_n X_n Y_n$ gegen $Z = 0$.

Hinweis. Man vergleiche diese Aussage mit Aufgabe 9.9...

■■

Aufgabe 9.13. Lösung:

- Satz 9.18 kann man wie in Aufgabe 1, S. 158, von [Schilling-MI] zeigen.
- Satz 9.14 folgt aus dem Portmanteau-Theorem, Satz 25.3 in [Schilling-MI].

■■

Aufgabe 9.14. Lösung: Weil die X_i iid $\mathsf{N}(0,1)$-ZV sind, ist die Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathsf{N}(0,n)$ und daher $\bar{X}_n = n^{-1} S_n \sim \mathsf{N}(0, n/n^2)$.

- Mit Hilfe der Chebyshev–Markov Ungleichung erhalten wir

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \epsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{1}{n\epsilon^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

  Das zeigt stochastische Konvergenz.

- Für $X \sim N(0, \sigma^2)$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} e^X &= \int \exp\left\{ x - \frac{x^2}{2\sigma^2} \right\} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\
&= \int \exp\left\{ -\frac{x^2 - 2x\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right\} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \exp\left\{-\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}\right\}.
\end{aligned}
$$

Nun können wir die Markovsche Ungleichung anwenden:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \epsilon) &= 2\mathbb{P}\left(\bar{X}_n > \epsilon\right) \\
&= 2\mathbb{P}\left(\alpha\bar{X}_n > \alpha\epsilon\right), \quad \alpha > 0, \\
&= 2\mathbb{P}\left(\exp\{\alpha\bar{X}_n\} > e^{\alpha\epsilon}\right) \\
&\leqslant 2\exp\{-\alpha\epsilon\}\mathbb{E}\exp\{\alpha\bar{X}_n\} \\
&= 2\exp\left\{\frac{\alpha^2}{2n} - \alpha\epsilon\right\}.
\end{aligned}
$$

Die Wahl $\alpha = n\epsilon$ minimiert den Exponenten und es folgt

$$
\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \epsilon) \leqslant 2\exp\left\{-\frac{n\epsilon^2}{2}\right\}.
$$

Mit $\epsilon_n = 2\sqrt{(\log n)/n}$ ergibt sich

$$
\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|\bar{X}_n| > \epsilon_n) \leqslant 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty,
$$

und die fast sichere Konvergenz folgt mit Hilfe von Lemma 9.9 (schnelle stochastische Konvergenz).

■■

10 Unabhängigkeit und Konvergenz

Aufgabe 10.1. Lösung:

(a)
$$\begin{aligned}
\omega \in \liminf A_n &\iff \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i \geqslant n} A_i \\
&\iff \text{ es existiert ein } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \omega \in \bigcap_{i \geq n_0} A_i \\
&\iff \text{ es existiert ein } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass für alle } i \geqslant n_0 : \omega \in A_i \\
&\iff \omega \text{ liegt in schließlich allen } A_n.
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\omega \in \limsup_n A_n &\iff \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i \geqslant n} A_i \\
&\iff \text{ für alle } n \in \mathbb{N} : \omega \in \bigcup_{i \geq n} A_i \\
&\iff \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ existiert ein } i_n \geq n : \omega \in A_{i_n} \\
&\iff \omega \text{ liegt in unendlich vielen } A_n.
\end{aligned}$$

(c) Die Behauptung folgt unmittelbar aus Teil (b):

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_j}(\omega) = 1 \iff \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \infty.$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\omega \in \{\limsup_n |X_n| > \epsilon\} &\iff \limsup_n |X_n(\omega)| > \epsilon \\
&\iff \inf_n \sup_{i \geqslant n} |X_i(\omega)| > \epsilon \\
&\implies \forall n : \sup_{i \geqslant n} |X_i(\omega)| > \epsilon \\
&\iff \forall n \exists i_n \geqslant n : |X_{i_n}(\omega)| > \epsilon \\
&\iff \omega \in \bigcap_n \bigcup_{i \geqslant n} \{|X_i| > \epsilon\} = \limsup_n \{|X_n| > \epsilon\} \\
&\qquad \boxed{\text{daraus folgt die erste Inklusion}} \\
&\implies \omega \in \bigcap_n \bigcup_{i \geqslant n} \{|X_i| \geqslant \epsilon\} = \limsup_n \{|X_n| \geqslant \epsilon\} \\
&\iff \forall n : \omega \in \bigcup_{i \geqslant n} \{|X_i| \geqslant \epsilon\} \\
&\iff \forall n \exists i_n \geqslant n : |X_{i_n}(\omega)| \geqslant \epsilon \\
&\iff \forall n : \sup_{i \geqslant n} |X_i(\omega)| \geqslant \epsilon \\
&\iff \inf_n \sup_{i \geqslant n} |X_i(\omega)| \geqslant \epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \limsup_n |X_n(\omega)| \geqslant \epsilon \\ &\iff \omega \in \{\limsup_n |X_n| \geqslant \epsilon\} \end{aligned}$$

und das zeigt dann die zweite Inklusion. Wenn wir den Beweis genau ansehen, dann haben wir sogar gezeigt, dass

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} |X_n| > \epsilon\right\} \subset \limsup_{n\to\infty} \{|X_n| > \epsilon\} \subset \limsup_{n\to\infty} \{|X_n| \geqslant \epsilon\} = \left\{\limsup_{n\to\infty} |X_n| \geqslant \epsilon\right\}$$

und die Inklusionen „$\subset$“ sind in der Regel strikt.

Alternative: Weil $A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$ gilt, ist die Behauptung offensichtlich äquivalent zu

$$\mathbb{1}_{\{\limsup_{n\to\infty} |X_n| > \epsilon\}} \leqslant \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} \{|X_n| > \epsilon\}} \leqslant \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} \{|X_n| \geqslant \epsilon\}} = \mathbb{1}_{\{\limsup_{n\to\infty} |X_n| \geqslant \epsilon\}}.$$

Wir beachten nun, dass $\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}$ (siehe unten, vgl. auch [Schilling-MI], Kapitel 2, Aufgabe 9) und daher ist die Behauptung auch äquivalent zu

$$\mathbb{1}_{\{\limsup_{n\to\infty} |X_n| > \epsilon\}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{|X_n| > \epsilon\}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{|X_n| \geqslant \epsilon\}} = \mathbb{1}_{\{\limsup_{n\to\infty} |X_n| \geqslant \epsilon\}}$$

oder zu

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{(\epsilon,\infty)}\left(\limsup_{n\to\infty} |X_n|\right) &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{(\epsilon,\infty)}(|X_n|) \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[\epsilon,\infty)}(|X_n|) = \mathbb{1}_{[\epsilon,\infty)}\left(\limsup_{n\to\infty} |X_n|\right). \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung gilt auf Grund der Definition des limsup für Funktionen (vgl. Appendix, Kommentar nach Lemma A.2), die zweite Ungleichung ist trivial, die Gleichheit an dritter Stelle folgt aus der Oberhalbstetigkeit der Funktion $y \mapsto \mathbb{1}_{[\epsilon,\infty)}(y)$, vgl. Lemma A.1 und Satz A.3.

Wir zeigen schließlich noch, dass $\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}$ gilt:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 &\iff \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \omega \in \limsup_n A_n \\ &\iff \mathbb{1}_{\limsup_n A_n}(\omega) = 1. \end{aligned}$$

■■

Aufgabe 10.2. Lösung: Wir schreiben X_n für den Ausgang des $n$ten Münzwurfs, 1 bedeutet Zahl (Erfolg) und 0 Wappen (Misserfolg), wir schreiben $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = q = 1 - p$. Weil die Münzwürfe unabhängig sind, ist die Folge der Ereignisse $(A_k)_k$ (vgl. Aufgabenstellung) unabhängig:

$$A_k \in \sigma(X_{2^k}, X_{2^k+1}, \dots, X_{2^{k+1}-1}).$$

Die Wahrscheinlichkeit von A_k erhalten wir mit der Binomialverteilung; wir haben es mit 2^k Würfen in der A_k definierenden Wurfserie zu tun:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \sum_{n=k}^{2^k} \binom{2^k}{n} p^n (1-p)^{2^k-n} \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \binom{2^k}{n} p^n (1-p)^{2^k-n} \\
&= 1 - (1-p)^{2^k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2^k!}{n!(2^k-n)!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \\
&= 1 - (1-p)^{2^k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\overbrace{2^k \cdot (2^k-1) \cdot (2^k-2) \cdot \ldots \cdot (2^k-n+1)}^{\text{max. } k \text{ Faktoren}}}{n!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \\
&\geqslant 1 - (1-p)^{2^k} (2^k)^k \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \\
&\geqslant 1 - (1-p)^{2^k} 2^{k\cdot k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \\
&= 1 - (1-p)^{2^k} 2^{k\cdot k} \exp\left(\frac{p}{1-p}\right).
\end{aligned}$$

Weil $\lim_{k\to\infty}(1-p)^{2^k} 2^{k\cdot k} = 0$, gilt $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$, also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ und die schwierige Richtung des Borel–Cantelli Lemmas zeigt die Behauptung.

Aufgabe 10.3. Lösung: „$\Leftarrow$“: Wir nehmen an, dass ein derartiges $C > 0$ existiert. Aus (der einfachen Richtung von) Borel–Cantelli folgt dann

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \{X_n > C\}\right) = \mathbb{P}\left(X_n > C \text{ für unendlich viele } n\right) = 0$$

d.h.

$$\mathbb{P}\left(\liminf_n \{X_n \leqslant C\}\right) = \mathbb{P}\left(X_n \leqslant C \text{ für schließlich alle } n\right) = 1,$$

und die Behauptung folgt aus der Inklusion

$$\liminf_n \{X_n \leqslant C\} \subset \{\sup_n X_n < \infty\}$$

(diese gilt, da $\omega \in \liminf_n \{X_n \leqslant C\} \iff \exists N = N(\omega) : \forall n \geqslant N : X_n(\omega) \leqslant C$ und da $\max_{n \leqslant N(\omega)} X_n(\omega) \leqslant c(\omega) < \infty$....).

„$\Rightarrow$“: (Indirekt). Angenommen für alle $C > 0$ wäre $\sum_n \mathbb{P}(X_n > C) = \infty$. Da die X_n unabhängig sind, gilt nach (der schwierigen Richtung von) Borel–Cantelli, dass

$$\forall C > 0 : \mathbb{P}\left(\limsup_n \{X_n > C\}\right) = 1$$

und damit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{C\in\mathbb{N}} \limsup_n \{X_n > C\}\right) = 1.$$

Nunmehr

$$
\begin{aligned}
\omega \in \bigcap_{C\in\mathbb{N}} \limsup_n \{X_n > C\}
&\iff \forall C \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists i \geqslant n : X_i(\omega) > C\\
&\implies \forall C \in \mathbb{N} : \sup_n X_n(\omega) > C\\
&\implies \sup_n X_n(\omega) = \infty
\end{aligned}
$$

und daher

$$
\mathbb{P}\Big(\sup_n X_n = \infty\Big) = 1 \iff \mathbb{P}\Big(\sup_n X_n < \infty\Big) = 0.
$$

■■

Aufgabe 10.4. Lösung: Die Richtung „⇒“ folgt wie die einfache Richtung des Borel–Cantelli Lemmas (Satz 10.1.a)):

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n \text{ für unendlich viele } n) &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \infty \quad \text{fast sicher}\\
&\implies \mathbb{1}_B \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n\cap B} = \infty\mathbb{1}_B \quad \text{fast sicher, } (0\cdot\infty = 0)
\end{aligned}
$$

und die Behauptung folgt, indem wir den Erwartungswert bilden und $\mathbb{P}(B) > 0$ beachten.

Für die Umkehrung „⇐“ ist es wichtig, dass die Reihe für alle $B \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(B) > 0$, divergiert, da wir ja keinerlei Unabhängigkeit annehmen. Angenommen, die Reihe divergiert und es gilt $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) < 1$. Wegen der Maßstetigkeit existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$
\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant k} A_n\Big) < 1.
$$

Daher gilt für $B := (\bigcup_{n\geqslant k} A_k)^c$, dass $\mathbb{P}(B) > 0$ und

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) \leqslant \sum_{n=1}^{k-1} \mathbb{P}(A_n \cap B) < \infty
$$

im Widerspruch zu unserer Annahme.

Alternative: Wir haben

$$
\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) = \mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n\cap B}
$$

und damit muss $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n\cap B} = \mathbb{1}_B \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \infty$ auf einer Menge C von strikt positivem Maß gelten. Wir setzen $N = \{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} < \infty\}$. Wenn $\mathbb{P}(N) > 0$ ist, wählen wir $B = N$ und finden einen Widerspruch, d.h. es muss $\mathbb{P}(N) = 0$ gelten. Daher ist $\mathbb{P}(A_n \cap B$ für unendlich viele $n) = 1$ für alle B mit $\mathbb{P}(B) > 0$, also insbesondere für $B = \Omega$.

■■

Aufgabe 10.5. Lösung:

- Nach Voraussetzung ist $\{X \leqslant x\} \in \mathscr{C}$, d.h. die Verteilungsfunktion $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \in \{0,1\}$ hat genau einen Sprung, z.B. bei $c \in \mathbb{R}$. Das zeigt $X \sim \delta_c$ oder $\mathbb{P}(X = c) = 1$.
- Es gilt $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und damit

$$\begin{aligned}\sigma(f(X)) &= \sigma(\{X^{-1}(f^{-1}(B)) \mid B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\})\\ &\subset \sigma(\{X^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\})\\ &= \sigma(X).\end{aligned}$$

Somit ist $A \in \sigma(f(X))$ auch in $\sigma(X)$ und damit *von sich selbst unabhängig*:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2 \implies \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}.$$

Mithin ist $\sigma(f(X))$ trivial und, nach Teil 1, $f(X) \equiv \mathit{const}$.

Im allgemeinen braucht in diesem Fall X **nicht konstant sein**! Dazu betrachten wir eine Bernoulli-ZV X mit Werten ± 1: $X \sim \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ und $f(x) := |x|$. Offensichtlich ist $f(X) \sim \delta_{f(1)} = \delta_1$, d.h. trivial und somit unabhängig von X.

■■

Aufgabe 10.6. Lösung:

- $A_1 = \{\limsup_n X_n < \infty\} = \bigcap_m \left\{\limsup_{n\geqslant m} X_n < \infty\right\}$ ist terminal.
- $A_2 = \left\{\limsup_n \frac{S_n}{n} < \infty\right\} = \bigcap_m \left\{\limsup_{n\geqslant m} \frac{S_n - S_m}{n} < \infty\right\}$ ist terminal.
- $A_3 = \{\lim_n S_n \text{ existiert und ist } < c,\ c \in \mathbb{R}\}$ ist terminal.
  $= \{\lim_n S_n \text{ existiert und ist endlich}\}$
  $= \bigcap_m \{\lim_{n\geqslant m}(S_n - S_m) \text{ existiert und ist endlich}\}$
- A_4 ist nicht terminal, Beispiel: $([0,1), \mathsf{B}([0,1), \lambda)$, $X_1(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \mathit{sonst} \end{cases}$

  und für $n > 1:\ X_n = 0$. Nun sei $c \in (0,1)$.

$$A_4 = \left[0, \tfrac{1}{2}\right) \notin \{\varnothing, [0,1)\} = \mathscr{T}_n, n > 1.$$

- A_5 ist terminal siehe Beispiel 10.8.
- A_6 ist nicht terminal, wir können das vorletzte Beispiel (für A_4) modifizieren: $A_6 = [0, \frac{1}{2}) \notin \{\varnothing, [0,1)\} = \mathscr{T}_n, n > 1$.
- $\{\limsup_n X_n < x\} = \bigcap_m \{\limsup_{n\geqslant m} X_n < x\}$ ist terminal für alle x und damit ist Y_1 $\mathscr{T}_\infty$-messbar.
- $\{\limsup_n S_n < x\}$ ist nicht terminal für alle x (analog zu A_4) Daher ist Y_2 nicht $\mathscr{T}_\infty$-messbar.

■■

Aufgabe 10.7. Lösung: $\mathbb{P}(S_n = 0) = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}} & n \text{ gerade} \end{cases}.$

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel erhält man:

$$\sum_n \binom{2n}{n} p^n q^n \approx \sum_n \frac{4^n}{\sqrt{\pi k}} p^n q^n = \begin{cases} \infty & p = q = \frac{1}{2} \\ \sum_n \frac{1}{\sqrt{\pi k}} v^k & \text{sonst für } 0 < v < 1 \text{ und somit} < \infty \end{cases}.$$

Beachte hierbei, dass die Funktion $x \mapsto x(1-x)$ auf dem Intervall $[0,1]$ ein Maximum bei $x = \frac{1}{2}$ hat, d.h. $pq < \frac{1}{4}$ wenn $p \neq \frac{1}{2}$.

■■

Aufgabe 10.8. Lösung: Es gilt: $\mathbb{P}(T_n < \infty) = \mathbb{P}(T_1 < \infty)^n$. Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n < \infty) &= \mathbb{P}(\inf\{m > T_{n-1} : S_m = 0\} < \infty, T_{n-1} < \infty) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = l, \inf\{m > l : S_m = 0\} < \infty) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = l, \inf\{m > l : S_m - S_l = 0\} < \infty) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = l, \inf\{k > 0 : S_{k+l} - S_l = 0\} < \infty) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = l)\mathbb{P}(\inf\{k > 0 : S_{k+l} - S_l = 0\} < \infty) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = l)\mathbb{P}(T_1 < \infty) \\
&= \mathbb{P}(T_{n-1} < \infty)\mathbb{P}(T_1 < \infty) \\
&= \mathbb{P}(T_1 < \infty)^n.
\end{aligned}$$

Weiter ist $\{S_n = 0 \text{ u.o.}\} = \{T_n < \infty \ \forall n\} = \bigcap_n \{T_n < \infty\}$ und daher gilt:

$$\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ u.o.}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_1 < \infty)^n = 1.$$

Das zeigt die Richtung (i)⇒(ii).

Es gilt $\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$ wegen Tonellis Satz (Positivität des Integranden).

Die Gleichheit $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_k < \infty)$ sieht man so: sowohl $\sum_n \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}(\omega)$ als auch $\sum_k \mathbb{1}_{\{T_k<\infty\}}(\omega)$ zählen die „Nulldurchgänge" des zu ω gehörenden Pfades

$$S_0(\omega), S_1(\omega), S_2(\omega), S_3(\omega), \ldots$$

– und daher müssen diese ZV und auch ihre Erwartungswerte übereinstimmen. Die letzte Gleichheit ist die geometrische Reihe.

Wenn (ii) gilt, dann ist die linke Seite der im Hinweis angegebenen (und eben hergeleiteten) Gleichheit $= \infty$, und damit gilt (iii). Es folgt (ii)⇒(iii).

Wenn (i) nicht gilt ist die rechte Seite der im Hinweis angegebenen (und eben hergeleiteten) Gleichheit endlich und daher kann (ii) nicht gelten. Das zeigt (durch Kontraposition) (i)$\Rightarrow$(ii).

■■

11 Summen von unabhängigen Zufallsvariablen

Aufgabe 11.1. Lösung: Wir verwenden Etemadis Ungleichung (11.1) mit $x = 3t$ und dann die Markov-Ungleichung. Beachte, dass $\mathbb{V}X_n = \mathbb{E}(X_n^2)$ gilt. Wir können also auch Bienaymés Identität verwenden und sehen, dass $\mathbb{E}(S_k^2) = \mathbb{V}S_k \leqslant \mathbb{V}S_n$. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant x\right) &\overset{\text{Etemadi}}{\leqslant} 3\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\left(|S_k| \geqslant x/3\right)\\
&\overset{\text{Markov}}{\leqslant} 3\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\mathbb{E}(S_k^2)}{x^2/9}\\
&\overset{\text{zentriert}}{=} 27\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\mathbb{V}S_k}{x^2}\\
&\overset{\text{Bienaymé}}{=} 27\frac{\mathbb{V}S_n}{x^2}.
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 11.2. Lösung:

(a) Wir zeigen erst, dass $X_n \sim Y_0$ für alle n gilt. Nach Konstruktion haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1) &= \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 1) + \mathbb{P}(Y_0 = -1, Y_1 = -1)\\
&\overset{Y_0 \perp\!\!\!\perp Y_1}{=} \mathbb{P}(Y_0 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1) + \mathbb{P}(Y_0 = -1)\mathbb{P}(Y_1 = -1)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und genauso sehen wir, dass $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ gilt.

Nun sei angenommen, dass $X_1, \dots, X_n$ wie Y_0 verteilt sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_n Y_{n+1} = 1)\\
&= \mathbb{P}(X_n = 1, Y_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = -1, Y_{n+1} = -1)\\
&\overset{X_n \perp\!\!\!\perp Y_{n+1}}{=} \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = -1)\mathbb{P}(Y_{n+1} = -1)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und genauso sehen wir, dass $\mathbb{P}(X_{n+1} = -1) = 1/2$ gilt.

Kommen wir zur Unabhängigkeit. Dazu sei $x_n \in \{-1, 1\}$. Wir haben

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)\\
&= \mathbb{P}(Y_n = x_n/x_{n-1}, \dots, Y_2 = x_2/x_1, Y_1 = x_1/1, Y_0 = 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbb{P}(Y_n = x_n/x_{n-1}, \dots, Y_2 = x_2/x_1, Y_1 = x_1/(-1), Y_0 = -1)\\
&\overset{\text{iid}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{P}(Y_0 = 1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{P}(Y_0 = -1)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n = x_n).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt sofort, dass die Folge $X_1, \dots, X_n$ unabhängig ist.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $Y_0 = X_{n+1}/(Y_1 \cdot Y_2 \cdot \ldots \cdot Y_n)$, also ist Y_0 bezüglich $\sigma(\mathscr{Y}, \mathscr{T}_n)$ messbar, also

$$\sigma(Y_0) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mathscr{Y}, \mathscr{T}_n).$$

(c) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_0 = y_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(Y_0 = y_0, Y_1 = x_1/y_0, \dots, Y_n = x_n/x_{n+1})\\
&= \mathbb{P}(Y_0 = y_0) \cdot \mathbb{P}(Y_1 = x_1/y_0) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(Y_n = x_n/x_{n-1})\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\
&= \mathbb{P}(Y_0 = y_0) \cdot \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)
\end{aligned}
$$

und daraus folgt, dass $Y_0 \perp\!\!\!\perp \sigma(X_1, \dots, X_n)$, d.h. $Y_0 \perp\!\!\!\perp \mathscr{T}_1$ und daher auch $Y_0 \perp\!\!\!\perp \bigcap_n \mathscr{T}_n$. Nach Konstruktion gilt auch $Y_0 \perp\!\!\!\perp \mathscr{Y}$ und somit $Y_0 \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathscr{Y}, \bigcap_n \mathscr{T}_n)$.

Die Inklusion

$$\sigma\left(\mathscr{Y}, \bigcap_n \mathscr{T}_n\right) \subset \sigma(\mathscr{Y}, \mathscr{T}_n) \implies \sigma\left(\mathscr{Y}, \bigcap_n \mathscr{T}_n\right) \subset \bigcap_n \sigma(\mathscr{Y}, \mathscr{T}_n)$$

gilt immer. Angenommen $\bigcap_n \sigma(\mathscr{Y}, \mathscr{T}_n) \subset \sigma(\mathscr{Y}, \bigcap_n \mathscr{T}_n)$, dann hätten wir auch $\sigma(Y_0) \subset \sigma(\mathscr{Y}, \bigcap_n \mathscr{T}_n)$. Da aber $Y_0 \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathscr{Y}, \bigcap_n \mathscr{T}_n)$ ist, würde $\mathbb{P}(Y_0 = \pm 1) \in \{0, 1\}$ folgen, was offensichtlich falsch ist.

■■

Aufgabe 11.3. Lösung: Das ist Satz 9.18 mit $Y \equiv 0$.

■■

Aufgabe 11.4. Lösung: „⇒“: das ist gerade Satz 9.7.

„⇐“: $S_n \xrightarrow{d} S$ impliziert, dass für $m < n$, $S_n - S_m \xrightarrow{d} 0$ gilt (hier geht wesentlich ein, dass wir auf **einem einzigen** W-Raum arbeiten). In der Tat finden wir, dass S_m und $S_n - S_m$ unabhängig sind, d.h. es ist

$$\mathbb{E}e^{i\xi S_n} = \mathbb{E}e^{i\xi(S_n - S_m)}\mathbb{E}e^{i\xi S_m}.$$

Wenn wir $m, n \to \infty$ streben lassen, finden wir $\mathbb{E}e^{i\xi(S_n - S_m)} \xrightarrow{m,n\to\infty} 1$. Nach Aufgabe 11.3 folgt damit $S_n - S_m \xrightarrow{d} 0$ und da der Limes trivial ist, folgt nach Lemma 9.12 $S_n - S_m \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Mit Aufgabe 9.3(c) folgern wir, dass $(S_n)_n$ eine $\mathbb{P}$-Cauchy-Folge ist, und als solche ist sie auch $\mathbb{P}$-konvergent.

12 Das starke Gesetz der großen Zahlen

Aufgabe 12.1. Lösung: Wir wählen $R > 0$ und definieren $X_i^R := X_i \wedge R$. Die ZV X_i^R sind nach wie vor iid, $\mathbb{E}|X_1^R| < \infty$ und daher gilt nach dem SLLN, dass mit $S_n^R := \sum_{i=1}^n X_i^R$ die Folge $n^{-1}S_n^R \to \mathbb{E}X_1^R$ f.s. konvergiert. Weiter

$$X_i^R \leqslant X_i \implies S_n^R \leqslant S_n \implies \mathbb{E}X_1^R = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^R}{n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}.$$

Mit Hilfe des Satzes von Beppo Levi sehen wir $\sup_{R>0} \mathbb{E}[(X_1^R)^+] = \mathbb{E}[X_1^+] = \infty$, also $\mathbb{E}[X_1^R] = \mathbb{E}[(X_1^R)^+] - \mathbb{E}[(X_1^R)^-] \to \infty$, woraus wir $\liminf_{n\to\infty} n^{-1}S_n = \infty$ (und damit $\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n = \infty$ folgern.

Aufgabe 12.2. Lösung: Weil $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty \implies \mathbb{E}|X_1| < \infty$, folgt die f.s. Konvergenz direkt aus dem SLLN. Die L^2-Konvergenz folgt aus der Bemerkung, dass für zentrierte ZV Z gilt $\mathbb{V}Z = \mathbb{E}(Z^2)$; insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}X_1\right) &\overset{\text{iid}}{=} \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i)\right)\\
&\overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i - \mathbb{E}X_i)\\
&\overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_1 - \mathbb{E}X_1)\\
&= \frac{1}{n}\mathbb{V}X_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12.3. Lösung: Wir schreiben $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Aus der Definition erhalten wir

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \sum_{i=2}^n \frac{i}{\log i} \leqslant \frac{n^2}{\log n}$$

und somit

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] \leqslant \frac{1}{\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d.h. $S_n/n \to 0$ im Quadratmittel (in L^2), also auch in Wahrscheinlichkeit (wegen der Markovschen Ungleichung).

Andererseits wissen wir, dass $\sum_{i=2}^\infty \mathbb{P}(|X_i| \geqslant i) = 1$ gilt, also wegen der „schwierigen Richtung“ des Borel–Cantelli Lemmas gilt $|X_i| \geqslant i$ unendlich oft. Also gilt auch $|S_n - S_{n-1}| \geqslant n$ für unendlich viele n und daraus schließen wir, dass S_n/n nicht f.s. konvergieren kann.

Aufgabe 12.4. Lösung: Das SLLN besagt, dass $T_n(\omega)/n \to \mu$ für alle $\omega \in \Omega'$ aus einer Menge Ω' mit Maß $\mathbb{P}(\Omega') = 1$. Auf Grund der Definition der ZV N_t wissen wir, dass

$$T_{N_t} \leqslant t < T_{N_t+1}$$

und daher erhalten wir

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leqslant \frac{t}{N_t} \leqslant \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t}.$$

Weil für jedes n die ZV $T_n < \infty$ ist, folgt $N_t(\omega) \uparrow \infty$ für alle $\omega \in \Omega''$ wo $\mathbb{P}(\Omega'') = 1$. Somit gilt auf der Menge $\Omega_0 := \Omega' \cap \Omega''$ (diese hat Maß 1!)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{N_t(\omega)}}{N_t(\omega)} = \mu \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{N_t(\omega)+1}{N_t(\omega)} = 1, \qquad \omega \in \Omega_0.$$

Die letzten beiden Formeln zeigen nun die Behauptung, dass $t/N_t \to \mu$ f.s.

Aufgabe 12.5. Lösung:

(a) Nach dem SLLN gilt $\frac{1}{n}\sum_1^n X_i \to \mu$ und $\frac{1}{n}\sum_1^n Y_i \to \nu$ f.s. Wenn wir die beiden auftretenden Nullmengen vereinigen (was wieder eine Nullmenge ist), erhalten wir

$$\frac{\sum_1^n X_i}{\sum_1^n Y_i} = \frac{\frac{1}{n}\sum_1^n X_i}{\frac{1}{n}\sum_1^n Y_i} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} \frac{\mu}{\nu}.$$

(b) Wir betrachten die Folge $Y_i = (X_i - \mu)^2$. Diese ZV sind iid, da die X_i iid sind. Weiter gilt $\mathbb{E}Y_i = \mathbb{E}((X_i-\mu)^2) = \mathbb{V}X_i = \sigma^2$, d.h. das SLLN gibt direkt die Behauptung.

Aufgabe 12.6. Lösung:

(a) Weil die Mengen C_n^r nur von X_n abhängen und die X_n iid sind, sind die C_n^r unabhängig. Wir wollen die schwierige Richtung des Borel–Cantelli Lemmas verwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(C_n^r) &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|X_n| \geqslant nr)\\ &\stackrel{\text{iid}}{=} \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|X_1| \geqslant nr)\\ &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(r^{-1}|X_1| \geqslant n)\\ &\stackrel{(*)}{\geqslant} r^{-1}\mathbb{E}|X_1| + 1 = \infty,\end{aligned}$$

d.h. Borel–Cantelli zeigt $\mathbb{P}(\limsup_n C_n^r) = 1$ für beliebige $r > 0$. Im Schritt $(*)$ haben wir die folgende Identität bzw. Abschätzung verwendet:

$$\mathbb{E}|X| \stackrel{1.8.k)}{=} \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} \mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,dt$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \mathbb{P}(|X| \geqslant n)\, dt = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geqslant n).$$

(b) Wenn $\omega \in \Omega_r := \limsup_n C_n^r$, dann gibt es eine Folge $(n_k)_k$ mit

$$\frac{1}{n_k}|X_{n_k}(\omega)| \geqslant r \quad \forall \omega \in \Omega_r.$$

Angenommen, $\limsup_n \frac{1}{n}|\sum_1^\infty X_n(\omega)| < c < \infty$. Dann folgt insbesondere

$$\begin{aligned} r \leqslant \left|\frac{X_{n_k}}{n_k}\right| = \left|\frac{\sum_1^{n_k} X_i}{n_k} - \frac{\sum_1^{n_k-1} X_i}{n_k}\right| &\leqslant \left|\frac{\sum_1^{n_k} X_i}{n_k}\right| + \left|\frac{\sum_1^{n_k-1} X_i}{n_k}\right| \\ &= \left|\frac{\sum_1^{n_k} X_i}{n_k}\right| + \left|\frac{\sum_1^{n_k-1} X_i}{n_k - 1}\right| \frac{n_k - 1}{n_k}. \end{aligned}$$

Wir bilden nun den limes superior und erhalten $r \leqslant 2c$. Weil aber r beliebig ist, führt das zum Widerspruch. Also divergiert die Reihe für alle $\omega \in \bigcap_{r\in\mathbb{N}} C_n^r = \Omega_\infty$ und die Behauptung folgt, da $\mathbb{P}(\Omega_\infty) = 1$.

■■

Aufgabe 12.7. Lösung: Wegen des SLLN wissen wir, dass für alle $\omega \in \Omega'$, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} = \mu = \mathbb{E}X_1 > 0.$$

Also gibt es ein $N = N(\omega)$, so dass

$$\begin{aligned} &\forall \omega \in \Omega' \quad \exists N(\omega) \quad \forall n \geqslant N(\omega) \ : \ \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} \geqslant \frac{\mu}{2} \\ \iff &\forall \omega \in \Omega' \quad \exists N(\omega) \quad \forall n \geqslant N(\omega) \ : \ X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \geqslant \frac{n\mu}{2} \\ \iff &\forall \omega \in \Omega' \ : \ \liminf_{n\to\infty} \left[X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)\right] = \infty. \end{aligned}$$

■■

Aufgabe 12.8. Lösung:

(a) Es gelte $|X_n(\omega)| \leqslant c < \infty$ (glm. in n, ω) und $n^{-2} S_{n^2} \to 0$ f.s. Offensichtlich gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \exists! k_n := \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in \mathbb{N}_0 \ : \ k_n^2 \leqslant n \leqslant (k_n + 1)^2.$$

Mithin

$$\begin{aligned} \left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_{k_n^2}}{k_n^2}\right| &\leqslant \left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_n}{k_n^2}\right| + \left|\frac{S_n}{k_n^2} - \frac{S_{k_n^2}}{k_n^2}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k_n^2}\right| \cdot nc + \frac{1}{k_n^2}(n - k_n^2)c \\ &= 2c\left(\frac{n}{k_n^2} - 1\right) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Wir folgern daraus, dass $S_n/n \to 0$ f.s., weil die Teilfolge $S_{k_n^2}/k_n^2$ von S_{n^2}/n^2 nach Voraussetzung f.s. gegen 0 konvergiert.

(b) Nach Teil (a) reicht es zu zeigen, dass $S_{n^2}/n^2 \to 0$ f.s. Nun gilt (vgl. auch Aufgabe 9.6)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n^2}}{n^2} = 0 \text{ f.s.} &\iff \limsup_{n\to\infty} \frac{S_{n^2}}{n^2} = 0 \text{ f.s.}\\ &\iff \forall \epsilon > 0 \,:\, \mathbb{P}\left(n^{-2}|S_{n^2}| > 0 \text{ u.o.}\right) = 0\\ &\iff \forall \epsilon > 0 \,:\, \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{n^{-2}|S_{n^2}| > 0\right\}\right) = 0\end{aligned}$$

und das können wir mit Hilfe des Borel–Cantelli Lemmas überprüfen: wir zeigen, dass

$$\forall \epsilon > 0 \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|S_{n^2}|}{n^2} > \epsilon\right) < \infty.$$

Zunächst verwenden wir die Chebyshev–Markov Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_{n^2}|}{n^2} > \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_{n^2}}{n^2}\right)^2\right] = \frac{1}{\epsilon^2 n^4}\,\mathbb{E}\left(S_{n^2}^2\right).$$

Weiter gilt

$$S_{n^2}^2 = \sum_{i=1}^{n^2} X_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n^2} X_i X_k \implies \mathbb{E}\left[S_{n^2}^2\right] = \sum_{i=1}^{n^2} \mathbb{E}\left[X_i^2\right] + 2 \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n^2} \underbrace{\mathbb{E}\left[X_i X_k\right]}_{=0 \ \text{iid},\ \mathbb{E}X_i=0}.$$

Aufgrund der Beschränktheit der ZV erhalten wir schließlich

$$\mathbb{E}\left[S_{n^2}^2\right] \leqslant n^2 c^2$$

und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|S_{n^2}|}{n^2} > \epsilon\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^4}\,\mathbb{E}\left(S_{n^2}^2\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 c^2}{\epsilon^2 n^4} = \frac{c^2}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

■■

Aufgabe 12.9. Lösung: Diese Aufgabe geht auf einen Satz von Marcinkiewicz und Zygmund [6] zurück und ist sehr schwer. Unsere Lösung lehnt sich an die Darstellung von Loève [5, Band 1, S. 251*ff.*] an.

Im folgenden seien c_n, b_n strikt positive Folgen $b_n \uparrow \infty$, $Z^{(c_n)} := Z\mathbb{1}_{\{|Z|\leqslant c_n\}}$ bezeichnen die abgeschnittenen ZV, und $g_n : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g_n(0) = 0$ ist eine Folge von wachsenden reellen Funktionen. Weiterhin sei angenommen, dass g_n differenzierbar ist (absolut-stetig reicht aus) und dass

$$g_n(x) \geqslant \begin{cases} \kappa x^2 & \text{auf } [0, c_n) \\ \kappa' & \text{auf } [c_n, \infty) \end{cases}$$

gilt. Die ZV $(X_n)_n$ seien unabhängig.

i) (vgl. Drei-Reihen Satz 11.6 oder die Abschneidetechnik im SLLN von Kolmogorov auf S. 128, Zeile 11 von unten gezählt). *Wenn die Reihe* $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > c_n) < \infty$ *konvergiert, dann konvergiert* $\sum_{n=1}^N \left(X_n - \mathbb{E}X_n^{(c_n)}\right)$ *genau dann fast sicher, wenn* $\sum_{n=1}^N \left(X_n^{(c_n)} - \mathbb{E}X_n^{(c_n)}\right)$ *f.s. konvergiert.*

Beweis. Zusammen mit dem Borel–Cantelli Lemma (einfache Richtung) zeigt die Bedingung, dass $\mathbb{P}(X_n \neq X_n^{(c_n)} \text{ u.o.}) = 0$, d.h. für fast alle ω finden wir $N(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=N(\omega)} \left(X_n^{(c_n)}(\omega) - \mathbb{E}X_n^{(c_n)}\right) = \sum_{n=N(\omega)} \left(X_n(\omega) - \mathbb{E}X_n^{(c_n)}\right)$. Damit haben die beiden Folgen f.s. dasselbe Konvergenzverhalten. □

ii) (vgl. Korollar 11.3). *Wenn die beiden Reihen* $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > c_n) < \infty$ *und* $\sum_n \mathbb{E}g_n(|X_n^{(c_n)}|) < \infty$ *konvergieren, dann konvergiert* $\sum_{n=1}^N \left(X_n - \mathbb{E}X_n^{(c_n)}\right)$ *fast sicher.*

Beweis. Wegen i) reicht es zu zeigen, dass die Folge $\sum_{n=1}^N \left(X_n^{(c_n)} - \mathbb{E}X_n^{(c_n)}\right)$ f.s. konvergiert. Das folgt aber aus

$$\sum_n \mathbb{V}(X_n^{(c_n)}) \leqslant \sum_n \mathbb{E}[(X_n^{(c_n)})^2] \overset{g_n(x)\geqslant\kappa x^2}{\leqslant} \frac{1}{\kappa}\sum_n \mathbb{E}g_n(|X_n^{(c_n)}|) < \infty$$

mit dem Argument aus Korollar 11.3. □

iii) *Wenn die Reihe* $\sum_n \mathbb{E}g_n(|X_n|) < \infty$ *konvergiert, dann konvergiert* $\sum_{n=1}^N \left(X_n - \mathbb{E}X_n^{(c_n)}\right)$ *fast sicher.*

Beweis. Es gilt wegen $g_n|_{[c_n,\infty)} \geqslant \kappa'$

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_n| \geqslant c_n) \leqslant \sum_n \frac{1}{g_n(c_n)}\mathbb{E}g_n(|X_n|) \leqslant \frac{1}{\kappa'}\sum_n \mathbb{E}g_n(|X_n|) < \infty$$

sowie wegen der Monotonie von g_n

$$\sum_n \mathbb{E}g_n(|X_n^{(c_n)}|) \leqslant \sum_n \mathbb{E}g_n(|X_n|),$$

d.h. die Behauptung folgt aus ii). □

iv) *Wenn die Reihe* $\sum_n \int_0^{c_n} g_n'(x)\mathbb{P}(|X_n| \geqslant x)\,dx < \infty$ *konvergiert, dann konvergiert* $\sum_{n=1}^N \left(X_n - \mathbb{E}X_n^{(c_n)}\right)$ *fast sicher.*

Beweis. Es gilt wegen der Formel 1.8.k) auf Seite 5

$$\sum_n \mathbb{E}g_n(|X_n^{(c_n)}|) = \sum_n \int_0^\infty g_n'(x)\mathbb{P}(|X_n^{(c_n)}| \geqslant x)\,dx \leqslant \sum_n \int_0^{c_n} g_n'(x)\mathbb{P}(|X_n^{(c_n)}| \geqslant x)\,dx$$

sowie

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_n| \geqslant c_n) = \sum_n \mathbb{P}(|X_n^{(c_n)}| \geqslant c_n) \leqslant \sum_n \frac{1}{g_n(c_n)}\mathbb{E}g_n(|X_n^{(c_n)}|) \leqslant \frac{1}{\kappa'}\sum_n \mathbb{E}g_n(|X_n^{(c_n)}|) < \infty$$

und wir können, wie schon in iii), Teil ii) anwenden. □

v) *Wenn die Reihe* $\sum_n \mathbb{E}g_n(|X_n|/b_n)$ *konvergiert, dann konvergieren die Folgen* $\sum_{n=1}^N b_n^{-1}\left(X_n - \mathbb{E}X_n^{(b_n c_n)}\right)$ *und* $b_N^{-1}\sum_{n=1}^N \left(X_n - \mathbb{E}X_n^{(b_n c_n)}\right)$ *fast sicher. Wenn zudem* $g_n(x) \geqslant \kappa'' x$ *auf* $[0, c_n]$ *gilt, dann können wir in den Folgen* $\mathbb{E}X_n^{(b_n c_n)}$ *durch* 0 *ersetzen.*

Beweis. Wegen Kroneckers Lemma (Lemma 12.7) reicht es aus, die Konvergenz der erstgenannten Folge zu untersuchen; das folgt aber unmittelbar aus iii), angewendet auf X_n/b_n.

Wir zeigen noch den Zusatz: Mit den an g_n gestellten Bedingungen und der Monotonie von g_n haben wir

$$\sum_n \mathbb{E}\left|\frac{X_n^{(b_nc_n)}}{b_n}\right| \leqslant \frac{1}{\kappa''}\sum_n \mathbb{E}g_n\left(\left|\frac{X_n^{(b_nc_n)}}{b_n}\right|\right) \leqslant \frac{1}{\kappa''}\sum_n \mathbb{E}g_n\left(\left|\frac{X_n}{b_n}\right|\right) < \infty.$$

Das zeigt, dass wir in der Folge den Term $\mathbb{E}X_n^{(b_nc_n)}$ weglassen können. ☐

vi) *Wenn die Reihe $\sum_n \int_0^{c_n} g_n'(x)\mathbb{P}(|X_n| \geqslant b_n x)\,dx$ konvergiert, dann konvergieren die Folgen $\sum_{n=1}^N b_n^{-1}\left(X_n - \mathbb{E}X_n^{(b_nc_n)}\right)$ und $b_N^{-1}\sum_{n=1}^N \left(X_n - \mathbb{E}X_n^{(b_nc_n)}\right)$ fast sicher. Wenn zudem $g_n(x) \geqslant \kappa''' x$ auf $[c_n,\infty)$ gilt, dann können wir in den Folgen $\mathbb{E}X_n^{(b_nc_n)}$ durch $\mathbb{E}X_n$ ersetzen (sofern der Erwartungswert existiert).*

Beweis. Wegen Kroneckers Lemma (Lemma 12.7) reicht es aus, die Konvergenz der erstgenannten Folge zu untersuchen; das folgt aber unmittelbar aus iv), angewendet auf X_n/b_n.

Wir zeigen noch den Zusatz: Mit den an g_n gestellten Bedingungen und der Monotonie von g_n haben wir

$$\begin{aligned}\left|\sum_n \frac{1}{b_n}\left(\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X_n^{(b_nc_n)}\right)\right| &\leqslant \sum_n \mathbb{E}\left|\frac{X_n - X_n^{(b_nc_n)}}{b_n}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\kappa'''}\sum_n \mathbb{E}g_n\left(\left|\frac{X_n - X_n^{(b_nc_n)}}{b_n}\right|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\kappa'''}\sum_n \mathbb{E}g_n\left(\left|\frac{X_n}{b_n}\right|\right) < \infty.\end{aligned}$$

Das zeigt, dass wir in der Folge den Term $\mathbb{E}X_n^{(b_nc_n)}$ durch $\mathbb{E}X_n$ ersetzen können (sofern der Erwartungswert existiert). ☐

vii) Nun seien die ZV X_n iid und es gelte $\mathbb{E}(|X_n|^p) = \mathbb{E}(|X_1|^p) < \infty$ für ein $p \in (0,1)$. Wir wählen nun in v) $g(x) = x$, $c_n = 1$, $b_n = n^{1/p}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_n \int_0^{c_n} g_n'(x)\mathbb{P}(|X_n| \geqslant b_n x)\,dx &= \sum_n \int_0^1 \mathbb{P}(|X_n| \geqslant n^{1/p}x)\,dx \\ &= \int_0^1 \sum_n \mathbb{P}(|X_n| \geqslant n^{1/p}x)\,dx \\ &\overset{\text{iid}}{=} \int_0^1 \sum_n \mathbb{P}(|X_1| \geqslant n^{1/p}x)\,dx \\ &= \int_0^1 \sum_n \mathbb{P}(|X_1|^p/x^p \geqslant n)\,dx \\ &\leqslant \int_0^1 \mathbb{E}\frac{|X_1|^p}{x^p}\,dx\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}(|X_1|^p) \int_0^1 x^{-p}\, dx < \infty.$$

Daher zeigt v), dass die Folge

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N^{1/p}} \xrightarrow[N\to\infty]{p<1,\text{ f.s.}} 0.$$

viii) Nun seien die ZV X_n iid und es gelte $\mathbb{E}(|X_n|^p) = \mathbb{E}(|X_1|^p) < \infty$ für ein $p \in [1,2)$. Wir wählen in vi) $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, $c_n = 1$, $b_n = n^{1/p}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_n \int_0^{c_n} g_n'(x)\mathbb{P}(|X_n| \geqslant b_n x)\, dx &= \sum_n \int_0^1 x\, \mathbb{P}(|X_n| \geqslant n^{1/p}x)\, dx \\
&= \int_0^1 x \sum_n \mathbb{P}(|X_n| \geqslant n^{1/p}x)\, dx \\
&\overset{\text{iid}}{=} \int_0^1 x \sum_n \mathbb{P}(|X_1| \geqslant n^{1/p}x)\, dx \\
&= \int_0^1 x \sum_n \mathbb{P}(|X_1|^p/x^p \geqslant n)\, dx \\
&\leqslant \int_0^1 x\mathbb{E}\frac{|X_1|^p}{x^p}\, dx \\
&= \mathbb{E}(|X_1|^p) \int_0^1 x^{1-p}\, dx < \infty.
\end{aligned}$$

Daher zeigt vi), dass die Folge

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N - N\mathbb{E}X_1}{N^{1/p}} \xrightarrow[N\to\infty]{1\leqslant p<2,\text{ f.s.}} 0.$$

Bemerkung 1. Es gilt, wie im Kolmogorovschen SLLN die Umkehrung: *Für iid ZV X_n, $p \in (0,2)$ existiert $\mathbb{E}(|X_1|^p)$, wenn der f.s. Grenzwert $\lim_n n^{-1/p}\sum_{i=1}^n (X_i - a_k)$ für eine geeignete Folge $(a_i)_i$ existiert.* Für den Beweis verweisen wir auf Loéve [5, S. 255].

Bemerkung 2. Feller [3] hat gezeigt, dass im Fall von iid ZV $(X_n)_n$ mit $\mathbb{E}|X_1| = \infty$ und einer Folge $(b_n)_n$ so dass b_n/n wächst folgende Aussage gilt:

$$\limsup_n b_n^{-1}|X_1 + X_2 + \cdots + X_n| = \begin{cases} = 0 & \text{wenn } \sum_n \mathbb{P}(|X_1| \geqslant b_n) < \infty \\ = \infty & \text{wenn } \sum_n \mathbb{P}(|X_1| \geqslant b_n) = \infty. \end{cases}$$

■■

13 Der Zentrale Grenzwertsatz

Aufgabe 13.1. Lösung: Aufgrund der Konvexität von $x \mapsto e^x$ gelten die elementaren Ungleichungen

$$(1+x) \leqslant e^x \quad \text{und} \quad (1-x) \leqslant e^{-x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Somit also auch $(1+x) \leqslant e^x$ und $(1+x)(1-x)e^x \leqslant (1+x)$ und

$$(\star) \qquad (1-x^2)e^x \leqslant (1+x) \leqslant e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt folgende Variante der Bernoulli-Ungleichung

$$(\star\star) \qquad (1-x)^n \geqslant 1-nx \qquad \forall |x| \leqslant 1.$$

$\big[$Das sieht man induktiv. $n=1$ ist klar, der Induktionsschritt ist durch

$$\begin{aligned}(1-x)^{n+1} = (1-x)(1-x)^n &\geqslant (1-x)(1-nx)\\ &= 1-x-nx+nx^2\\ &\geqslant 1-x-nx = 1-(n+1)x\end{aligned}$$

gegeben.$\big]$

Setze nun $x = a_n/n$ in $(\star)$, potenziere und verwende $(\star\star)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die $|a_n/n| < 1$ erfüllen. Dann

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{a_n^2}{n}\right)e^{a_n} &= \left(1-n\,\frac{a_n^2}{n^2}\right)e^{na_n/n}\\ &\leqslant \left(1-\frac{a_n^2}{n^2}\right)^n e^{na_n/n} \leqslant \left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant e^{na_n/n} = e^{a_n}.\end{aligned}$$

Da $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, gilt auch $a_n^2/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und die Behauptung folgt.

Alternative Lösung 1: Da $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, gilt für geeignete Zahlen θ, θ' und große n

$$\begin{aligned}\theta' a \leqslant a_n \leqslant \theta a & \qquad\Longrightarrow\\ \left(1+\frac{\theta' a}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{\theta a}{n}\right)^n & \qquad\Longrightarrow\\ e^{\theta' a} \leqslant \liminf_n \left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant \limsup_n \left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant e^{\theta a}, & \qquad\Longrightarrow\end{aligned}$$

und da wir in der letzten Zeile $\theta, \theta' \to 1$ streben lassen können, erhalten wir das behauptete Resultat.

Alternative Lösung 2: Betrachte

$$\log\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n = n\log\left(1-\frac{a_n}{n}\right) = a_n\,\frac{\log\left(1-\frac{a_n}{n}\right)}{\frac{a_n}{n}}.$$

Da $\lim_n a_n = a$ gilt $\lim_n a_n/n = 0$ und wir können für den zweiten Faktor in der Rechnung oben mit de l'Hospital (Form "$\frac{0}{0}$") argumentieren:

$$\lim_{x\to 0, x>0}\frac{\log(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0, x>0}\frac{-1/(1-x)}{1} = -1$$

und daher

$$\lim_n \log\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n = \lim_n a_n\cdot\lim_n\frac{\log\left(1-\frac{a_n}{n}\right)}{\frac{a_n}{n}} = a\cdot(-1)$$

und die Behauptung folgt, indem wir die (bekanntermaßen stetige!) Exponentialfunktion auf beiden Seiten anwenden.

■■

Aufgabe 13.2. Lösung: Wir rechnen rückwärts, was die Kenntnis von $\mathcal{F}^{-1}$ voraussetzt und daher nicht fair ist. Der direkte Beweis verwendet den Residuenkalkül aus der Funktionentheorie oder unsere Rechnung in Beispiel 7.5. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|}\,e^{-ix\xi}\,d\xi &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\infty e^{-\xi}\,e^{-ix\xi}\,d\xi + \int_0^\infty e^{-\xi}\,e^{ix\xi}\,d\xi\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+ix}+\frac{1}{1-ix}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{2}{(1+ix)(1-ix)}\\ &= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 13.3. Lösung: Indirekter Beweis: Wir nehmen an, dass $\mathbb{V}X_1 = \infty$ gilt.

Schritt 1: Wir nehmen zunächst an, dass alle ZV symmetrisch sind. Dann gilt

$$X_n := X_n\mathbb{1}_{\{|X_n|\leqslant c\}} + X_n\mathbb{1}_{\{|X_n|>c\}} \sim X_n\mathbb{1}_{\{|X_n|\leqslant c\}} - X_n\mathbb{1}_{\{|X_n|>c\}} =: \tilde{X}_n$$

(hier werden nur die linken und rechten Ausläufer der Verteilung vertauscht – und die sind symmetrisch! Vgl. hierzu auch Aufgabe 7.4.) Wir schreiben $X_{c,n} := X_n\mathbb{1}_{\{|X_n|\leqslant c\}}$ und $X_n^c := X_n\mathbb{1}_{\{|X_n|>c\}}$ Daher erhalten wir für beliebige $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n\geqslant t) &= \mathbb{P}(X_{c,n}+X_n^c\geqslant t)\geqslant\mathbb{P}(X_{c,n}\geqslant t, X_n^c\geqslant 0)\\ \mathbb{P}(\tilde{X}_n\geqslant t) &= \mathbb{P}(X_{c,n}-X_n^c\geqslant t)\geqslant\mathbb{P}(X_{c,n}\geqslant t, X_n^c< 0)\end{aligned}$$

Weil die Ausdrücke auf der linken Seite gleich sind, erhalten wir durch Addition der beiden Abschätzungen

$$2\mathbb{P}(X_n\geqslant t) = \mathbb{P}(X_n\geqslant t)+\mathbb{P}(\tilde{X}_n\geqslant t)$$

$$\begin{aligned}&\geqslant \mathbb{P}(X_{c,n} \geqslant t, X_n^c \geqslant 0) + \mathbb{P}(X_{c,n} \geqslant t, X_n^c < 0)\\ &= \mathbb{P}(X_{c,n} \geqslant t).\end{aligned}$$

Daher gilt für $t = \kappa\sqrt{n}$ und beliebiges $\kappa > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geqslant \kappa\sqrt{n}\right) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_{c,i} \geqslant \kappa\sqrt{n}\right) \geqslant \frac{1}{8} \tag{*}$$

weil wir auf der r.S. den CLT auf die ZV $X_{c,i}$ anwenden können und weil $\sigma_{c,i}^2 := \mathbb{E}(X_{c,i}^2) \uparrow \mathbb{E}(X_i^2) = \infty$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_{c,i} \geqslant \kappa\sqrt{n}\right) \quad &\approx \quad \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_{c,i}}{\sigma_{c,i}\sqrt{n}} \geqslant \frac{\kappa}{\sigma_{c,i}}\right)\\ &\overset{n\gg 1}{\approx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\kappa/\sigma_{c,i}}^\infty e^{-x^2/2}\,dx\\ &\xrightarrow[c\to\infty]{\sigma_{c,i}\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Weil wir den Grenzwert $\kappa \to \infty$ in (*) bilden können, ist das ein Widerspruch zur angenommenen Konvergenz von $n^{-1/2}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} S$, d.h. es muß $\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{V}X_1 < \infty$ gelten.

Schritt 2: Nun seien die X_i nicht als symmetrisch angenommen. Wir betrachten statt der X_i die Symmetrisierungen $X_i - X_i'$ ($(X_i')_i$ ist eine iid Kopie der Folge $(X_i)_i$) und weil

$$\mathbb{V}X_i < \infty \iff \mathbb{V}(X_i - X_i') = 2\mathbb{V}X_i < \infty$$

können wir die oben gemachte Schlussfolgerung auf $X_i - X_i'$ anwenden.

■■

Aufgabe 13.4. Lösung:

(a) Wir wählen $\epsilon > 0, \delta > 0, \kappa > 0$ und $n_k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\mathbb{P}(|N_k/n_k - 1| > \delta) \leqslant \epsilon$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{N_k}}{\sigma\sqrt{n_k}} - \frac{S_{n_k}}{\sigma\sqrt{n_k}}\right| \geqslant \kappa\right)\\ &\quad= \quad \mathbb{P}\left(|S_{N_k} - S_{n_k}| \geqslant \kappa\sigma\sqrt{n_k}\right)\\ &\quad\leqslant \quad \mathbb{P}\left(|S_{N_k} - S_{n_k}| \geqslant \kappa\sigma\sqrt{n_k},\ |N_k - n_k| \leqslant \delta n_k\right) + \mathbb{P}\left(|N_k - n_k| > \delta n_k\right)\\ &\quad\leqslant \quad \mathbb{P}\left(|S_{N_k} - S_{n_k}| \geqslant \kappa\sigma\sqrt{n_k},\ |N_k - n_k| \leqslant \delta n_k\right) + \epsilon\\ &\underset{(X_n)_n \perp\!\!\!\perp (N_i)_i}{\overset{\text{iid}}{=}} \mathbb{P}\left(\left|S_{|N_k - n_k|}\right| \geqslant \kappa\sigma\sqrt{n_k},\ |N_k - n_k| \leqslant \delta n_k\right) + \epsilon\\ &\underset{(X_n)_n \perp\!\!\!\perp (N_i)_i}{\overset{\text{iid}}{\leqslant}} \mathbb{P}\left(\left|S_{|N_k - n_k|}\right| \geqslant \kappa\sigma\sqrt{n_k}\right) + \epsilon\\ &\quad\leqslant \quad \mathbb{P}\left(\max_{l \leqslant \delta n_k + 1} |S_l| \geqslant \kappa\sigma\sqrt{n_k}\right) + \epsilon\\ &\overset{\text{Kolmogorov}}{\leqslant} \frac{\mathbb{V}S_{\lfloor \delta n_k \rfloor + 1}}{\kappa^2\sigma^2 n_k} + \epsilon\\ &\quad\overset{\text{iid}}{=} \quad \frac{(\lfloor \delta n_k \rfloor + 1)\sigma^2}{\kappa^2\sigma^2 n_k} + \epsilon\\ &\quad\leqslant \quad \frac{\delta n_k + 1}{\kappa^2 n_k} + \epsilon \xrightarrow[n_k\to\infty]{} \frac{\delta}{\kappa^2} + \epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \frac{\delta}{\kappa^2} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

(b) Wir variieren den Beweis von (a) etwas. Mit den Bezeichnungen von (a) haben wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{N_k}}{\sigma\sqrt{n_k}}-\frac{S_{n_k}}{\sigma\sqrt{n_k}}\right|\geqslant\kappa\right)\\
&= \mathbb{P}\left(|S_{N_k}-S_{n_k}|\geqslant\kappa\sigma\sqrt{n_k}\right)\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(|S_{N_k}-S_{n_k}|\geqslant\kappa\sigma\sqrt{n_k},\ |N_k-n_k|\leqslant\delta n_k\right)+\mathbb{P}\left(|N_k-n_k|>\delta n_k\right)\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(|S_{N_k}-S_{n_k}|\geqslant\kappa\sigma\sqrt{n_k},\ |N_k-n_k|\leqslant\delta n_k\right)+\epsilon\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\max_{(1-\delta)n_k-1\leqslant l\leqslant(1+\delta)n_k+1}|S_l-S_{n_k}|\geqslant\kappa\sigma\sqrt{n_k},\ |N_k-n_k|\leqslant\delta n_k\right)+\epsilon\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\max_{(1-\delta)n_k-1\leqslant l\leqslant(1+\delta)n_k+1}|S_l-S_{n_k}|\geqslant\kappa\sigma\sqrt{n_k}\right)+\epsilon\\
&\overset{\text{iid}}{=} \mathbb{P}\left(\max_{-\delta n_k-1\leqslant l\leqslant\delta n_k+1}\left|S_{|l-n_k|}\right|\geqslant\kappa\sigma\sqrt{n_k}\right)+\epsilon\\
&= \mathbb{P}\left(\max_{l\leqslant\delta n_k+1}|S_l|\geqslant\kappa\sigma\sqrt{n_k}\right)+\epsilon\\
&\overset{\text{Kolmogorov}}{\leqslant} \frac{\mathbb{V}S_{\lfloor\delta n_k\rfloor+1}}{\kappa^2\sigma^2 n_k}+\epsilon\\
&\overset{\text{iid}}{=} \frac{(\lfloor\delta n_k\rfloor+1)\sigma^2}{\kappa^2\sigma^2 n_k}+\epsilon\\
&\leqslant \frac{\delta n_k+1}{\kappa^2 n_k}+\epsilon \xrightarrow[n_k\to\infty]{} \frac{\delta}{\kappa^2}+\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \frac{\delta}{\kappa^2} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

(c) Wir können das CLT auf die Folge Z_k anwenden und erhalten $Z_k \xrightarrow{\mathrm{d}} G \sim \mathsf{N}(0,1)$. Weil $Y_k-Z_k \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, können wir Slutsky verwenden und erhalten $Y_k=(Y_k-Z_k)+Z_k \xrightarrow{\mathrm{d}} G$.

■■

Aufgabe 13.5. Lösung: Wir schreiben $\phi=\phi_{X_1}$ für die charakteristische Funktion der X_n und wir nehmen $\sigma=1$ an. Es gilt

$$\phi_{Z_k}=\mathbb{E}e^{i\xi Z_k}=\mathbb{E}e^{i\xi S_{N_k}/\sqrt{N_k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}e^{i\xi S_n/\sqrt{n}}\mathbb{P}(N_k=n).$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathbb{E}e^{i\xi S_n/\sqrt{n}}\to e^{-\xi^2/2}$, d.h.

$$\forall\epsilon>0\quad\exists M=M(\epsilon)\in\mathbb{N}\quad\forall n>M(\epsilon)\ :\ \left|\mathbb{E}e^{i\xi S_n/\sqrt{n}}-e^{-\xi^2/2}\right|\leqslant\epsilon.$$

Mit diesen Beziehungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left|\phi_{Z_k}(\xi)-e^{-\xi^2/2}\right|\\
&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left|\mathbb{E}e^{i\xi S_n/\sqrt{n}}-e^{-\xi^2/2}\right|\mathbb{P}(N_k=n)\\
&=\sum_{n=0}^{M}\left|\mathbb{E}e^{i\xi S_n/\sqrt{n}}-e^{-\xi^2/2}\right|\mathbb{P}(N_k=n)+\sum_{n=M+1}^{\infty}\left|\mathbb{E}e^{i\xi S_n/\sqrt{n}}-e^{-\xi^2/2}\right|\mathbb{P}(N_k=n)\\
&\leqslant 2\sum_{n=0}^{M}\mathbb{P}(N_k=n)+\sum_{n=M+1}^{\infty}\left|\mathbb{E}e^{i\xi S_n/\sqrt{n}}-e^{-\xi^2/2}\right|\mathbb{P}(N_k=n)
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\sum_{n=0}^{M}\mathbb{P}(N_k = n) + \epsilon\sum_{n=M+1}^{\infty}\mathbb{P}(N_k = n)$$
$$\leqslant 2\mathbb{P}(N_k \leqslant M) + \epsilon$$
$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \epsilon \xrightarrow[\epsilon\downarrow 0]{} 0.$$

Das zeigt, dass $Z_k \xrightarrow[k\to\infty]{d} \mathsf{N}(0,\sigma^2)$, m.a.W. dass $Z_k/\sigma \xrightarrow[k\to\infty]{d} \mathsf{N}(0,1)$.

Aufgabe 13.6. Lösung: Für festes $x \in \mathbb{R}$ sehen wir

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mu N_t - t}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu}} \geqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{N_t - \mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}} \geqslant x\right) = \mathbb{P}\left(N_t \geqslant \tfrac{t}{\mu} + x\sqrt{\tfrac{\sigma^2 t}{\mu^3}}\right) = \mathbb{P}(T_{n(t)} \leqslant t)$$

wobei wir $n(t) := \lfloor \frac{t}{\mu} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}\rfloor$ setzen. Weiterhin gilt

$$\mathbb{P}(T_{n(t)} \leqslant t) = \mathbb{P}\left(\frac{T_{n(t)} - \mu n(t)}{\sigma\sqrt{n(t)}} \leqslant \frac{t - \mu n(t)}{\sigma\sqrt{n(t)}}\right)$$

und

$$\frac{t - \mu n(t)}{\sigma\sqrt{n(t)}} \approx \frac{t - \mu\left(\frac{t}{\mu} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}\right)}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}} = \frac{-x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu}}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}}$$
$$= \frac{-x\sigma\sqrt{t}}{\sigma\sqrt{t + x\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu}}}} = \frac{-x}{\sqrt{1 + x\sqrt{\frac{\sigma^2}{t\mu}}}} \xrightarrow[t\to\infty]{} -x.$$

Nun können wir den CLT auf T_n anwenden und erhalten

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\mu N_t - t}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu}} \geqslant x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$$

Aufgabe 13.7. Lösung: Weil $\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{V}X_1 = \sigma^2 < \infty$ gilt, genügt die Folge $(X_i^2)_i$ dem SLLN, d.h. wir erhalten

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s. wg. SLLN}} \sigma^2 \implies \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s. wg. SLLN}} \sigma \implies \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \sigma.$$

Der CLT zeigt andererseits, dass

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G \sim \mathsf{N}(0,\sigma^2)$$

und mit dem Satz von Slutsky (in der Form von Aufgabe 9.9(a)) folgt daher

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G \cdot \frac{1}{\sigma} \sim \mathsf{N}(0,1).$$

Aufgabe 13.8. Lösung:

(a) Es gilt

$$\mathbb{V}X_i = i^2\frac{1}{2i^2} + (-i)^2\frac{1}{2i^2} + 1^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) + (-1)^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = 2 - \frac{2}{i^2}$$

und wegen der Unabhängigkeit ist dann $\mathbb{V}S_n = \sum_{i=1}^n \left(2 - \frac{2}{i^2}\right)$ und daher

$$\frac{1}{n}\mathbb{V}S_n = 2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

weil bekanntlich die Reihe $\sum_{i=1}^\infty i^{-2}$ konvergiert.

(b) Wir betrachten die gestutzten ZV $X_i' := (-1) \vee X_i \wedge 1$. Offensichtlich sind die X_i' iid und es gilt $\mathbb{P}(X_i' = \pm 1) = \frac{1}{2}$, d.h. wir können auf die ZV X_i' und deren Summe $S_n' := \sum_{i=1}^n X_i'$ den CLT anwenden: $\mathbb{E}X_i' = 0$, $\mathbb{V}X_i' = 1$ und daher

$$\frac{S_n'}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G \sim \mathsf{N}(0,1).$$

Nun ist aber – ähnlich wie beim Drei-Reihen Satz (Satz 11.6) – das Konvergenzverhalten der gestutzten Folge das der nicht gestutzten Folge. Wir haben nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}|S_n - S_n'| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i - X_i'| = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (i-1)\frac{2}{i^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \frac{2}{i} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

weil bekanntlich $\sum_1^n \frac{1}{i} \approx \log n$ (Integralvergleichskriterium!) ist. Somit gilt insbesondere

$$\frac{S_n - S_n'}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

(die Konvergenz gilt sogar in L^1, aber das brauchen wir nicht) und wir erhalten mit dem Satz von Slutsky (Satz 9.21), dass

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{S_n'}{\sqrt{n}} + \frac{S_n - S_n'}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G + 0 = G \sim \mathsf{N}(0,1).$$

(c) Die Aussage widerspricht nicht dem CLT, da die Lindeberg-Bedingung nicht erfüllt ist: $s_n^2 = 2n - 2/n$ und daher gilt für $\epsilon > 0$ und hinreichend große n (so, dass $\epsilon s_n > 1$ ist):

$$s_n^{-2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2 \mathbb{1}_{\{|X_i|>\epsilon s_n\}}) = s_n^{-2}\sum_{i=1}^n 1 = \frac{n}{2n-2/n} = \frac{n^2}{2n^2-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0.$$

■■

Aufgabe 13.9. Lösung: (Beachten Sie den Fehler in der Angabe: statt $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{V}S_n = \infty$ muß es $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{V}X_n = \infty$ heißen). Wir rechnen die klassische Lindeberg-Bedingung (L′) nach. Für festes $\epsilon > 0$ und $X_i \sim \nu_i$ gilt

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^n \int_{|x|>\epsilon s_n} x^2\,\nu_i(dx) = \frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^n \int_{\{|x|>\epsilon s_n\}\cap[-C,C]} x^2\,\nu_i(dx)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{s_n^2} \sum_{\substack{\text{endliche Summe}\\ \text{wegen } s_n \to \infty}} \int_{\{|x|>\epsilon s_n\}\cap[-C,C]} x^2\,\nu_i(dx)\\
&\leqslant \frac{1}{s_n^2} \sum_{\substack{\text{endliche}\\ \text{Summe}}} \mathbb{V}X_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

weil nach Voraussetzung $s_n^2 \to \infty$. Damit können wir den CLT anwenden.

Aufgabe 13.10. Lösung: Es gilt $s_n^2 = \mathbb{V}X_2 + \cdots + \mathbb{V}X_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$.

- Die Lindeberg-Bedingung (L) gilt nicht: wir verwenden den Variablenwechsel $y = x/\sigma_k$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon s_k}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma_k^2}\,dx &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \int_{\epsilon s_k/\sigma_k}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2}\,dy\\
&\overset{s_k^2/\sigma_k^2\approx 2}{\approx} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \int_{\epsilon\sqrt{2}}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2}\,dy\\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon\sqrt{2}}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2}\,dy\\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon\sqrt{2}}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2}\,dy \approx 1.
\end{aligned}
$$

- Die Feller-Bedingung (F) gilt nicht:

$$
\lim_n \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = \lim_n \frac{\sigma_n^2}{s_n^2} = \lim_n \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}-1} = \frac{1}{2} \neq 0.
$$

- Die asymptotische Vernachlässigbarkeit (A) gilt nicht: wir verwenden den Variablenwechsel $y = x/\sigma_k$

$$
\begin{aligned}
\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}(|X_k| \geqslant \epsilon s_n) &= \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{2}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon s_n}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma_k^2}\,dx\\
&= \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon s_n/\sigma_k}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dx\\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon s_n/\sigma_n}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dx\\
&\approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon\sqrt{2}}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dx
\end{aligned}
$$

und dieser Ausdruck konvergiert nicht gegen Null, wenn $n \to \infty$.

---

14 Bedingte Erwartungen

Aufgabe 14.1. Lösung: Wir zeigen, dass die $\sigma(F_1, \dots, F_n)$-messbaren ZV alle von der Gestalt $\sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{F_i}$ sind. Dazu setzen wir

$$\Sigma := \{F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_k} : 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n\} \cup \{\emptyset\}.$$

Offensichtlich ist Σ eine σ-Algebra und es gilt $\{F_1, \dots, F_n\} \subset \Sigma \subset \sigma(F_1, \dots, F_n)$, d.h. es gilt $\Sigma = \sigma(F_1, \dots, F_n)$. Weil eine Σ-messbare Funktion der Beziehung $\{X > \lambda\} \in \Sigma$ genügen muß, folgt, dass X eine Treppenfunktion sein muß mit Treppenstufen aus Σ. Da die $F \in \Sigma$ disjunkte Vereinigungen der $F_1, \dots, F_n$ sind, können wir X also in der Form $\sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{F_i}$ darstellen.

Damit ist die r.S. von (14.7) Σ-messbar und die Behauptung folgt genauso wie in Beispiel 14.10 mit Hilfe von Lemma 14.9.

Aufgabe 14.2. Lösung: Wir schreiben $\Sigma_1 := \sigma(F_i, i \in \mathbb{N})$ und $\Sigma_2 = \sigma(F_1 \cup \dots \cup F_n, n \in \mathbb{N})$. Es gilt

$$F_1 \cup \dots \cup F_n \in \Sigma_1 \implies \Sigma_2 \subset \Sigma_1$$

und, wegen der Disjunktheit,

$$F_i = (F_1 \cup \dots \cup F_i) \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{i-1}) \in \Sigma_2 \implies \Sigma_1 \subset \Sigma_2.$$

Aufgabe 14.3. Lösung: Verwenden Sie die Formel (14.7). Es gilt

$$\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n)(\omega) = \sum_{i=1}^{2^n} 2^n \int_{(i-1)/2^n}^{i/2^n} X(\omega)\, d\omega\, \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]}(\omega).$$

Aufgabe 14.4. Lösung: Es gilt

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-m)^2+(y-m)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2}} = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

wobei f_X und f_Y jeweils Dichten von $\mathsf{N}(m,1)$-verteilten Zufallsvariablen sind. Da die gemeinsame Dichte das Produkt einzelner Dichten ist, sind X und Y unabhangig. Mit der Formel aus Definition 14.16 gilt

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}}.$$

Da X und Y unabhängig sind, gilt mit Satz 14.12: $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X) = m$ (denn $X \sim \mathsf{N}(m,1)$) also $a = m$ und $b = 0$.

Bemerkung: Allgemein gilt: Wenn $\mathbb{E}(Y|X = m) \sim \mathsf{N}(m,\sigma^2)$ und $X \sim \mathsf{N}(m_0,\tau^2)$ $(\sigma,\tau > 0)$, dann

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \frac{m_0\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2} + \frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}X.$$

Aufgabe 14.5. Lösung: Wir wissen

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \implies f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x \mid y)\cdot f_Y(y)$$

und

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy.$$

Damit haben wir $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(y)}$ falls $f_X(y) \neq 0$ und $= 0$ sonst.

Formal entspricht das der Bayesschen Formel: $f_{X,Y}$ entspricht $\mathbb{P}(A \cap B)$, $f_{X|Y}$ entspricht $\mathbb{P}(A \mid B)$ und f_X, f_Y entsprechen $\mathbb{P}(A)$ bzw. $\mathbb{P}(B)$.

Aufgabe 14.6. Lösung: Zur Erinnerung: Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ gilt für eine Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(Y)g(Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y\in B\}}g(Y)) = \int_{\{Y\in B\}} g(Y)\,d\mathbb{P} = \int_B g(t)\,\mathbb{P}(Y \in dt).$$

Entsprechend der Definition der bedingten Erwartung (Def. 14.3) genügt es zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X_1)\gamma^h(X_1)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X_1)h(X_1,\dots,X_n)) \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Das folgt aus

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X_1)\gamma^h(X_1))\\
&= \int_B \gamma^h(t_1)\,\mathbb{P}(X_1 \in dt_1)\\
&= \int_B \mathbb{E}h(t_1,X_2,\dots,X_n)\,\mathbb{P}(X_1 \in dt_1)\\
&= \int_B \int h(t_1,t_2,\dots,t_n)\;\mathbb{P}(X_2 \in dt_2)\dots\mathbb{P}(X_n \in dt_n)\mathbb{P}(X_1 \in dt_1)\\
&\quad |\text{Fubini. Beachte, dass } h \text{ messbar und beschränkt ist, und die}\\
&\quad |\text{gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen das Produkt der einzelnen}\\
&\quad |\text{Verteilungen ist, da die } X_i \text{ unabhängig sind.}\\
&= \int \mathbb{1}_B(t_1)h(t_1,t_2,\dots,t_n)\,\mathbb{P}(X_1 \in dt_1)\mathbb{P}(X_2 \in dt_2)\dots\mathbb{P}(X_n \in dt_n)\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X_1)h(X_1,X_2,\dots,X_n)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.7. Lösung: Offensichtlich gilt

$$X + Y = \mathbb{E}(X + Y \mid X + Y) = \mathbb{E}(X \mid X + Y) + \mathbb{E}(Y \mid X + Y).$$

Daher reicht es aus, $\mathbb{E}(X \mid X + Y) = \mathbb{E}(Y \mid X + Y)$ zu zeigen. Nach der Definition der bedingten Erwartung ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \int_{X+Y\in B} X\,d\mathbb{P} = \int_{X+Y\in B} Y\,d\mathbb{P} \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \\ \iff & \int X\mathbb{1}_B(X+Y)\,d\mathbb{P} = \int Y\mathbb{1}_B(X+Y)\,d\mathbb{P} \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \\ \iff & \iint x\mathbb{1}_B(x+y)\,\mathbb{P}(X \in dx, Y \in dy) = \int y\mathbb{1}_B(x+y)\,\mathbb{P}(X \in dx, Y \in dy) \quad \forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

und die letzte Gleichheit gilt, weil die ZV X, Y iid sind:

$$\begin{aligned} \iint x\mathbb{1}_B(x+y)\,\mathbb{P}(X \in dx, Y \in dy) &= \iint x\mathbb{1}_B(x+y)\,\mathbb{P}(X \in dx)\mathbb{P}(Y \in dy) \\ &\overset{x\leftrightarrow y}{\underset{\text{umbenennen}}{=}} \iint y\mathbb{1}_B(y+x)\,\mathbb{P}(X \in dy)\mathbb{P}(Y \in dx) \\ &\overset{X\leftrightarrow Y}{\underset{\text{umbenennen, iid}}{=}} \iint y\mathbb{1}_B(y+x)\,\mathbb{P}(Y \in dy)\mathbb{P}(X \in dx) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \iint y\mathbb{1}_B(y+x)\,\mathbb{P}(X \in dx)\mathbb{P}(Y \in dy) \\ &= \iint y\mathbb{1}_B(y+x)\,\mathbb{P}(X \in dx, Y \in dy). \end{aligned}$$

■■

Aufgabe 14.8. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] &\overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left((X-Y)^2 \mid X\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X^2 \mid X) - 2\mathbb{E}(XY \mid X) + \mathbb{E}(Y^2 \mid X)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}(Y \mid X) + \mathbb{E}(Y^2 \mid X)\right] \\ &\overset{\text{Ann.}}{=} \mathbb{E}\left[X^2 - 2X \cdot X + X^2\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher folgt $X = Y$ f.s.

■■

Aufgabe 14.9. Lösung: Wir definieren $Y := \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})$. Wenn $X \in L^2$, dann ist alles sehr einfach: Zunächst bemerken wir, dass

$$X \sim \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \implies \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2)$$

und daher gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X-Y)^2] &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &\overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(XY \mid \mathscr{F})) + \mathbb{E}(Y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{pull out}}{=} \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})) + \mathbb{E}(Y^2)\\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}(Y^2)\\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = 0,
\end{aligned}$$

was dann $X = Y$ f.s. zeigt.

Nun sei $X \in L^1$. Dann ist

$$X_n := (-n) \vee X \wedge n \in L^2 \quad \text{und} \quad Y_n := (-n) \vee Y \wedge n = (-n) \vee \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \wedge n \in L^2.$$

Nach dem eben Bewiesenen gilt $X_n \sim Y_n$ & $Y_n = \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) \implies X_n = Y_n$ f.s. $\implies X = Y$ f.s., weil $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ f.s. (und in L^1 wg. dominierter Konvergenz).

Wir müssen nur $Y_n = \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F})$ zeigen, da die Abschneideoperation die Verteilungsgleichheit erhält.

i) Y_n ist $\mathscr{F}$-messbar, da $Y_n := (-n) \vee Y \wedge n$ und Y $\mathscr{F}$-messbar ist.

ii) Mit der bedingten Jensen-Ungleichung für die konkave Funktion $x \mapsto n \wedge x$ erhalten wir
$$\mathbb{E}(X \wedge n \mid \mathscr{F}) \leqslant \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \wedge n = Y \wedge n.$$

iii) Wenn wir in ii) den Erwartungswert bilden, sehen wir
$$\mathbb{E}(X \wedge n) \leqslant \mathbb{E}(Y \wedge n) \overset{X\sim Y}{=} \mathbb{E}(X \wedge n),$$
also kann in der Ungleichung in ii) nur auf einer Nullmenge „$<$" gelten, d.h. wir haben
$$\mathbb{E}(X \wedge n \mid \mathscr{F}) = Y \wedge n.$$

iv) Analog erhalten wir dann noch
$$\mathbb{E}((-n) \vee X \wedge n \mid \mathscr{F}) = (-n) \vee Y \wedge n.$$

■■

Aufgabe 14.10. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y \leqslant c\}} X\right] &\overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y \leqslant c\}} X \mid Y)\right]\\
&\overset{\text{Messbarkeit}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y \leqslant c\}} \mathbb{E}(X \mid Y)\right]\\
&\overset{\text{Voraussetzg.}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y \leqslant c\}} Y\right].
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$0 = \mathbb{E}\left[(X - Y)\mathbb{1}_{\{Y \leqslant c\}}\right] = \mathbb{E}\left[(X - Y)(\mathbb{1}_{\{X > c\} \cap \{Y \leqslant c\}} + \mathbb{1}_{\{X \leqslant c\} \cap \{Y \leqslant c\}})\right]$$

und damit (beachten Sie für Ungleichung die Menge in den Indikatorfunktionen!)

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X>c\}\cap\{Y\leqslant c\}}\right] = -\mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\leqslant c\}\cap\{Y\leqslant c\}}\right].$$

Alle Rechnungen bis hierher gelten auch, wenn wir X und Y vertauschen, daher erhalten wir auch

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[(Y-X)\mathbb{1}_{\{Y>c\}\cap\{X\leqslant c\}}\right] = -\mathbb{E}\left[(Y-X)\mathbb{1}_{\{X\leqslant c\}\cap\{Y\leqslant c\}}\right].$$

Und daher folgt zunächst

$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{\{X\leqslant c\}\cap\{Y\leqslant c\}}\right] = 0$$

mithin

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[(X-Y)(\mathbb{1}_{\{X>c\}\cap\{Y\leqslant c\}}\right] = 0 \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \mathbb{E}\left[(Y-X)(\mathbb{1}_{\{Y>c\}\cap\{X\leqslant c\}}\right] = 0.$$

Also ist entweder $X = Y$ fast sicher oder es gilt

$$\mathbb{P}(\{X>c\}\cap\{Y\leqslant c\}) = \mathbb{P}(\{Y>c\}\cap\{X\leqslant c\}) = 0.$$

Aber auch hieraus folgt $X = Y$ fast sicher, denn

$$0 \leqslant \mathbb{P}\{X \neq Y\} = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(\{Y\leqslant q\}\cap\{X>q\})\right)\cup\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(\{X\leqslant q\}\cap\{Y>q\})\right)\right) \leqslant 0.$$

■■

Aufgabe 14.11. Lösung: Wir schreiben $\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Es gilt

$$\mathbb{E}(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} - (n-1)\cdot\frac{1}{n-1} = 1 - 1 = 0.$$

Weiter ist

$$\sigma(X_n) = \sigma\left(\left(0, \tfrac{1}{n}\right], \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n-1}\right], \left(\tfrac{1}{n-1}, 1\right]\right) \quad \text{und} \quad \mathscr{F}_n = \sigma\left(\left(0, \tfrac{1}{n}\right], \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n-1}\right], \dots \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right], \left(\tfrac{1}{2}, 1\right]\right).$$

In Hinblick auf Beispiel 14.10 haben wir

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k-1}\right]\right)\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right]}.$$

Nun wissen wir aufgrund der Definition von X_n

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \left(0, \tfrac{1}{n}\right]\right) = \frac{\mathbb{E}\left(X_{n+1}\mathbb{1}_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}\right)}{\mathbb{P}\left(\left(0, \frac{1}{n}\right]\right)} = \frac{\mathbb{E}\left(X_{n+1}\right)}{\mathbb{P}\left(\left(0, \frac{1}{n}\right]\right)} = 0$$

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k-1}\right]\right) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

also gilt insgesamt $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = 0$.

■■

Aufgabe 14.12. Lösung: Für $F \in \mathscr{F}$ gilt

$$\int_F \mathbb{E}(\mathrm{id} \mid \mathscr{F})\, d\lambda \overset{\text{Def.}}{=} \int_F \omega\, d\omega = \begin{Bmatrix} 0 & \text{wenn } F \text{ abzählbar} \\ \dfrac{1}{2} & \text{wenn } F^c \text{ abzählbar} \end{Bmatrix} = \int_F \frac{1}{2}\, d\omega. \tag{14.1}$$

Weil $\omega \mapsto \frac{1}{2}$ offensichtlich $\mathscr{F}$-messbar ist, folgt $\mathbb{E}(\mathrm{id} \mid \mathscr{F}) = \frac{1}{2}$.

■■

Aufgabe 14.13. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| \geqslant a \mid \mathscr{F}) &\leqslant \mathbb{P}(X^2 \geqslant a^2 \mid \mathscr{F}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X^2 \geqslant a^2\}} \mid \mathscr{F}) \\ &\leqslant \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{a^2}\mathbb{1}_{\{X^2 \geqslant a^2\}} \mid \mathscr{F}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathscr{F}\right). \end{aligned}$$

■■

Aufgabe 14.14. Lösung: Wir schreiben $Y := X_1$ und $X := X_1 + X_2$. Wir wissen aus Korollar 14.18, dass $\mathbb{P}(Y \in dy \mid X = x)$ die Dichte

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{Y,X}(y,x)}{f_X(x)}$$

hat. Der Nenner lässt sich wegen der Unabhängigkeit sofort aus $X_1+X_2 \sim \mathsf{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ ablesen:

$$f_X(x) = f_{X_1+X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right].$$

Um die gemeinsame Verteilung von (Y, X) zu bestimmen, betrachten wir für eine beschränkte messbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\int f(y,x) f_{Y,X}(y,x)\, dy\, dx = \mathbb{E} f(Y,X) = \mathbb{E} f(X_1, X_1+X_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \iint f(x_1, x_1+x_2) \exp\left[-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \exp\left[-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \iint f(y,x) \exp\left[-\frac{(y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \exp\left[-\frac{(y-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{f_{Y,X}(y,x)}{f_X(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}} \exp\left[-\frac{(y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \exp\left[-\frac{(y-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] \exp\left[\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{(y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}\right]. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass der Ausdruck in den geschweiften Klammern gerade $(y-\mu_x)^2/\sigma_x^2$ ist. Dazu verwenden wir die in der Aufgabe angegebenen Ausdrücke für μ_x und σ_x und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{(y-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} &= \frac{\left(y-\mu_1-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x-\mu_1-\mu_2)\right)^2}{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \\
&= \left(y-\mu_1-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x-\mu_1-\mu_2)\right)^2 \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \\
&= (y-\mu_1)^2\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} - 2(y-\mu_1)\frac{1}{\sigma_2^2}(x-\mu_1-\mu_2) + (x-\mu_1-\mu_2)^2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\frac{1}{\sigma_2^2}
\end{aligned}$$

und wir splitten nun mit Hilfe der Identität $-2ab=(a-b)^2-a^2-b^2$ den mittleren Term auf; $a=y-\mu_1$ und $b=x-\mu_1-\mu_2$. Damit

$$\begin{aligned}
&= (y-\mu_1)^2\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right) + \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\frac{1}{\sigma_2^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right)(x-\mu_1-\mu_2)^2 + (y-x+\mu_2)^2\frac{1}{\sigma_2^2} \\
&= (y-\mu_1)^2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} - (x-\mu_1-\mu_2)^2\frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} + (x-y-\mu_2)^2\frac{1}{\sigma_2^2}.
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 14.15. Lösung: Die Mengen der σ-Algebra $\sigma(X)$ sind von der Form $\{X\in A\}$ wo $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Wir müssen daher zeigen

$$\begin{aligned}
&\int_F \mathbb{P}(V\in B\mid X)\,d\mathbb{P} = \int_F \mathbb{P}(W\in B\mid X)\,d\mathbb{P} \quad \forall F\in\sigma(X), B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}) \\
\iff &\int_F \mathbb{1}_B(V)\,d\mathbb{P} = \int_F \mathbb{1}_B(W)\,d\mathbb{P} \quad \forall F\in\sigma(X), B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}) \\
\iff &\int \mathbb{1}_A(X)\mathbb{1}_B(V)\,d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_A(X)\mathbb{1}_B(W)\,d\mathbb{P} \quad \forall A,B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}) \\
\iff &(V,X)\sim(W,X).
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 14.16. Lösung:

(a) Mit Hilfe des Satzes von Tonelli erhalten wir

$$P(A\times B) := \int_A K(x,B)\,P_1(dx) = \int_A\int_B xe^{-xt}\,dt\,P_1(dx) = \int_{A\times B} xe^{-xt}\lambda\times P_1(dt,dx)$$

wobei λ das Lebesguemaß auf $(0,\infty)$ bezeichnet. Offensichtlich ist $P(\Gamma) := \int_\Gamma xe^{-xt}\lambda\times P_1(dt,dx)$ ein Maß auf $\big((0,\infty)^2, \mathscr{B}((0,\infty)^2)\big)$, das eindeutig durch die Rechtecke der Form $A\times B\in\mathscr{B}(0,\infty)\times\mathscr{B}(0,\infty)$ bestimmt ist.

Weiter ist

$$P((0,\infty)^2) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty xe^{-xt}\,dt\right)P_1(dx) = \int_0^\infty 1\,P_1(dx) = 1.$$

(b) Die Rechnung in Teil (a) zeigt auch das folgende, wenn wir die Variablen in Koordinatenrichtung 1 mit t und in Koordinatenrichtung 2 mit x bezeichnen:

$$\begin{aligned}
P(X_1X_2 \in A) = \int \mathbb{1}_A(X_1X_2)\,dP_1 &= \iint \mathbb{1}_A(tx)xe^{-xt}\,dt\,P_1(dx) \\
&= \int \left(\int \mathbb{1}_A(tx)xe^{-xt}\,dt\right) P_1(dx) \\
&= \int \left(\int \mathbb{1}_A(u)e^{-u}\,du\right) P_1(dx) \\
&= \int 1\,P_1(dx) \int_A e^{-u}\,du = \int_A e^{-u}\,du.
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.17. Lösung: Da $X \perp\!\!\!\perp Y$, gilt für alle $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[h(X,Y)\mathbb{1}_B(Y)\big] &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}h(X,y)\mathbb{1}_B(y)\,\mathbb{P}(Y \in dy) \\
&= \int_B \mathbb{E}h(X,y)\,\mathbb{P}(Y \in dy).
\end{aligned}$$

Wegen Satz 14.23 gilt auch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[h(X,Y)\mathbb{1}_B(Y)\big] &= \int_{\mathbb{R}^d} \int h(x,y)\,N(y,dx)\mathbb{1}_B(y)\mathbb{P}(Y \in dy) \\
&= \int_B \underbrace{\left(\int h(x,y)\,N(y,dx)\right)}_{=\mathbb{E}(h(X,Y)|Y=y) \text{ vgl. (14.15)}} \mathbb{P}(Y \in dy),
\end{aligned}$$

und wir finden die Behauptung folgt (weil B eine beliebige messbare Menge ist).

---

15 Charakteristische Funktionen – Anwendungen

Aufgabe 15.1. Lösung:

(a) Es ist $1 - \operatorname{Re}\phi(2\xi) = \mathbb{E}(1 - \cos(2\xi X))$. Mit den üblichen Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}1 - \cos(2\xi x) &= 2\sin^2(\xi x)\\ &= 2(1 - \cos^2(\xi x))\\ &= 2(1 + \cos(\xi x))(1 - \cos(\xi x))\\ &\leqslant 4(1 - \cos(\xi x)),\end{aligned}$$

und wenn wir diese Ungleichung gegen $\mathbb{P}(X \in dx)$ integrieren, folgt die Behauptung.

(b) Wenn ψ die charakteristische Funktion von X ist, dann ist $|\psi(\xi)|^2$ die charakteristische Funktion der Symmetrisierung $X - X'$, d.h. wir können Teil a) direkt für $\operatorname{Re}\phi(\xi) = |\psi(\xi)|^2$ verwenden.

■■

Aufgabe 15.2. Lösung: Wir präsentieren drei Lösungen, die aber alle folgenden Variablenwechsel nutzen:

$$\chi(\xi) := \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \phi(\eta)\,d\eta \overset{\eta=\xi\tau}{=} \int_0^1 \phi(\xi\tau)\,d\tau.$$

Lösung 1: Wir schreiben $\phi(\xi) = \mathbb{E}e^{i\xi X}$ und $U \sim \mathsf{U}[0,1]$, $U \perp\!\!\!\perp X$. Dann gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi UX} = \int \mathbb{E}e^{i\xi uX}\,\mathbb{P}(U \in du) = \int_0^1 \mathbb{E}e^{i\xi uX}\,du,$$

also ist χ die charakteristische Funktion der ZV UX.

Lösung 2: Wir verwenden die Tatsache, dass $\chi(0) = 1$ gilt und dass χ positiv definit ist. Um das zu zeigen, wählen wir $n \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{i,k=1}^n \chi(\xi_i - \xi_k)c_i\bar{c}_k &= \sum_{i,k=1}^n \int_0^1 \phi((\xi_i - \xi_k)\tau)\,d\tau\,c_i\bar{c}_k\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i,k=1}^n \phi((\xi_i - \xi_k)\tau)c_i\bar{c}_k\right) d\tau\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i,k=1}^n \phi(\xi_i\tau - \xi_k\tau)c_i\bar{c}_k\right) d\tau \geqslant 0,\end{aligned}$$

da ϕ positiv definit ist. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Bochner, Satz 15.12.

Lösung 3: Wir schreiben das Integral $\int_0^1 \phi(\xi\tau)\,d\tau$ als Riemann-Summe

$$\chi(\xi) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\phi(kn^{-1}\xi)$$

und wir bemerken, dass Konvexkombinationen von charakteristischen Funktionen wieder charakteristische Funktionen sind (siehe unten) und dass punktweise Limiten von charakteristischen Funktionen mit einem *stetigen* Grenzwert wieder charakteristische Funktionen sind (Stetigkeitssatz von Lévy, Satz 15.2).

Nun zu den Konvexkombinationen: $\phi(\xi), \psi(\xi)$ seien charakteristische Funktionen. Dann ist $\theta(\xi) := \frac{1}{2}\phi(\xi) + \frac{1}{2}\psi(\xi)$ wieder eine charakteristische Funktion. Das sieht man entweder über positive Definitheit, oder mit folgender Bemerkung:

$$\phi(\xi) = \mathbb{E}e^{i\xi X}, \quad \psi(\xi) = \mathbb{E}e^{i\xi Y}, \quad Z := \epsilon X + (1-\epsilon)Y, \quad \epsilon \sim \mathsf{B}(\tfrac{1}{2}), \epsilon \perp\!\!\!\perp X, Y.$$

Dann gilt wegen der Unabhängigkeit

$$\mathbb{E}e^{i\xi Z} = \mathbb{P}(\epsilon = 1)\mathbb{E}e^{i\xi X} + \mathbb{P}(\epsilon = 0)\mathbb{E}e^{i\xi Y} = \frac{1}{2}\phi(\xi) + \frac{1}{2}\psi(\xi),$$

also ist $\theta(\xi)$ eine charakteristische Funktion.

■■

Aufgabe 15.3. Lösung: Wenn $X \equiv c$, dann ist $\phi(\xi) = e^{ic\xi}$ und die Behauptung ist klar.

Umgekehrt wissen wir aus Satz 7.6.h)/g), dass

$$\mathbb{E}X = -i\phi'(0), \quad \mathbb{E}(X^2) = -\phi''(0), \quad \text{und} \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = -\phi''(0) + (\phi'(0))^2.$$

Durch Ableiten von e^f sehen wir

$$\begin{aligned} \phi'(\xi) &= f'(\xi)e^{f(\xi)} \implies \phi'(0) = f'(0) \\ \phi''(\xi) &= \left(f''(\xi) + (f'(\xi))^2\right)e^{f(\xi)} \implies \phi''(0) = f''(0) + (f'(0))^2. \end{aligned}$$

Mithin haben wir

$$\mathbb{V}X = -f''(0) - (f'(0))^2 + (f'(0))^2 = -f''(0),$$

d.h. $f''(0) = 0 \implies \mathbb{V}X = 0 \implies X \equiv \mathbb{E}X$ f.s. Weil $f(\xi) = |\xi|^p$ für $p > 2$ zweimal differenzierbar ist und $f''(0) = f'(0) = 0$ ist, folgt, dass eine ZV konstant sein muss und wegen $f'(0) = 0$ auch $X \equiv 0$ gelten muss. Dann wäre aber $\phi \equiv 1$. Somit kann $e^{|\xi|^p}$ keine charakteristische Funktion sein.

■■

Aufgabe 15.4. Lösung: „$\Rightarrow$“: folgt direkt aus der Definition der d-Konvergenz, da $\xi \mapsto e_\xi(x) := e^{i\xi x}$ eine (komplexwertige) C_b-Funktion ist. Beachte, dass eine komplexe Funktion genau dann stetig und beschränkt ist, wenn das auf den Real- und Imaginärteil zutrifft. (Warum ?). Damit

$$\chi_n(\xi) = \mathbb{E}e_\xi(X_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}e_\xi(0) = 1$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

„$\Leftarrow$“: Nun sei $\chi_n(\xi) \to 1$ in einer Nullumgebung, z.B. $[-\delta, \delta]$ angenommen. Wir schreiben $X_n \sim \mu_n$. Die *truncation inequality* (Satz 7.11) zeigt dann

$$\mu_n\big(\big[-\tfrac{1}{\delta}, \tfrac{1}{\delta}\big]\big) \leqslant \frac{7}{\delta}\int_0^\delta (1 - \operatorname{Re}\chi_n(\xi))\, d\xi$$

und die rechte Seite konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null. Damit folgt, dass die $(\mu_n)_n$ straff sind. Nach Satz 15.1 gibt es also ein W-Maß μ und eine Teilfolge $\mu_{n(j)}$ so dass $\mu_{n(j)} \xrightarrow{w} \mu$ oder $X_{n(j)} \xrightarrow{d} X$. Nach Voraussetzung ist $\hat\mu|_{[-\delta,\delta]} = 1$, d.h. nach Korollar 15.5 ist $|\hat\mu| \equiv 1$ und nach Satz 15.3 ist der Limes $X \equiv c$ degeneriert und somit von der Form $\hat\mu(\xi) = e^{i\xi c}$. Da aber $\hat\mu|_{[-\delta,\delta]} = 1$, gilt sogar $\hat\mu \equiv 1$ und $X \equiv 0$. Nun greift aber der Satz von Lévy (Satz 15.2) und zeigt, dass nicht nur eine Teilfolge, sondern die gesamte Folge gegen $X \equiv 0$ konvergiert.

■■

Aufgabe 15.5. Lösung: Die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert d-Konvergenz und somit

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{i\xi X_k} \overset{\text{u.a.}}{=} \mathbb{E}e^{i\xi S_n} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}e^{i\xi S}$$

d.h. $\prod_{k=1}^\infty \mathbb{E}e^{i\xi X_k}$ konvergiert und ist die char. Funktion einer ZV.

Umgekehrt: die FT von S_n ist $\mathbb{E}e^{i\xi S_n} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{i\xi X_k}$. Da nach Voraussetzung

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{i\xi X_k} \xrightarrow{n\to\infty} h(\xi)$$

und da $h(\xi) \neq 0$ auf U, schließen wir, dass

$$\lim_{m,n\to\infty} \prod_{k=m}^n \mathbb{E}e^{i\xi X_k} = 1 \quad \forall \xi \in U.$$

Hier geht $h(\xi) \neq 0$ in U ein. Nun greift Aufgabe 15.4 und zeigt, dass $S_n - S_{m-1} = X_n + \dots + X_m \xrightarrow{d} 0$. Da der limes trivial ist, haben wir es sofort mit $\mathbb{P}$-Konvergenz zu tun. Somit ist $(S_n)_n$ eine $\mathbb{P}$-Cauchy-Folge und als solche (vgl. Aufgabe 9.3(c)) auch $\mathbb{P}$-konvergent.

■■

Aufgabe 15.6. Lösung: Wir zeigen, dass die charakteristische Funktion der ZV $(X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ punktweise gegen $e^{-\xi^2/2}$ konvergiert.

Dazu benötigen wir zunächst die charakteristische Funktion einer Poisson-ZV $X \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$, vgl. z.B. den Anhang, 222, Eintrag A.6.9:

$$\mathbb{E}e^{i\xi X} = \exp\left(-\lambda(1-e^{i\xi})\right).$$

Mithin

$$\begin{aligned}
\log \mathbb{E}e^{i\xi(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}} &= \log\left(e^{-i\xi\sqrt{\lambda}}\mathbb{E}e^{i(\xi/\sqrt{\lambda})X}\right) \\
&= \log\left(e^{-i\xi\sqrt{\lambda}}e^{-\lambda\left(1-e^{i\xi/\sqrt{\lambda}}\right)}\right) \\
&= \log\left(e^{-\lambda\left(1-e^{i\xi/\sqrt{\lambda}}+i\xi/\sqrt{\lambda}\right)}\right) \\
&= \frac{e^{i\xi/\sqrt{\lambda}}-1-i\xi/\sqrt{\lambda}}{1/\lambda}.
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Substitution $\mu = 1/\sqrt{\lambda}$ und wenden zweimal den Satz von L'Hospital an:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} \log \mathbb{E}e^{i\xi(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}} &= \lim_{\mu\to 0}\frac{e^{i\mu\xi}-1-i\xi\mu}{\mu^2} \\
&= \lim_{\mu\to 0}\frac{i\xi e^{i\mu\xi}-i\xi}{2\mu} \\
&= \lim_{\mu\to 0}\frac{(i\xi)^2}{2} = -\frac{\xi^2}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.7. Lösung: Weil X und Y diskret sind, sind $X(\Omega)$ und $Y(\Omega)$ höchstens abzählbar und daher ist auch die Wertemenge von $Z := X+Y$,

$$Z(\Omega) = \{x+y : x \in X(\Omega), Y \in Y(\Omega)\}$$

höchstens abzählbar, d.h. Z ist auch diskret.

Wir schreiben $X(\Omega) = (\xi_j)_j$, $\mathbb{P}(X=\xi_j) = a_j$ und $Y(\Omega) = (\eta_k)_k$, $\mathbb{P}(Y=\eta_k) = b_k$. Für die charakteristischen Funktionen gilt dann

$$\phi_X(t) = \sum_j a_j e^{it\xi_j} \quad \text{und} \quad \phi_Y(t) = \sum_k b_k e^{it\eta_k}$$

und nach dem Faltungssatz gilt

$$\phi_Z(t) = \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = \sum_j\sum_k a_j b_k e^{it(\xi_j+\eta_k)}.$$

Daraus sehen wir, dass die Sprünge (also die Wahrscheinlichkeiten) der Faltung der Verteilungsfunktionen $\Delta(F*G)(z)$ die Form $\sum_{\xi_j+\eta_k=z} a_j b_k$ haben.

Aufgabe 15.8. Lösung:

(a) Wir schreiben μ für das von F induzierte Maß, d.h. $X \sim \mu$. Damit gilt $\mu\{x\} = \Delta F(x)$. Dem Hinweis folgend verwenden wir Fubini und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ix\xi}\phi(\xi)\,d\xi &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ix\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\,\mu(dt)\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i(t-x)\xi}\,d\xi\right)\mu(dt) \\ &= \mu\{x\} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{x\}} \frac{\sin T(t-x)}{T(t-x)}\,\mu(dt).\end{aligned}$$

Weil für $t \neq x$ der Limes $\lim_{T\to\infty} \frac{\sin T(t-x)}{T(t-x)} = 0$, folgt die Behauptung mit Hilfe von dominierter Konvergenz (mit der Majorante $\frac{\sin u}{u} \leqslant 1 \in L^1(\mu)$).

(b) Es gilt

$$|\phi(\xi)|^2 = \left(\int e^{ix\xi}\,\mu(dx)\right)\left(\int e^{-iy\xi}\,\mu(dy)\right).$$

Wenn wir diese charakteristische Funktion (die zur symmetrisierten ZV $X - X'$, X, X' iid, gehört) in (a) mit $x = 0$ einsetzen, erhalten wir direkt aus (a)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|^2\,d\xi = \Delta(F * F)(0) = \mu * \mu\{0\} = \int \mu\{x\}\,\mu(dx) = \sum_{x\in D}(\mu\{x\})^2.$$

(c) Es gelte $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|\,d\xi = 0$. Dann finden wir wegen Teil (a)

$$\begin{aligned}|\Delta F(x)| &= |F(x) - F(x-)| \\ &= \left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ix\xi}\,\phi(\xi)\,d\xi\right| \\ &\leqslant \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|e^{-ix\xi}\,\phi(\xi)\right|\,d\xi \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|\,d\xi \\ &= 0,\end{aligned}$$

also hat die Verteilungsfunktion keine Sprünge.

Nun sei F als stetig angenommen. Dann sehen wir mit der Cauchy–Schwarz Ungleichung und wegen Teil (b)

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|\,d\xi \leqslant \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \xrightarrow[T\to\infty]{} \left(\sum_{x\in\mathbb{R}}|F(x) - F(x-)|^2\right)^{1/2} = 0.$$

(d) Wir zerlegen $F = F^c + F^d$ und entsprechend $\phi = \phi_c + \phi_d$. Wir können dann noch normieren $\phi_c/\phi_c(0)$ und $\phi_d/\phi_d(0)$, so dass wir es wieder mit charakteristischen Funktionen zu tun haben. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|\,d\xi &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\int e^{ix\xi}\,dF(x)\right|\,d\xi \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\int e^{ix\xi}\,dF^c(x) + \int e^{ix\xi}\,dF^d(x)\right|\,d\xi \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\int e^{ix\xi}\,dF^c(x) + \left[\sum_{x\in D} e^{ix\xi}\Delta F(x)\right]\right|\,d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{x\in D} e^{ix\xi}\Delta F(x)\right| d\xi - \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\int e^{ix\xi}\,dF^c(x)\right| d\xi\\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{x\in D} e^{ix\xi}\Delta F(x)\right| d\xi - \phi_c(0)\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\phi_c(\xi)}{\phi_c(0)}\right| d\xi\\
&\xrightarrow[T\to\infty]{\text{wegen (c)}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{x\in D} e^{ix\xi}\Delta F(x)\right| d\xi - 0.
\end{aligned}$$

Die umgekehrte Abschätzung geht ganz ähnlich, wir verwenden nur die ,,normale“ Dreiecksungleichung.

(e) $\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|^p\,d\xi = 0 \iff F$ ist stetig. Die Richtung ,,$\Rightarrow$“ folgt mit Hilfe von (a) und der Jensenschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
|\Delta F(x)|^p &= \left|\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T} e^{-ix\xi}\phi(\xi)\,d\xi\right|^p\\
&\leqslant \lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\left|e^{-ix\xi}\phi(\xi)\right|^p\,d\xi\\
&= \lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|^p\,d\xi\\
&= 0
\end{aligned}$$

also ist F stetig. Umgekehrt sei F stetig. Dann haben wir wegen $|\phi|\leqslant 1$

$$\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\left|e^{-ix\xi}\phi(\xi)\right|^p\,d\xi \leqslant \lim_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T}\left|e^{-ix\xi}\phi(\xi)\right|\,d\xi = 0.$$

Wir schreiben nun $\|\phi\|_{T,p}^p := (2T)^{-1}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|^p\,d\xi$. Weil das eine Norm ist, haben wir, mit der Notation vom Beweis von (c)

$$\|\phi\|_{T,p}\leqslant\|\phi_d\|_{T,p}+\|\phi_c\|_{T,p}\quad\text{und}\quad\|\phi\|_{T,p}\geqslant\|\phi_d\|_{T,p}-\|\phi_c\|_{T,p}.$$

Nun wissen wir aber, dass $\|\phi_c\|_{T,p}\to 0$ für $T\to\infty$, also haben wir

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi(\xi)|^p\,d\xi = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi_d(\xi)|^p\,d\xi = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{x\in D} e^{ix\xi}\Delta F(x)\right|^p d\xi.$$

(Lévy’s Formel (b) ergibt sich nun daraus für $p=2$ mit Plancherel.)

■■

Aufgabe 15.9. Lösung: Wir schreiben $X\sim\mu$. Die Verteilung μ kann folgendermaßen zerlegt werden:

$$\mu = p\mu_{ac}+q\mu_{sc}+r\mu_d,\quad p+q+r=1,$$

und μ_{ac} ist der absolutstetige Anteil, μ_{sc} ist der singulär-stetige Anteil und μ_d ist der diskrete Anteil. Die Wahl von p,q,r normiert jedes dieser Maße zu einem W-Maß. In Aufgabe 2.19 wird die Zerlegung $\mu=\mu_c+r\mu_d$ gezeigt, wobei $\mu_c=p\mu_{ac}+q\mu_{sc}$ gilt. Um μ_c zu zerlegen benötigt man die Lebesgue-Zerlegung, vgl. [Schilling-MI], Aufgabe 2, Seite 103.

Es sei $F(x)=\mu(-\infty,x]$ die rechtsstetige Verteilungsfunktion, diese kann man zerlegen in $F=F_{ac}+F_{sc}+F_d$, wobei das den absolutstetigen Anteil, den singulär-stetigen Anteil und den Sprunganteil bezeichnet. Die Maße μ_{ac}, μ_{sc} und μ_d korrespondieren zu dieser Aufteilung und der Träger von μ_d ist $\{x : \Delta F(x) \neq 0\}$.

Wir kommen nun zur Lösung der Aufgabe:

(a) Mit $\breve{\mu}$ bezeichnen wir die charakteristische Funktion des Maßes μ. Dann gilt

$$|\breve{\mu}(\xi)| \leqslant p\,|\widecheck{\mu_{ac}}(\xi)| + q\,|\widecheck{\mu_{sc}}(\xi)| + r\,|\widecheck{\mu_d}(\xi)|$$

und

$$\begin{aligned}
1 = \limsup_{\xi\to\infty} |\breve{\mu}(\xi)| &\leqslant p \limsup_{\xi\to\infty} |\widecheck{\mu_{ac}}(\xi)| + q \limsup_{\xi\to\infty} |\widecheck{\mu_{sc}}(\xi)| + r \limsup_{\xi\to\infty} |\widecheck{\mu_d}(\xi)| \\
&= p\cdot 0 + q \limsup_{\xi\to\infty} |\widecheck{\mu_{sc}}(\xi)| + r\cdot 1 \\
&\leqslant p\cdot 0 + q\cdot 1 + r\cdot 1 = q + r.
\end{aligned}$$

Das zeigt, dass $q + r = 1$, also $p = 0$, d.h. μ hat nur einen singulären (diskret und singulär-stetig) Anteil.

(b) Wir zeigen, dass der Ausdruck aus Aufgabe 15.8(b) nach Null konvergiert. Daraus folgt, dass $\mu_d = 0$, d.h. μ hat nur einen singulär stetigen und absolutstetigen Anteil. Mit einem einfachen Variablenwechsel sehen wir

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \phi(\xi)\,d\xi = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \phi(T\xi)\,d\xi \overset{\text{dom. Konv.}}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \limsup_{T\to\infty} \phi(T\xi)\,d\xi = 0.$$

(genauer: Wir verwenden die $\limsup$-Version von Fatou, die anwendbar ist, da wir eine integrierbare Majorante haben: $|\phi(T\xi)|^2 \leqslant 1$; vgl. [Schilling-MI], Aufgabe 4, S. 46).

■■

Aufgabe 15.10. Lösung:

(a) Wir können in den Tafeln auf Seite 224, Einträge 4 und 5, die entsprechenden charakteristischen Funktionen ablesen. Alternativ geben wir hier eine direkte Rechnung an.

$$\begin{aligned}
\breve{p}(xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} p(x)\,dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a} (a - |x|)\,e^{ix\xi}\,dx \\
&= \frac{2}{a^2}\int_{0}^{a} (a - x)\,\cos(x\xi)\,dx && \text{(Integrand ist gerade)} \\
&= \frac{2}{a^2}\left[(a-x)\frac{\sin(x\xi)}{\xi}\right]_0^a + \frac{2}{a^2}\int_0^a \frac{\sin(x\xi)}{\xi}\,dx && \text{(Partielle Int.)} \\
&= \frac{2}{a^2}\int_0^a \frac{\sin(x\xi)}{\xi}\,dx \\
&= \frac{2}{a^2}\left[-\frac{\cos(x\xi)}{\xi^2}\right]_0^a \\
&= \frac{2}{a^2\xi^2}(1 - \cos(a\xi))
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{a^2\xi^2}\sin^2\frac{a\xi}{2} \qquad\qquad (1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}).$$

Das zeigt, dass, bis auf eine Konstante q die charakteristische Funktion von p ist. Daher können wir die Inversionsformel für Dichten (Satz 7.10) anwenden, um die charakteristische Funktion von q zu berechnen:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{2}{a^2\xi^2}\sin^2\frac{a\xi}{2}\,e^{-ix\xi}\,d\xi \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{2}{\pi a\xi^2}\sin^2\frac{a\xi}{2}\,e^{ix\xi}\,d\xi \qquad\qquad \text{(Integrand ist gerade)} \\ &= \frac{1}{a}\int q(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi \end{aligned}$$

und das zeigt dann

$$\check{q}(\xi) = ap(\xi) = \frac{a-|\xi|}{a}\mathbb{1}_{[-a,a]}(\xi).$$

(b) Wir nähern uns dem Problem zunächst heuristisch. Die Idee ist, die periodische Funktion f durch ihre Fourierreihe darzustellen (Achtung: die Konvergenz der Fourierreihe gegen f ist zunächst gar nicht klar, dazu muß man mehr arbeiten, aber dennoch...) da die Fourierreihe automatisch die richtige Periodizität hat:

$$\frac{a-|x|}{a}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{-i(\pi/a)nx},$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$p_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{a-|x|}{a}\,e^{i(\pi/a)nx}\,dx.$$

Die Form der Fourierkoeffizienten lässt sich schnell aus dem Integral

$$\int_{-a}^{a} e^{i(\pi/a)(k-n)x}\,dx = \delta_{k,n}2a$$

herleiten. Nach Teil (a) gilt aber

$$p_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{a-|x|}{a}\,e^{-i(\pi/a)nx}\,dx = \frac{1}{2}\int p(x)e^{-i(\pi/a)nx}\,dx = \frac{2\sin^2\frac{\pi n}{2}}{\pi^2 n^2} \geqslant 0.$$

Weil $\sin n\pi = 0$, sehen wir, dass

$$p_0 = \frac{1}{2}, \quad p_{2k} = 0 \quad \text{und} \quad p_{2k-1} = \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2}$$

und die bekannte Summenformel

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n = 1.$$

Damit wird die einzig mögliche ZV X, die zu f korrespondiert beschrieben durch $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(X = \pm(2k-1)/a) = 2(2k-1)^{-2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Daß $\mathbb{E}e^{i\xi X}$ – das ist ja gerade die oben angegebene Fourierreihe – absolut konvergiert ist klar, dass sie $f(\xi)$ darstellt benötigt weitere Argumente, z.B. dass Fourierreihen periodischer stetiger Funktionen mit positiven Fourierkoeffizienten konvergieren, [4, Theorem 1, S. 628].

(c) Weil f eine charakteristische Funktion ist, die mit $\breve{q}$ auf $[-a, a]$ übereinstimmt, und weil $\breve{q}$ in $[-a, a]$ getragen ist, gilt offensichtlich: $f\breve{q} = \breve{q}\breve{q}$.

16 Die multivariate Normalverteilung

Aufgabe 16.1. Lösung: Es ist ziemlich aufwendig $\mathbb{P}_{X+Y}$ als Faltung $\mathbb{P}_X \star \mathbb{P}_Y$ direkt zu berechnen. Der Weg über die Fouriertransformation / char. Funktion ist viel einfacher.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{i\langle\xi,\,(X+Y)\rangle} &= \mathbb{E}(e^{i\xi X}e^{i\xi Y}) \\
&= \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{i\xi Y} \\
&= e^{i\langle\xi,\,m_X\rangle-\frac{1}{2}\langle C_X\xi,\xi\rangle}e^{i\langle\xi,\,m_Y\rangle-\frac{1}{2}\langle C_Y\xi,\xi\rangle} \\
&= e^{i\langle\xi,\,(m_X,m_Y)\rangle-\frac{1}{2}\langle(C_X+C_Y)\xi,\xi\rangle}
\end{aligned}$$

und fast dieselbe Rechnung zeigt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{i\langle(\xi,\eta),\,(X,Y)\rangle} &= \mathbb{E}e^{i\langle\xi,\,X\rangle+i\langle\eta,\,Y\rangle} \\
&= \mathbb{E}e^{i\langle\xi,\,X\rangle}\mathbb{E}e^{i\langle\eta,\,Y\rangle} \\
&= e^{i\langle\xi,\,m_X\rangle-\frac{1}{2}\langle C_X\xi,\xi\rangle}e^{i\langle\eta,\,m_Y\rangle-\frac{1}{2}\langle C_Y\eta,\eta\rangle} \\
&= e^{i\langle(\xi,\eta),\,(m_X,m_Y)\rangle-\frac{1}{2}\langle C'(\xi,\eta),\,(\xi,\eta)\rangle}
\end{aligned}$$

wo $C' = \begin{pmatrix} C_X & 0 \\ 0 & C_Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d\times 2d}$.

Die Dichten berechnen sich dann mit der Formel (16.2) von Satz 16.2.

∎∎

Aufgabe 16.2. Lösung: Wenn die ZV unabhängig und quadrat-integrierbar sind, dann ist auch die Kovarianz Null. Nun zur Umkehrung: Wir schreiben $X = (X_1,\ldots,X_m)$ und $Y = (Y_1,\ldots,Y_n)$ und nehmen an, dass $(X,Y) \sim \mathsf{N}(\mu,\Gamma)$ und $\operatorname{Cov}(X_i,Y_k) = 0$. Weiter sei $x = \mathbb{E}X$ und $y = \mathbb{E}Y$. Für die charakteristische Funktion gilt

$$\phi(\xi,\zeta) = \mathbb{E}e^{i\langle\xi,\,X\rangle+i\langle\zeta,\,Y\rangle} = e^{i\langle\xi,\,x\rangle+i\langle\zeta,\,y\rangle}\phi_{X-x,Y-y}(\xi,\zeta).$$

Weil X, Y unkorreliert sind, gilt

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit den Kovarianzmatrizen C und D von X und Y. Es folgt (vgl. die Form der charakteristischen Funktion einer Normalverteilung, Satz 16.2), dass die charakteristische Funktion ϕ faktorisiert

$$\phi(\xi,\eta) = e^{i\langle\xi,\,x\rangle+i\langle\zeta,\,y\rangle}\phi_{X-x,Y-y}(\xi,\zeta) = e^{i\langle\xi,\,x\rangle+i\langle\zeta,\,y\rangle}\phi_{X-x}(\xi)\phi_{Y-y}(\zeta)\phi_X(\xi)\phi_Y(\zeta)$$

und wir folgern daraus, dass $X \perp\!\!\!\perp Y$ (Satz von Kac).

Aufgabe 16.3. Lösung: Für die Existenz der Momente verweisen wir auf Beispiel 2.9.d) und die Definition 16.1 bzw. 16.3.

Wir überlegen uns, dass auch die ersten und gemischten zweiten Momente konvergieren. Daraus folgt dann, dass

$$m_{X_n} \to m_X \quad \text{und} \quad C_{X_n} \to C_X$$

wobei m_Y für den Mittelwertvektor und C_Y die Covarianzmatrix des Vektors Y steht. Wir schreiben $Y = (Y(1), \dots, Y(d))$ für die Koordinaten. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_n(j) - X(j)| &\leqslant \sqrt{\mathbb{E}(|X_n(j) - X(j)|^2)} \\
&\leqslant \sqrt{\sum_j \mathbb{E}(|X_n(j) - X(j)|^2)} \\
&= \sqrt{\mathbb{E}(|X_n - X|^2)} \to 0.
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
&|X_n(j)X_n(k) - X(j)X(k)| \\
&\leqslant |X_n(j)X_n(k) - X_n(j)X(k)| + |X_n(j)X(k) - X(j)X(k)| \\
&= |X_n(j)||X_n(k) - X(k)| + |X_n(j) - X(j)||X(k)|
\end{aligned}$$

und erneute Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung zeigt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|X_n(j)X_n(k) - X(j)X(k)| \\
&\leqslant \sqrt{\mathbb{E}(|X_n(j)|^2)}\sqrt{\mathbb{E}(|X_n(k) - X(k)|^2)} + \sqrt{\mathbb{E}(|X_n(j) - X(j)|^2)}\sqrt{\mathbb{E}(|X(k)|^2)} \\
&\leqslant \Big(\sqrt{\mathbb{E}(|X_n(j)|^2)} + \sqrt{\mathbb{E}(|X(k)|^2)}\Big)\sqrt{\mathbb{E}(|X_n - X|^2)}.
\end{aligned}$$

Der zweite Faktor konvergiert gegen Null wenn $n \to \infty$, der erste Faktor ist aber gleichmäßig in n beschränkt, da für große $n \geqslant N_\epsilon$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathbb{E}(|X_n(j)|^2)} &= \|X_n(j)\|_2 \\
&\leqslant \|X_n(j) - X(j)\|_2 + \|X(j)\|_2 \\
&\leqslant \|X_n - X\|_2 + \|X\|_2 \\
&\leqslant \epsilon + \|X\|_2.
\end{aligned}$$

Damit folgt also

$$\mathbb{E}X_n(j)X_n(k) \to \mathbb{E}X(j)X(k) \quad \text{und} \quad \operatorname{Cov}(X_n(j), X_n(k)) \to \operatorname{Cov}(X(j), X(k)).$$

Weiter folgt aber daraus, dass

$$\phi_{X_n}(\xi) = e^{i\langle m_{X_n}, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle C_{X_n}\xi, \xi\rangle} \to e^{i\langle m_X, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle C_X\xi, \xi\rangle}.$$

Da $X_n \to X$ in $L^2(\mathbb{P})$ auch $X_{n_j} \to X$ fast sicher für eine Teilfolge impliziert, folgt mit dominierter Konvergenz

$$\phi_{X_{n_j}}(\xi) = \mathbb{E}e^{i\xi X_{n_j}} \to \mathbb{E}e^{i\xi X}$$

und wir schließen daraus, dass

$$\phi_X(\xi) = e^{i\langle m_X, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle C_X\xi, \xi\rangle}.$$

Aufgabe 16.4. Lösung: Beweis von $Z \perp\!\!\!\perp Y$: Setze $\mathbb{E}Y = m$, $C = \operatorname{Cov}(Z,Y)$, und $\mathbb{V}Z = \sigma^2$. Da $\binom{Z}{Y}$ Gauß, gilt für $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}\, e^{i\xi Z + i\eta Y} = e^{i\binom{\xi}{\eta}\binom{0}{m} + \frac{1}{2}\binom{\xi}{\eta}C\binom{\xi}{\eta}}.$$

Da $\operatorname{Cov}(Z, Y_k) = 0$, folgt $C = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \operatorname{Cov}(Y) \end{pmatrix}$ und damit

$$\mathbb{E}\, e^{i\xi Z + i\eta Y} = e^{i\eta m + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \frac{1}{2}\eta C\eta} = \mathbb{E}\, e^{i\xi Z}\mathbb{E}\, e^{i\eta Y}.$$

Daraus folgt $Z \perp\!\!\!\perp Y$

Aufgabe 16.5. Lösung: Es gilt $\rho X \sim \mathsf{N}(0, \rho^2)$, $\sqrt{(1-\rho^2)}Z \sim \mathsf{N}(0, 1-\rho^2)$ und weil $X \perp\!\!\!\perp Z$ gilt $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z = \mathsf{N}(0, \rho^2 + 1 - \rho^2) = \mathsf{N}(0,1)$.

Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) charakterisieren wir zunächst mit der charakteristischen Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{i\xi X}e^{i\eta Y} &= \mathbb{E}e^{i\left(\xi X + \rho\eta X + \sqrt{1-\rho^2}\eta Z\right)} \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i(\xi+\rho\eta)X}e^{i\sqrt{1-\rho^2}\eta Z}\right] \\
&= e^{-(\xi+\rho\eta)^2/2}e^{-(1-\rho^2)\eta^2/2} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+2\rho\xi\eta+\eta^2)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\left\langle\binom{\xi}{\eta}, \begin{pmatrix}1 & \rho \\ \rho & 1\end{pmatrix}\binom{\xi}{\eta}\right\rangle}
\end{aligned}$$

und im Hinblick auf Satz 16.2 gilt $(X,Y) \sim \mathsf{N}(0, C)$ mit der Kovarianzmatrix $C = \begin{pmatrix}1 & \rho \\ \rho & 1\end{pmatrix}$.

Die inverse Matrix ist $C^{-1} = (1-\rho^2)^{-1}\begin{pmatrix}1 & -\rho \\ -\rho & 1\end{pmatrix}$ und wieder mit Satz 16.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}\left\langle\binom{x}{y}, \begin{pmatrix}1 & -\rho \\ -\rho & 1\end{pmatrix}\binom{x}{y}\right\rangle} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}(x^2-2\rho xy+y^2)}.
\end{aligned}$$

Für die Verteilungen $f_{X|Y=y}(x) = f_{X|Y}(x|y)$ und $f_{Y|X=x}(y) = f_{Y|X}(y|x)$ verwenden wir die Formel für die bedingte Dichte (Def. 14.16). Wir erhalten

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{(2\pi)^{-1}(1-\rho^2)^{-1/2} e^{-(x^2-2\rho xy+y^2)/2(1-\rho^2)}}{(2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2}} \\
&= (2\pi)^{-1/2}(1-\rho^2)^{-1/2} e^{-(x^2-2\rho xy+\rho^2y^2)/2(1-\rho^2)} \\
&= (2\pi)^{-1/2}(1-\rho^2)^{-1/2} e^{-(x-\rho y)^2/2(1-\rho^2)}
\end{aligned}$$

also ist $X|_{Y=y} \sim \mathsf{N}(\rho y, 1-\rho^2)$.

Achtung: wir können offensichtlich nicht folgendermaßen rechnen:

$$Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z \implies X = \frac{1}{\rho}Y - \frac{1}{\rho}\sqrt{1-\rho^2}Z \overset{Y=y}{\implies} X = \frac{1}{\rho}y - \frac{1}{\rho}\sqrt{1-\rho^2}Z$$

woraus $Y \sim \mathsf{N}(y/\rho, (1-\rho^2)/\rho^2)$ folgen würde. Dieses Argument könnte man mit Satz 14.12.c) rechtfertigen – nur ist dieser Satz **nicht** anwendbar, da die Komponenten von X, d.h. die ZV Y und Z **nicht unabhängig** sind.

Andererseits **können wir wirklich Satz 14.12** auf $Y|_{X=x}$ anwenden:

$$Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z \overset{X=x}{\implies} Y = \rho x + \sqrt{1-\rho^2}Z \overset{X \perp\!\!\!\perp Z}{\implies} Y \sim \mathsf{N}(\rho x, 1-\rho^2).$$

Weitere Anmerkungen: $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \rho = 0$.

Aufgabe 16.6. Lösung: Weil wir uns nur für die Unabhängigkeit interessieren, können wir o.E. annehmen, dass die Mittelwerte alle Null sind. Somit gilt, dass (X,Y) Normalverteilt ist gemäß $\mathsf{N}(0,\sigma^2 C)$ wobei $C = \left(\begin{smallmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{smallmatrix}\right)$. Um die Unabhängigkeit zu zeigen, verwenden wir den Satz von Kac (Korollar 7.9) sowie Satz 16.2:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{i\xi X+\eta(Y-\rho X)} &= \mathbb{E}e^{i(\xi-\rho\eta)X+i\eta Y} \\
&= \mathbb{E}e^{i\left\langle \binom{\xi-\rho\eta}{\eta}, \binom{X}{Y}\right\rangle} \\
&= e^{-\sigma^2/2\cdot\left\langle \binom{\xi-\rho\eta}{\eta}, \begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}\binom{\xi-\rho\eta}{\eta}\right\rangle} \\
&= e^{-\sigma^2/2\cdot\left\langle \binom{\xi-\rho\eta}{\eta}, \binom{\xi}{\rho\xi+\eta(1-\rho^2)}\right\rangle} \\
&= e^{-\sigma^2\xi^2/2} e^{-\eta^2\sigma^2(1-\rho^2)/2}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $X \sim \mathsf{N}(0,\sigma^2)$, $Y-\rho X \sim \mathsf{N}(0,\sigma^2(1-\rho^2))$ und $X \perp\!\!\!\perp Y - \rho X$ gilt.

Aufgabe 16.7. Lösung: (Beachten Sie den Tippfehler in der Aufgabenstellung: Es muß $\lambda^2 = (1-\rho^2)\sigma_1^2/\sigma_2^2$ heißen.) Wir schreiben $X = X_1$, $Y = X_2$ usw. Man rechnet leicht nach, dass eine zentrierte zweidimensionale Normalverteilung eine Dichte der Gestalt

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$$

und eine Kovarianzmatrix der Form

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

hat.

Nun bestimmen wir die Dichte von $f_{X/Y}$. Mit dem Variablenwechsel $x = ty$ erhalten wir allgemein

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X/Y \in B) &= \iint \mathbb{1}_B(x/y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \iint \mathbb{1}_B(t)\, f_{X,Y}(ty,y)|y|\, dt\, dy \\
&= \int \mathbb{1}_B(t)\left(\int f_{X,Y}(ty,y)|y|\, dy\right) dt
\end{aligned}$$

also haben wir

$$f_{X/Y}(x) = \int f_{X,Y}(xy,y)|y|\, dy.$$

Mit diesen beiden Formeln erhalten wir im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned}
f_{X/Y}(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} |y| e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(xy)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho xy^2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}\, dy \\
&= \frac{2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{\infty} y e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho x}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) y^2}\, dy \\
&= \frac{2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{(1-\rho^2)}{\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho x}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \\
&= \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho x}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho x}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1/\sigma_2}{(x-\rho\sigma_1/\sigma_2)^2 + (1-\rho^2)\sigma_1^2/\sigma_2^2}
\end{aligned}$$

und das ist die Dichte der Cauchy $\mathsf{C}(\lambda,\alpha)$-Verteilung mit $\lambda^2 = (1-\rho^2)\sigma_1^2/\sigma_2^2$ und $\alpha = \rho\sigma_1/\sigma_2$, vgl. die Tabelle auf Seite 13, Eintrag 8.

Bemerkung. Wenn die gemeinsame Dichte $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationsinvariant ist, dann ist der Quotient X/Y bereits Cauchy-verteilt. Das sieht man folgendermaßen:

$$\mathbb{E}e^{i\xi\frac{X}{Y}} = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi\frac{x}{y}} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi \frac{r\cos\phi}{r\sin\phi}} f_{X,Y}(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\, d\phi\, dr$$

(Polarkoordinaten, [Schilling-MI], §20.11, S. 110*ff.*)

$$= \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi \frac{r\cos\phi}{r\sin\phi}} f_{X,Y}(r)\, r\, d\phi\, dr$$

($f_{X,Y}$ rotationsinvariant & abuse of notation)

$$= \int_0^\infty f_{X,Y}(r)\, r\, dr \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi\cot\phi}\, d\phi$$

($f_{X,Y}$ rotationsinvariant & abuse of notation)

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \cdot 2 \int_0^\pi e^{i\xi\cot\phi}\, d\phi$$

($f_{X,Y}$ rotationsinvariant, cot π-periodisch & [Schilling-MI] §20.14, S. 113)

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \frac{dt}{1+t^2}$$

($f_{X,Y}$ W-Dichte & $t = \cot\phi$, $d\phi = -(1+t^2)^{-1}\, dt$)

$$= e^{-|\xi|} \quad \text{(vgl. Beispiel 7.5)}$$

und das ist die charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung $\mathsf{C}(0,1)$.

■■

Aufgabe 16.8. Lösung:

(a) Es sei $\ell = (\ell^1, \ell^2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\left\langle \binom{\ell^1}{\ell^2}, \binom{U}{V} \right\rangle = \ell^1 U + \ell^2 V = \sum_{i=1}^n (\ell^1 a_i + \ell^2 b_i) G_i$$

und das ist als Linearkombination von unabhängigen Gauß-ZV selbst eine Gauß-ZV. Nach Definition 16.1 ist daher $\binom{U}{V}$ eine bivariate Gauß-ZV.

(b) Weil $\binom{U}{V}$ Gaußisch ist, gilt $U \perp\!\!\!\perp V$ genau dann, wenn $\operatorname{Cov}(U,V) = 0$. Offenbar gilt

$$\mathbb{E}U = \sum_i a_i \mathbb{E}G_i = \sum_i a_i \mu_i \quad \text{und} \quad \mathbb{E}V = \sum_k b_k \mathbb{E}G_k = \sum_k b_k \mu_k$$

und – wegen der Unabhängigkeit der $(G_i)_i$ –

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(U,V) &= \mathbb{E}\left[(U - \mathbb{E}U)(V - \mathbb{E}U)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_i a_i (G_i - \mu_i) \sum_k b_k (G_k - \mu_k)\right] \\
&= \sum_i \sum_k a_i b_k \underbrace{\mathbb{E}\left[(G_i - \mu_i)(G_k - \mu_k)\right]}_{=\delta_{ik}\sigma_i\sigma_k} \\
&= \sum_i a_i b_i \sigma_i^2.
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 16.9. Lösung: Wir berechnen direkt die charakteristische Funktion des Maßes P: $\widecheck{P} = \frac{1}{2}(\widecheck{\mathbb{P}}_Y + \widecheck{\mathbb{P}}_Z)$, also

$$2\widecheck{P}(\xi,\eta) = \mathbb{E}e^{i\left\langle \binom{\xi}{\eta}, \binom{X}{X} \right\rangle} + \mathbb{E}e^{i\left\langle \binom{\xi}{\eta}, \binom{X}{-X} \right\rangle}$$

$$= \mathbb{E}e^{i(\xi+\eta)X} + \mathbb{E}e^{i(\xi-\eta)X}$$
$$= e^{-(\xi+\eta)^2/2} + e^{-(\xi-\eta)^2/2}.$$

Das zeigt zum einen, dass sowohl $\check{P}(\xi,0)$ also auch $\check{P}(0,\eta)$ charakteristische Funktionen einer Standardnormalverteilung sind, und dass $\check{P}(\xi,\eta)$ zu keiner zweidimensionalen Normalverteilung gehören kann.

Aufgabe 16.10. Lösung: Die Richtung „$\Leftarrow$" folgt aus der Tatsache, dass die Linearkombination $aX+bY$ der unabhängigen Gauß-ZV $X,Y \sim \mathsf{N}(0,\sigma^2)$ selbst Gaußisch ist mit Mittelwert $a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}X = 0$ und Varianz $a^2\mathbb{V}X + b^2\mathbb{V}Y = \sigma^2(a^2+b^2) = \sigma^2$.

Für die Gegenrichtung „$\Rightarrow$" folgen wir der Anleitung. Wir nehmen an, dass $aX+bY \sim X$ für iid ZV X,Y mit $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = \mu$ und $\mathbb{V}X = \mathbb{V}Y = \sigma^2$.

(a) Aus $aX+bY \sim X$ schließen wir

$$\mathbb{E}(aX+bY) = \mathbb{E}X \implies (a+b)\mu = \mu \implies (a+b)^2\mu^2 = \mu^2$$
$$\overset{a^2+b^2=1}{\implies} 2ab\mu = 0 \overset{ab\neq 0}{\implies} \mu = 0.$$

Weiter gilt

$$\phi(\xi) = \mathbb{E}e^{i\xi X} \overset{aX+bY\sim X}{=} \mathbb{E}e^{i\xi aX}e^{i\xi bY} \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{E}e^{i\xi aX}\mathbb{E}e^{i\xi bY} = \phi(a\xi)\phi(b\xi).$$

(b) Angenommen, es gäbe ein ξ_0, so dass $\phi(\xi_0) = 0$. Auf Grund der Stetigkeit von ϕ können wir annehmen (man betrachte das inf aller Nullstellen, wie im Hinweis angegeben), dass $\phi(\xi) \neq 0$ für alle $|\xi| < |\xi_0|$. Das ist aber im Hinblick auf (a),

$$0 = \phi(\xi_0) = \phi(a\xi_0)\phi(b\xi_0) \implies \phi(a\xi_0) = 0 \quad \text{oder} \quad \phi(b\xi_0) = 0$$

wobei wegen $a^2+b^2 = 1$ folgt, dass $|a\xi_0| < |\xi_0|$ und $|b\xi_0| < |\xi_0|$ gilt – Widerspruch! Somit gilt also $\phi(\xi) \neq 0$ für alle ξ.

(c) Weil ϕ keine Nullstellen hat, finden wir einen stetigen Logarithmus, d.h. eine Funktion ψ, so dass $e^\psi = \phi$ und $\psi(0) = 0$ gilt. Weil $\phi(a\xi)\phi(b\xi) = \phi(\xi)$ gilt, erhalten wir

$$\psi(\xi) = \psi(a\xi) + \psi(b\xi) + 2\pi i\mathbb{Z}. \tag{*}$$

Weil die Abbildung $\xi \mapsto \psi(\xi) - \psi(a\xi) - \psi(b\xi)$ stetig ist und $\psi(0) = 0$ gilt und der additive Term in (*) diskret ist, folgt notwendig $\psi(\xi) = \psi(a\xi)+\psi(b\xi)$. Durch Iteration erhalten wir

$$\psi(\xi) = \psi(a^2\xi) + 2\psi(ab\xi) + \psi(b^2\xi)$$

und weitere Iterationsschritte ergeben dann

$$\psi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi(a^k b^{n-k}\xi). \tag{**}$$

(d) Weil X ein zweites Moment besitzt, ist ϕ und daher auch ψ eine C^2-Funktion (Satz 7.6.g)) und wir können eine Taylorentwicklung der Ordnung 2 verwenden:

$$\psi(\xi) = \psi(0) + \psi'(0)\xi + \psi''(\xi)\frac{\xi^2}{2} + \epsilon(\xi)\frac{\xi^2}{2} \quad \text{mit} \quad \lim_{\xi\to 0}\epsilon(\xi) = 0.$$

Wegen $\mathbb{E}X = 0$ und $\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$ erhalten wir

$$\psi(\xi) = -\sigma^2\frac{\xi^2}{2} + \epsilon(\xi)\frac{\xi^2}{2} \quad \text{mit} \quad \lim_{\xi\to 0}\epsilon(\xi) = 0.$$

Wenn wir diese Beziehung in die Gleichheit (**) einsetzen, folgt

$$\psi(\xi) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{2k}b^{2n-2k}\frac{\xi^2}{2}\left(\epsilon(a^kb^{n-k}\xi) - \sigma^2\right)$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left|\psi(\xi) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{2k}b^{2n-2k}\frac{\xi^2}{2}\sigma^2\right| &\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\epsilon(a^kb^{n-k}\xi)|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{2k}b^{2n-2k}\frac{\xi^2}{2}\\
&= \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\epsilon(a^kb^{n-k}\xi)|(a^2+b^2)^n\frac{\xi^2}{2}\\
&= \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\epsilon(a^kb^{n-k}\xi)|\frac{\xi^2}{2}\\
&\leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant n, |\eta|\leqslant c^n|\xi|}|\epsilon(\eta)|\frac{\xi^2}{2}, \qquad (c := |a|\vee|b| < 1)\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

weil $\limsup_{\eta\to 0}|\epsilon(\eta)| = \lim_{\eta\to 0}|\epsilon(\eta)| = 0$ gilt.

Daraus folgt $\psi(\xi) = -\sigma^2\xi^2/2$ bzw. $\phi(\xi) = e^{-\sigma^2\xi^2/2}$ bzw. $X \sim \mathsf{N}(0,\sigma^2)$.

■■

Aufgabe 16.11. Lösung: Wir beginnen mit der Richtung „⇒“: Es gelte $(X-Y) \perp\!\!\!\perp (X+Y)$.

(a) Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{i\langle 2\xi,X\rangle} = \mathbb{E}e^{i\langle\xi,2X\rangle} &= \mathbb{E}e^{i\langle\xi,(X-Y)+(X+Y)\rangle}\\
&= \mathbb{E}e^{i\langle\xi,X-Y\rangle}\mathbb{E}e^{i\langle\xi,X+Y\rangle} && \text{weil } X-Y \perp\!\!\!\perp X+Y\\
&= \mathbb{E}e^{i\langle\xi,X\rangle}\mathbb{E}e^{i\langle\xi,Y\rangle}\mathbb{E}e^{i\langle\xi,X\rangle}\mathbb{E}e^{i\langle\xi,-Y\rangle} && \text{weil } X \perp\!\!\!\perp Y\\
&= \phi(\xi)^3\phi(-\xi) && \text{weil } X \sim Y.
\end{aligned}$$

(b) Wäre für ein ξ_0 $\phi(\xi_0) = 0$, dann folgt aus (a), dass $\phi(\xi_0 2^{-n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also wegen der Stetigkeit von ϕ auch $\phi(0) = 0$, was nicht möglich ist.

(c) Es gilt

$$\psi(2\xi) = \frac{\phi(2\xi)}{\phi(-2\xi)} = \frac{\phi(\xi)^3\phi(-\xi)}{\phi(-\xi)^3\phi(\xi)} = \frac{\phi(\xi)^2}{\phi(-\xi)^2} = \psi(\xi)^2.$$

Das ergibt dann durch Iteration, Taylorentwicklung (Ordnung 1) und für eine Nullfolge $a_n \to 0$

$$\psi(\xi) = \psi(\xi 2^{-n})^{2^n} = \left(1 + \frac{a_n}{2^n}\right)^{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lim_n a_n} = e^0 = 1$$

(vgl. hierzu das Argument beim Beweis des CLT nach deMoivre–Laplace, Satz 13.2.) Somit ist $\psi \equiv 1$.

(d) Weil $\psi \equiv 1$ ist, gilt $\phi(\xi) = \phi(-\xi)$ und somit $\phi(2\xi) = \phi(\xi)^4$. Durch Iteration und eine Taylorentwicklung (Ordnung 2) sehen wir dann für eine Nullfolge $c_n \to 0$

$$\phi(\xi) = \phi(\xi 2^{-n})^{4^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi + c_n}{2^n}\right)^2\right)^{4^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lim_n (\xi + c_n)^2/2} = e^{-\xi^2/2}.$$

Bemerkung: die Existenz von Momenten ging in die Taylorentwicklungen ein.

Nun zur Richtung „$\Leftarrow$“: Es gelte $X, Y \sim \mathsf{N}(0,1)$ iid. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{i\xi(X+Y)+i\eta(X-Y)} &= \mathbb{E}e^{i(\xi+\eta)X}e^{i(\xi-\eta)Y}\\
&= \mathbb{E}e^{i(\xi+\eta)X}\mathbb{E}e^{i(\xi-\eta)Y}\\
&= e^{-(\xi+\eta)^2/2}e^{-(\xi-\eta)^2/2}\\
&= e^{-[(\xi+\eta)^2+(\xi-\eta)^2]/2}\\
&= e^{-\xi^2}e^{-\eta^2}
\end{aligned}$$

was zeigt, dass die ZV $X - Y, X + Y$ iid $\mathsf{N}(0,2)$ sind.

■■

Aufgabe 16.12. Lösung: Die obere Abschätzung folgt aus

$$\int_x^\infty e^{-y^2/2}\,dy \leqslant \int_x^\infty \frac{y}{x}\,e^{-y^2/2}\,dy = \frac{1}{x}\,e^{-x^2/2}.$$

Für die untere Schranke verwenden wir partielle Integration

$$\frac{1}{x^2}\int_x^\infty e^{-y^2/2}\,dy \geqslant \int_x^\infty \frac{1}{y^2}\,e^{-y^2/2}\,dy = \frac{1}{x}\,e^{-x^2/2} - \int_x^\infty e^{-y^2/2}\,dy$$

was dann

$$\int_x^\infty e^{-y^2/2}\,dy \geqslant \left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{-1}\frac{1}{x}\,e^{-x^2/2} = \frac{x}{x^2+1}\,e^{-x^2/2}$$

ergibt.

■■

17 Unbegrenzt teilbare Verteilungen

Aufgabe 17.1. Lösung:

- Lemma 17.4: Es seien $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ iid ZV so dass $X \sim \sum_i X_i$ und $Y \sim \sum_i Y_i$. Außerdem können wir die X_i, Y_i so konstruieren, dass die Tupel $(X_1, \ldots, X_n)$ und $(Y_1, \ldots, Y_n)$ unabhängig sind. Daher sind dann $X_i + Y_i$ iid und es gilt offensichtlich $X + Y \sim \sum_i (X_i + Y_i)$.
- Lemma 17.5 folgt direkt aus der iid-Eigenschaft:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{i\xi(X-X')} &= \mathbb{E}e^{i\xi X}e^{-i\xi X'} \overset{X \perp\!\!\!\perp X'}{=} \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{-i\xi X'} \\ &\overset{X\sim X'}{=} \mathbb{E}e^{i\xi X}\mathbb{E}e^{-i\xi X} = \mathbb{E}e^{i\xi X}\overline{\mathbb{E}e^{i\xi X}} = \left|\mathbb{E}e^{i\xi X}\right|^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 17.2. Lösung: (Beachten Sie den Tippfehler in der Angabe: $X_0 = 0$.) Wir berechnen die charakteristische Funktion und zeigen, dass diese unbegrenzt teilbar ist.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{i\xi S(N(t))} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}e^{i\xi S(n)}\mathbb{P}(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}e^{i\xi X_1}\right)^n \frac{t^n}{n!}e^{-t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\phi(\xi))^n \frac{t^n}{n!}e^{-t} \\ &= e^{t\phi(\xi)}e^{-t} \\ &= e^{-t(1-\phi(\xi))}.\end{aligned}$$

Somit folgt, dass $\phi^{\alpha}_{S(N(t))} = \phi_{S(N(\alpha t))}$ wieder eine charakteristische Funktion ist.

Aufgabe 17.3. Lösung: (Beachte den Tippfehler in der Angabe: „drücke $\log\phi$“→ „drücke ϕ“) Wir folgen dem Hinweis und erhalten

$$\phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \tfrac{1}{p}\right]\left[\tfrac{1}{p}\right]^n e^{i\xi n}.$$

Das identifiziert ϕ als charakteristische Funktion der geometrischen Verteilung mit der Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg $1/p$ und einen Erfolg $1 - 1/p$ (vgl. Eintrag 7. in der Tabelle A.6 auf Seite 222).

Weiterhin gilt

$$\log\phi(\xi) = \log\left[1-\tfrac{1}{p}\right] - \log\left[1-\tfrac{e^{i\xi n}}{p}\right]$$

und wenn wir die Reihendarstellung des Logarithmus

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad x\in(-1,1)$$

verwenden, sehen wir, wenn wir $c_p := -\log(1-1/p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}p^{-n}$ setzen,

$$\begin{aligned}\log\phi(\xi) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\xi}}{np^n}\\ &= -c_p\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_p np^n}e^{in\xi}\right).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\phi(\xi) = \prod_{n=1}^{\infty} e^{-(np^n)^{-1}(1-e^{in\xi})} = e^{-c_p\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_p np^n}e^{in\xi}\right)}$$

und daher können wir die Behauptung aus Lemma 17.12 bzw. Bemerkung 17.13 folgern.

■■

Aufgabe 17.4. Lösung:

(a) Die charakteristische Funktion ist gegeben durch

$$\phi(\xi) = \frac{1}{8}e^{-i\xi} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^{i\xi} = \frac{3+\cos\xi}{4}$$

und es ist klar, dass $\phi(\xi) \geqslant \frac{1}{2} > 0$ für alle $\xi\in\mathbb{R}$ gilt.

(b) Angenommen, $X = Y + Y'$ mit zwei iid ZV Y, Y'. Offensichtlich können die Summanden nur zwei Werte annehmen, die wir mit a, b bezeichnen wollen; o.E. sei $a < b$ und $\mathbb{P}(X_i = a) = p$ und $\mathbb{P}(X_i = b) = q = 1-p$. Die Summe $X = Y + Y$ hat den Wertebereich $\{2a, a+b, 2b\}$ und es gilt

$$\mathbb{P}(X=2a) = p^2, \quad \mathbb{P}(X=ab) = 2pq, \quad \mathbb{P}(X=2b) = q^2.$$

Auf Grund der Voraussetzung gilt daher

$$2a = -1, \quad a+b = 0, \quad 2b = 1$$

sowie

$$p^2 = q^2 = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad 2pq = \frac{3}{4},$$

was offensichtlich nicht möglich ist.

■■

Aufgabe 17.5. Lösung: Es ist klar, dass wir „unbegrenzt teilbar" in y zeigen müssen, da $x > 1$. Wir schreiben $\phi(y) = \zeta(x+iy)/\zeta(x)$. Wir schreiben $\Pi\subset\mathbb{N}$ für die Primzahlen. Es gilt

$$\log\phi(y) = \sum_{p\in\Pi}\left[\log(1-p^{-x}) - \log(1-p^{-x-iy})\right]$$

$$= \sum_{p\in\Pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-nx}(p^{-iny}-1)}{n}$$
$$= \sum_{p\in\Pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-nx}\left(e^{-iny\log p}-1\right)}{n}.$$

Jeder auftretende Summand ist der log einer charakteristischen Funktion einer Poisson-ZV, daher ist nach Lemma 17.12 und Bemerkung 17.13, ϕ unbegrenzt teilbar.

Aufgabe 17.6. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
f_1 &\leftrightarrow \frac{1}{3}(\delta_0+\delta_2+\delta_4) && \text{Gleichverteilung auf } \{0{,}2{,}4\}\\
g_1 &\leftrightarrow \frac{1}{3}(\delta_0+\delta_1+\delta_2) && \text{Gleichverteilung auf } \{0{,}1{,}2\}\\
f_2 &\leftrightarrow \frac{1}{2}(\delta_0+\delta_1) && \text{Gleichverteilung auf } \{0{,}1\}\\
g_2 &\leftrightarrow \frac{1}{2}(\delta_0+\delta_3) && \text{Gleichverteilung auf } \{0{,}3\}.
\end{aligned}$$

Leicht rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned}
f_1(\xi)f_2(\xi) &= \frac{1}{6}\left(1+e^{2i\xi}+e^{4i\xi}\right)\left(1+e^{i\xi}\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(1+e^{i\xi}+e^{2i\xi}+e^{3i\xi}+e^{4i\xi}+e^{5i\xi}\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(1+e^{i\xi}+e^{2i\xi}\right)\left(1+e^{3i\xi}\right)\\
&= g_1(\xi)g_2(\xi),
\end{aligned}$$

d.h. es ergibt sich in beiden Fällen die Gleichverteilung auf $\{0,1,2,3,4,5\}$.

Bemerkung: vgl. auch Aufgabe 15.10.

Aufgabe 17.7. Lösung: Die Behauptung folgt sofort aus den elementaren Ungleichungen für $t \geqslant 0$:

$$\frac{t}{1+t} \leqslant \left\{\begin{matrix} \dfrac{1+t}{1+t} = 1 \\ \dfrac{t}{1} = t \end{matrix}\right\} \leqslant 1 \wedge t$$

sowie

$$(1+t)(1\wedge t) \leqslant \begin{cases} (2t)(1\wedge t) \leqslant 2t, & \text{wenn } t \geqslant 1,\\ (1+1)(1\wedge t) \leqslant 2t, & \text{wenn } t \leqslant 1, \end{cases} \implies (1\wedge t) \leqslant \frac{2t}{1+t}$$

also insgesamt

$$\frac{t}{1+t} \leqslant 1\wedge t \leqslant \frac{2t}{1+t} \implies \frac{|y|^2}{1+|y|^2} \leqslant 1 \wedge |y|^2 \leqslant \frac{2|y|^2}{1+|y|^2}.$$

Aufgabe 17.8. Lösung: Offensichtlich muß χ so gewählt werden, dass gilt

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-e^{i\langle y,\,\xi\rangle}+i\langle \xi,\,\chi(y)\rangle}{\langle y,\,\xi\rangle^2}=\frac{1}{2}$$

m.a.W. χ „vervollständigt" die Taylor-Entwicklung von $e^{i\langle y,\,\xi\rangle}$ der Ordnung 2 bei Null.

Außerdem muß $\chi(y)$ für $|y|\to\infty$ beschränkt bleiben.

Beides kann man erreichen, wenn χ beschränkt ist und $\chi(y)\approx y$ für $y\to 0$ gilt.

Wenn wir χ ändern, resultiert das lediglich in einer Änderung des linearen Terms in der Lévy–Khintchin Formel: es seien χ und κ zwei derartige Normalisierungsfunktionen, dann gilt

$$\begin{aligned}
\psi(\xi) &= -i\langle \ell,\,\xi\rangle+\frac{1}{2}\langle Q\xi,\,\xi\rangle+\int_{y\neq 0}\Big(1-e^{i\langle y,\,\xi\rangle}-i\langle \xi,\,\chi(y)\rangle\Big)\,\nu(dy)\\
&= -i\langle \ell,\,\xi\rangle+\frac{1}{2}\langle Q\xi,\,\xi\rangle+\int_{y\neq 0}\Big(1-e^{i\langle y,\,\xi\rangle}-i\langle \xi,\,\kappa(y)\rangle\Big)\,\nu(dy)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + i\int_{y\neq 0}\langle \xi,\,(\chi(y)-\kappa(y))\rangle\,\nu(dy)
\end{aligned}$$

und das letzte Integral auf der rechten Seite konvergiert, weil der Integrand die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\begin{aligned}
|\langle \xi,\,(\chi(y)-\kappa(y))\rangle| &= \Big|\Big(1-e^{i\langle y,\,\xi\rangle}-i\langle \xi,\,\chi(y)\rangle\Big)-\Big(1-e^{i\langle y,\,\xi\rangle}-i\langle \xi,\,\kappa(y)\rangle\Big)\Big|\\
&\leqslant C(1\wedge|\langle y,\,\xi\rangle|^2)
\end{aligned}$$

d.h. wenn wir κ als Normalisierung verwenden müssen wir ℓ durch $\ell-\int_{y\neq 0}(\chi(y)-\kappa(y))\nu(dy)$ ersetzen.

Aufgabe 17.9. Lösung: Die Subadditivität lässt sich nur sehr schwer aus der Lévy–Khintchin Formel ableiten, daher gehen wir unten einen anderen Weg. Wir werden aber skizzieren, wie man die Abschätzung $|\psi(\xi)|\leqslant c_\psi(1+|\xi|^2)$ aus der Lévy–Khintchin Formel erhält: Wegen Lemma 17.18 gilt

$$\begin{aligned}
\left|\psi(\xi)+i\langle \ell,\,\xi\rangle-\frac{1}{2}\langle Q\xi,\,\xi\rangle\right| &= \left|\int_{y\neq 0}\left(1-e^{i\langle y,\,\xi\rangle}+\frac{i\langle y,\,\xi\rangle}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)\right|\\
&\leqslant \int_{y\neq 0}\left|1-e^{i\langle y,\,\xi\rangle}+\frac{i\langle y,\,\xi\rangle}{1+|y|^2}\right|\nu(dy)\\
&\leqslant \int_{y\neq 0}\frac{2|y|^2}{1+|y|^2}\nu(dy)\cdot(1+|\xi|^2)
\end{aligned}$$

andererseits gilt trivialerweise

$$\left|i\langle \ell,\,\xi\rangle-\frac{1}{2}\langle Q\xi,\,\xi\rangle\right|\leqslant|\ell|\cdot|\xi|+\|Q\|\cdot|\xi|^2\leqslant c(1+|\xi|^2)$$

mit einer geeigneten Matrixnorm $\|Q\|$.

Die (nahezu optimale) Konstante erhält man aber mit der Subadditivitätsbeziehung

$$\sqrt{|\psi(\xi+\eta)|} \leqslant \sqrt{|\psi(\xi)|} + \sqrt{|\psi(\eta)|}.$$

Das geht so: Für $\xi = \eta$ gilt $|\psi(2\xi)| \leqslant 4|\psi(\xi)|$. Für jedes $\xi \neq 0$ gibt es eine Zahl $n = n(\xi) \in \mathbb{Z}$ mit $2^{n-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^n$. Somit

$$|\psi(\xi)| = |\psi(2^n 2^{-n}\xi)| \leqslant \max\{1, 2^{2n}\} \sup_{|\eta|\leqslant 1} |\psi(\eta)| \leqslant 2 \sup_{|\eta|\leqslant 1} |\psi(\eta)|(1+|\xi|^2).$$

Subadditivität: Wir zeigen zunächst das folgende

Lemma. *Es sei $\chi(\xi)$ die charakteristische Funktion der ZV X mit Verteilung μ. Dann gilt*

$$|\chi(\xi+\eta) - \chi(\xi)\chi(\eta)|^2 \leqslant (1-|\chi(\xi)|^2)(1-|\chi(\eta)|^2), \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}^d. \tag{*}$$

Beweis. Weil μ ein W-Maß ist, erhalten wir gemäß der Definition von χ:

$$\begin{aligned}\chi(\xi+\eta) - \chi(\xi)\chi(\eta) &= \iint \left(e^{ix\cdot\xi}e^{ix\cdot\eta} - e^{ix\cdot\xi}e^{iy\cdot\eta}\right)\mu(dx)\,\mu(dy)\\ &= \frac{1}{2}\iint \left(e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}\right)\left(e^{ix\cdot\eta} - e^{iy\cdot\eta}\right)\mu(dx)\,\mu(dy).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden wir die Symmetrie des Integranden in den Variablen x und y: wir können die Variablen austauschen. Die elementare Beziehung $|e^{ia}-e^{ib}|^2 = 2-2\cos(b-a)$ und die Cauchy–Schwarz Ungleichung ergeben

$$\begin{aligned}&|\chi(\xi+\eta) - \chi(\xi)\chi(\eta)|\\ &\leqslant \frac{1}{2}\iint \left|e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}\right| \cdot \left|e^{ix\cdot\eta} - e^{iy\cdot\eta}\right| \mu(dx)\,\mu(dy)\\ &= \iint \sqrt{1-\cos(y-x)\cdot\xi}\sqrt{1-\cos(y-x)\cdot\eta}\,\mu(dx)\,\mu(dy)\\ &\leqslant \sqrt{\iint \left(1-\cos(y-x)\cdot\xi\right)\mu(dx)\,\mu(dy)}\sqrt{\iint \left(1-\cos(y-x)\cdot\eta\right)\mu(dx)\,\mu(dy)}.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, da ja

$$\iint \cos(y-x)\cdot\xi\,\mu(dx)\,\mu(dy) = \operatorname{Re}\left[\int e^{iy\cdot\xi}\,\mu(dy)\int e^{-ix\cdot\xi}\,\mu(dx)\right] = |\chi(\xi)|^2.$$

□

Die Subadditivität folgt nun, indem wir $\chi = e^{-t\psi}$ in (*) einsetzen, durch $t > 0$ dividieren und den Limes $t \to 0$ ausführen. Wegen $|\chi| = e^{-t\operatorname{Re}\psi}$ erhalten wir

$$|\psi(\xi+\eta) - \psi(\xi) - \psi(\eta)|^2 \leqslant 4\operatorname{Re}\psi(\xi)\operatorname{Re}\psi(\eta) \leqslant 4|\psi(\xi)|\cdot|\psi(\eta)|.$$

Mit der Dreiecksungleichung nach unten erhalten wir

$$|\psi(\xi+\eta)| - |\psi(\xi)| - |\psi(\eta)| \leqslant 2\sqrt{|\psi(\xi)|}\sqrt{|\psi(\eta)|}$$

und das ist äquivalent zur Subadditivität: $\sqrt{|\psi(\xi+\eta)|} \leqslant \sqrt{|\psi(\xi)|} + \sqrt{|\psi(\eta)|}$.

■■

Aufgabe 17.10. Lösung: Wir berechnen zunächst die charakteristische Funktion von U. Bekanntlich gilt $\mathbb{E}e^{i\xi X_1} = (1+\xi^2)^{-1}$ (vgl. Tabelle A.7, Eintrag 14, S. 224 oder Beispiel 7.2.g) auf S. 64), also

$$\phi(\xi) = \mathbb{E}e^{i\xi U} = \mathbb{E}e^{-i\sum_n \xi X_n/n} = \prod_n \mathbb{E}e^{-i(\xi/n)X_n} = \prod_n \frac{1}{1+\frac{\xi^2}{n^2}}.$$

Wir wollen ϕ in der Form $e^{-\psi}$ darstellen, wobei ψ eine Lévy–Khinchin Darstellung haben soll. Wir machen folgenden Ansatz

$$\phi(\xi) = \prod_n \frac{1}{1+\frac{\xi^2}{n^2}} = \prod_n e^{-\log\left(1+\frac{\xi^2}{n^2}\right)} = e^{-\sum_n \log\left(1+\frac{\xi^2}{n^2}\right)}$$

und wir versuchen $\log(1+\xi^2)$ mit Hilfe einer Lévy–Khinchine Formel zu schreiben. Das geht in der Tat.

Zwischenrechnung: Es gilt die Formel

$$\log(1+\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos y\xi)e^{-|y|}\,\frac{dy}{|y|}. \tag{*}$$

Proof. Wir nutzen die Symmetrie (gerader Integrand) des Integrals und beschränken uns auf $(0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1-\cos y\xi)e^{-y}\,\frac{dy}{y} &= \int_0^\infty (1-\cos y\xi)e^{-y} \int_0^\infty e^{-ty}\,dt\,dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty (1-\cos y\xi)e^{-(1+t)y}\,dy\,dt \\
&= \mathrm{Re}\int_0^\infty \int_0^\infty (1-e^{-iy\xi})e^{-(1+t)y}\,dy\,dt \\
&= \mathrm{Re}\int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-(1+t)y} - e^{-(i\xi+1+t)y}\,dy\,dt \\
&= \mathrm{Re}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{i\xi+1+t}\right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1+t}{\xi^2+(1+t)^2}\right) dt \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1+t}{\xi^2+(1+t)^2}\right) dt \\
&= \lim_{R\to\infty}\left[\log(1+R) - \frac{1}{2}\left(\log(\xi^2+(1+R^2)) - \log(1+\xi^2)\right)\right] \\
&= \lim_{R\to\infty}\log\frac{1+R}{\sqrt{\xi^2+(1+R^2)}} + \frac{1}{2}\log(1+\xi^2)) \\
&= \frac{1}{2}\log(1+\xi^2).
\end{aligned}$$

∎

Bemerkung: Die Formel (*) fällt (wie so oft in der Mathematik) vom Himmel. Wie kommt man drauf? Ansatz:

$$\log(1+\xi^2) \overset{!!}{=} \int (1-\cos y\xi) f(y)\,dy \overset{\text{Differenzieren}}{\Longrightarrow} \frac{2\xi}{1+\xi^2} \overset{!!}{=} \int \sin y\xi\, y f(y)\,dy$$

und jetzt nimmt man eine Tabelle der Fourier-Sinustransformation und versucht $yf(y)$ zu bestimmen. Das ergibt (bis auf eine Konstante) $yf(y) = e^{-y}$, dann rechnet man wie im Beweis.

Mit Hilfe von (*) erhalten wir nunmehr

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= e^{-\sum_n \log\left(1+\frac{\xi^2}{n^2}\right)}\\
&= e^{-\sum_n \int(1-\cos y\frac{\xi}{n})e^{-|y|}\frac{dy}{|y|}}\\
&= e^{-\sum_n \int(1-\cos\frac{y}{n}\xi)e^{-|y|}\frac{dy}{|y|}}\\
&= e^{-\sum_n \int(1-\cos z\xi)e^{-|nz|}\frac{dz}{|z|}}\\
&= e^{-\int(1-\cos z\eta)\sum_n(e^{-|z|})^n\frac{dz}{|z|}}\\
&= e^{-\int(1-\cos z\eta)\frac{e^{-|z|}}{|z|(1-e^{-|z|})}\,dz}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 17.11. Lösung: Wir zeigen zunächst die folgende Formel:

$$t^\gamma = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^\infty\left(1-e^{-ts}\right)\frac{ds}{s^{1+\gamma}},\qquad t\geqslant 0,\ \gamma\in(0,1). \tag{*}$$

Beweis: Eine Anwendung von Tonelli zeigt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\left(1-e^{-ts}\right)\frac{ds}{s^{1+\gamma}} &= \int_0^\infty\int_0^s t\,e^{-tr}\,dr\,\frac{ds}{s^{1+\gamma}}\\
&= \int_0^\infty\int_r^\infty\frac{ds}{s^{1+\gamma}}\,t\,e^{-tr}\,dr\\
&= \frac{t}{\gamma}\int_0^\infty e^{-tr}\,r^{-\gamma}\,dr\\
&= \frac{t^\gamma}{\gamma}\int_0^\infty e^{-u}\,u^{1-\gamma-1}\,du\\
&= \frac{t^\gamma}{\gamma}\,\Gamma(1-\gamma)
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile den Variablenwechsel $r = u/t$ verwendet haben.

Nun brauchen wir die charakteristische Funktion einer Normalverteilung:

$$e^{-r|\xi|^2} = \frac{1}{(4\pi r)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{4r}}\,e^{i\langle x,\xi\rangle}\,dx. \tag{**}$$

Wenn wir in (**) $\xi = 0$ setzen, erhalten wir $(4\pi r)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/(4r)}\,dx = 1$. Mit (*) sehen wir

$$\begin{aligned}
|\xi|^\alpha = \left(|\xi|^2\right)^{\alpha/2} &= \frac{\frac{\alpha}{2}}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty\left(1-e^{-r|\xi|^2}\right)\frac{dr}{r^{1+\alpha/2}}\\
&= \frac{\frac{\alpha}{2}}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\left(1-e^{i\langle x,\xi\rangle}\right)\frac{e^{-|x|^2/(4r)}}{(4\pi r)^{d/2}}\,dx\,\frac{dr}{r^{1+\alpha/2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{2}}{\Gamma\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)} \int_{\mathbb{R}^d} \big(1-e^{i\langle x,\xi\rangle}\big) \int_0^\infty \frac{e^{-|x|^2/(4r)}}{(4\pi r)^{d/2}} \frac{dr}{r^{1+\alpha/2}}\,dx.$$

Wir verwenden nun den Variablenwechsel $s = |x|^2/(4r)$, d.h. $r = |x|^2/(4s)$ und $dr = -|x|^2/(4s^2)\,ds = -ds/s$:

$$\begin{aligned}
|\xi|^\alpha &= \frac{\frac{\alpha}{2}}{\Gamma\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)} \int_{\mathbb{R}^d} \big(1-e^{i\langle x,\xi\rangle}\big) \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{(\pi|x|^2/s)^{d/2}} \frac{1}{(|x|^2/(4s))^{\alpha/2}} \frac{ds}{s}\,dx\\
&= \frac{\frac{\alpha}{2}\,4^{\alpha/2}}{\Gamma\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)\,\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \big(1-e^{i\langle x,\xi\rangle}\big) \frac{dx}{|x|^{d+\alpha}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-s}\,s^{d/2+\alpha/2}\frac{ds}{s}}_{=\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)}\\
&= \frac{\frac{\alpha}{2}\,2^{\alpha}}{\Gamma\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)\,\pi^{d/2}}\,\Gamma\Big(\frac{d+\alpha}{2}\Big) \int_{\mathbb{R}^d} \big(1-e^{i\langle x,\xi\rangle}\big) \frac{dx}{|x|^{d+\alpha}}\\
&= \frac{\alpha 2^{\alpha-1}\,\Gamma\big(\frac{d+\alpha}{2}\big)}{\Gamma\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)\,\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \big(1-e^{i\langle x,\xi\rangle}\big) \frac{dx}{|x|^{d+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung mit der angegebenen Konstante $c_{\alpha,d}$.

In Dimension 1 sieht man manchmal auch die Konstante $c_{\alpha,1} = \Gamma(1+\alpha)\sin(\frac{\alpha}{2}\pi)/\pi$. Das sieht man mit Hilfe einiger Identitäten für die Gamma-Funktion:

- $\Gamma(u)\Gamma(\frac{1}{2}+u) = \sqrt{\pi}\,2^{1-2u}\,\Gamma(2u)$; (Lagrangescher Verdopplungssatz)
- $\Gamma(u)\Gamma(1-u) = \dfrac{\pi}{\sin(u\pi)}$;
- $u\,\Gamma(u) = \Gamma(u+1)$.

Für $d=1$ und $u = \frac{\alpha}{2}$ ergibt sich dann

$$c_{\alpha,1} = \frac{\alpha 2^{\alpha-1}\,\Gamma\big(\frac{\alpha+1}{2}\big)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)} = \frac{\alpha 2^{\alpha-1}\,\Gamma\big(\frac{\alpha+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{\alpha}{2}\big)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)\Gamma\big(\frac{\alpha}{2}\big)} = \frac{\alpha\,\Gamma(\alpha)\sin\big(\frac{\alpha\pi}{2}\big)}{\pi} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\big(\frac{\alpha\pi}{2}\big)}{\pi}.$$

■■

18 Cramérs Theorie der großen Abweichungen

Aufgabe 18.1. Lösung: Die Funktion $u \mapsto e^{\xi u}$, $\xi \in \mathbb{R}$, ist konvex. Daher gilt für $a < X(\omega) < b$

$$e^{\xi X(\omega)} \leqslant \frac{b - X(\omega)}{b-a} e^{a\xi} + \frac{X(\omega) - a}{b-a} e^{b\xi}, \quad \omega \in \Omega,$$

und die Behauptung ergibt sich, indem wir den Erwartungswert auf beiden Seiten dieser Ungleichung bilden.

■■

Aufgabe 18.2. Lösung: Allgemein besteht folgender Zusammenhang zwischen der charakteristischen Funktion $\phi(\xi)$ und der momentenerzeugenden Funktion $M(\xi)$:

$$M(\xi) = \mathbb{E}e^{\xi X} = \mathbb{E}e^{i(-i\xi)X} = \phi(-i\xi)$$

sofern die ZV X exponentielle Momente zulässt (d.h. wenn die charakteristische Funktion in die komplexe Ebene fortgesetzt werden kann).

(a) Aus der Tabelle A.6, Eintrag 9, S. 222 lesen wir ab:

$$M(\xi) = \exp[-\lambda(1 - e^{\xi})] \implies L(\xi) = \lambda(e^{\xi} - 1).$$

Nach Definition gilt

$$I(a) = \sup_{\xi} \left(a\xi - \lambda(e^{\xi} - 1) \right).$$

Wenn $a < 0$ ist, dann zeigt der Limes $\xi \to -\infty$, dass das Supremum ∞ ist. Sei also $a \geqslant 0$. Wir maximieren den Ausdruck auf der rechten Seite:

$$f(\xi) = a\xi - \lambda(e^{\xi} - 1) \implies f'(\xi) = a - \lambda e^{\xi} \overset{!!}{=} 0$$

und das ist der Fall, wenn $\xi = \log\frac{a}{\lambda}$ gilt. Wir setzen diesen Wert in $f(\xi)$ ein und erhalten

$$I(a) = a \log\frac{a}{\lambda} - \lambda\left(\frac{a}{\lambda} - 1\right) = \lambda - a + a\log\frac{a}{\lambda}, \quad a \geqslant 0.$$

(b) Aus der Tabelle A.7, Eintrag 13, S. 224 lesen wir ab:

$$M(\xi) = \frac{\lambda}{\lambda - \xi} \implies L(\xi) = \log\lambda - \log(\lambda - \xi).$$

Nach Definition gilt

$$I(a) = \sup_{\xi} \left(a\xi - \log\lambda + \log(\lambda - \xi) \right).$$

Wenn $a \leqslant 0$ ist, dann zeigt der Limes $\xi \to -\infty$, dass das Supremum ∞ ist. Sei also $a > 0$. Wir maximieren den Ausdruck auf der rechten Seite:

$$f(\xi) = a\xi - \log\lambda + \log(\lambda - \xi) \implies f'(\xi) = a - \frac{1}{\lambda - \xi} \overset{!!}{=} 0$$

und das ist der Fall, wenn $\xi = \lambda - \frac{1}{a}$ gilt. Wir setzen diesen Wert in $f(\xi)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} I(a) &= a\left(\lambda - \frac{1}{a}\right) - \log\lambda + \log\left(\lambda - \lambda + \frac{1}{a}\right) \\ &= \lambda a - 1 - \log\lambda + \log\frac{1}{a} \\ &= \lambda a - 1 - \log(\lambda a), \qquad a > 0. \end{aligned}$$

(c) Aus der Tabelle A.6, Eintrag 4, S. 222 lesen wir ab:

$$M(\xi) = \cos(-i\xi) = \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2} = \cosh\xi \implies L(\xi) = \log(e^\xi + e^{-\xi}) - \log 2.$$

Nach Definition gilt

$$I(a) = \sup_\xi \left(a\xi - \log(e^\xi + e^{-\xi}) + \log 2\right).$$

Wenn $a > 1$ ist, dann zeigt der Limes $\xi \to \pm\infty$, dass das Supremum ∞ ist. Sei also $|a| \leqslant 1$. Wir maximieren den Ausdruck auf der rechten Seite:

$$f(\xi) = a\xi - \log(e^\xi + e^{-\xi}) + \log 2 \implies f'(\xi) = a - \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{e^\xi + e^{-\xi}} \overset{!!}{=} 0.$$

Das ist der Fall, wenn gilt

$$\begin{aligned} & a = \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{e^\xi + e^{-\xi}} \\ \iff & e^\xi - e^{-\xi} = a(e^\xi + e^{-\xi}) \\ \iff & e^\xi(1-a) = (1+a)e^{-\xi} \\ \iff & e^{2\xi} = \frac{1+a}{1-a} \end{aligned}$$

also $\xi = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}$. Wir setzen diesen Wert in $f(\xi)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{1}{2}a\log\frac{1+a}{1-a} - \log\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) + \log 2 \\ &= \frac{1}{2}a\log\frac{1+a}{1-a} - \log\left(\frac{2}{\sqrt{(1-a)(1+a)}}\right) + \log 2 \\ &= \frac{1}{2}a\log\frac{1+a}{1-a} + \log\sqrt{1-a} + \log\sqrt{1+a} \\ &= \frac{1}{2}a\log(1+a) - \frac{1}{2}a\log(1-a) + \frac{1}{2}\log(1-a) + \frac{1}{2}\log(1+a) \\ &= \frac{1}{2}(1+a)\log(1+a) + \frac{1}{2}(1-a)\log(1-a). \end{aligned}$$

Aufgabe 18.3. Lösung:

(a) und (b): Wenn $M(\xi_0) < \infty$ für ein $\xi_0 > 0$ gilt, dann folgt aus der Definition von $I(a)$, dass für alle $a > 0$

$$I(a) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} (a\xi - \log M(\xi)) \geqslant a\xi_0 - \log M(\xi_0) \xrightarrow[a\to\infty]{} \infty.$$

Angenommen $M|_{(0,\infty)} \equiv \infty$ gilt. Auf Grund der Definition von I haben wir für alle $a > 0$

$$I(a) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} (a\xi - \log M(\xi)) = \sup_{\xi\in(-\infty,0]} (a\xi - \log M(\xi)) = 0.$$

Diese Beiden Argumente zeigen beide Richtungen in (a) und die Richtung „$\Rightarrow$" in (b). Die umgekehrte Richtung von (b) folgt aber unmittelbar aus (a): Wenn $\lim_{a\to\infty} I(a) = 0$, dann ist der Ausdruck insbesondere endlich, und es kann kein ξ_0 geben, an dem $M(\xi_0)$ endlich ist.

(c) Wenn $M \equiv \infty$, dann gilt $I \equiv 0$, vgl. Teilaufgabe (b), und wir haben nichts zu zeigen.

Sei also $M(\xi_0) < \infty$ für ein $\xi_0 > 0$. Wenn $\ell \leqslant X \leqslant r$ f.s., dann wissen wir, dass I eine eindeutige Minimalstelle hat (Lemma 18.5.g)) und dass daher $I(x) \leqslant \max\{I(\ell+), I(r-)\}$ f.s. gilt. Weiterhin gilt nach Lemma 18.5.c), dass $\mathbb{P}(X = \ell) = 0 \iff I(\ell) = \infty$ und $\mathbb{P}(X = r) = 0 \iff I(r) = \infty$. Damit ist auch in diesem Fall klar, dass $\mathbb{E}\, e^{\alpha I(X)} \leqslant \max\{I(\ell+), I(r-)\} < \infty$.

Sei also X f.s. unbeschränkt. Weil $\log M(\xi)$ konvex ist, ist I konvex, daher f.s. diff'bar und wir erhalten mit Hilfe der Formel k) aus Bemerkung 1.8 für $A > \mathbb{E}X$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\alpha I(X)} \mathbb{1}_{\{X>A\}}\right] &= \alpha \int_A^\infty e^{\alpha I(t)} I'(t) \mathbb{P}(X > t)\, dt \\
&\overset{18.4}{\leqslant} \alpha \int_A^\infty e^{\alpha I(t)} I'(t) e^{-I(t)}\, dt \\
&= -e^{-\alpha I(t)}\Big|_{t=A}^{\infty} \\
&= e^{-\alpha I(A)}.
\end{aligned}$$

Beachte für die Abschätzung, dass die konvexe Funktion $I \geqslant 0$ an der Stelle $a = \mathbb{E}X$ minimal wird: $I(a) = 0$, d.h. $I'(x) \geqslant 0$ wenn $x > a$. Eine entsprechende Ungleichung gilt für $A < \mathbb{E}X$ und durch Addition erhalten wir dann $\mathbb{E}\, e^{\alpha I(X)} < \infty$.

(d) Wenn $M(\xi) < \infty$ ist, dann gilt für alle $a > 0$ und $\xi > 0$

$$\frac{I(a)}{a} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left(\xi - \frac{1}{a} \log M(\xi)\right) \geqslant \xi - \frac{1}{a} \log M(\xi) \xrightarrow[a\to\infty]{} \xi$$

und weil ξ beliebig ist, folgt $\lim(\inf)_{a\to\infty} a^{-1} I(a) = \infty$.

Umgekehrt haben wir wegen $I(a)/a \to \infty$ für jedes feste $\xi > 0$ und hinreichend große $a > \mu$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\xi X}\mathbb{1}_{\{X>a\}}\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[e^{I(X)/2}\mathbb{1}_{\{X>a\}}\right] \\
&\overset{1.8.k)}{=} \frac{1}{2}\int_a^\infty e^{I(t)/2} I'(t)\mathbb{P}(X>t)\,dt \\
&\overset{18.4}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_a^\infty e^{I(t)/2} I'(t) e^{-I(t)}\,dt \\
&= -e^{-I(t)/2}\Big|_{t=a}^\infty = e^{-I(a)/2}
\end{aligned}$$

woraus $M(\xi) < \infty$ folgt. Wir verwenden in dieser Rechnung, dass I konvex ist, d.h. die Ableitung I' existiert Lebesgue-fast überall.

(e) Weil nach Voraussetzung $X - r \leqslant 0$ ist, haben wir $M(\xi) = e^{r\xi}\mathbb{E}\, e^{\xi(X-r)} \leqslant e^{r\xi}$ für $\xi \geqslant 0$. Mit dem Satz von der Differentiation parameterabhängiger Integrale sehen wir sofort, dass

$$L'(\xi) = \frac{M'(\xi)}{M(\xi)} = \frac{\mathbb{E}\left[Xe^{\xi X}\right]}{\mathbb{E}\, e^{\xi X}}, \quad \xi \geqslant 0$$

gilt. Weil $X \leqslant r$ ist $L'(\xi) < \infty$ klar. Für die umgekehrte Abschätzung beachten wir, dass nach Voraussetzung $\mathbb{P}(X > b) > 0$ für alle $b < r$ gilt. Mithin

$$\begin{aligned}
r \geqslant \frac{\mathbb{E}\left[Xe^{\xi X}\right]}{\mathbb{E}\, e^{\xi X}} &\geqslant \frac{\mathbb{E}\left[Xe^{\xi X}\mathbb{1}_{\{X>b\}}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\xi X}\mathbb{1}_{\{X>b\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{\xi X}\mathbb{1}_{\{X\leqslant b\}}\right]} \\
&\geqslant b\frac{\mathbb{E}\left[e^{\xi X}\mathbb{1}_{\{X>b\}}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\xi X}\mathbb{1}_{\{X>b\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{\xi X}\mathbb{1}_{\{X\leqslant b\}}\right]} \\
&= b\frac{\mathbb{E}\left[e^{\xi(X-b)}\mathbb{1}_{\{X>b\}}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\xi(X-b)}\mathbb{1}_{\{X>b\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{\xi(X-b)}\mathbb{1}_{\{X\leqslant b\}}\right]}
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{\xi\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{\xi(X-b)}\mathbb{1}_{\{X\leqslant b\}}\right] = \mathbb{P}(X = b)$ und $\lim_{\xi\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{\xi(X-b)}\mathbb{1}_{\{X>b\}}\right] = \infty$ erhalten wir

$$r \geqslant \lim_{\xi\to\infty}\frac{M'(\xi)}{M(\xi)} = \lim_{\xi\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[Xe^{\xi X}\right]}{\mathbb{E}\, e^{\xi X}} \geqslant b \xrightarrow[b\uparrow r]{} r.$$

Weil L konvex ist, ist L' eine wachsende Funktion, d.h. der Grenzwert von M'/M ist das Supremum.

(f) Folgt aus dem Beweis für den vorangehenden Teil für $b < r = \infty$.

■■

Aufgabe 18.4. Lösung: Die charakteristische Funktion von X_i ist $\mathbb{E}e^{i\xi X_1} = e^{-|x|}$. Weil die X_i iid sind, gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi S_n/n} = \left[\mathbb{E}e^{i\xi X_1/n}\right]^n = \left[\mathbb{E}e^{i(\xi/n)X_1}\right]^n = \left[e^{-|\xi/n}\right]^n = e^{-|\xi|}$$

d.h. S_n/n ist wiederum Cauchy-verteilt. Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}(S_n > an) = \frac{1}{\pi}\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_a^\infty = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan a\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan a.$$

■■

Aufgabe 18.5. Lösung: (Beachten Sie den Tippfehler in der Angabe: Das Gleichheitszeichen ,,=" im Ausdruck $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n/n \in B) = -\operatorname{ess\,inf}_{y\in B} y^2/2$ fehlt.) Es gilt

$$X_i \sim \mathsf{N}(0,1) \text{ iid} \implies S_n \sim \mathsf{N}(0,n) \implies \frac{S_n}{n} \sim \mathsf{N}(0,1/n)$$

und daher gilt für messbare Mengen $B \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in B\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{n}}} \int_B e^{-y^2/(2\frac{1}{n})}\,dy = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_B \left(e^{-y^2/2}\right)^n dy$$

woraus sich die in der Aufgabenstellung behauptete Gleichheit ergibt. Wir verwenden nun, dass $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$ gilt, und zwar in folgender Form:

$$\begin{aligned}\left[\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_B \left(e^{-y^2/2}\right)^n dy\right]^{1/n} &= \left[\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\right]^{1/n} \|e^{-y^2/2}\mathbb{1}_B\|_{L^n(dx)} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \cdot \operatorname{ess\,sup}_{y\in B} e^{-y^2/2} = e^{-\operatorname{ess\,inf}_{y\in B} y^2/2}.\end{aligned}$$

Durch Logarithmieren erhalten wir dann die Behauptung $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n/n \in B) = -\operatorname{ess\,inf}_{y\in B} y^2/2$.

■■

Aufgabe 18.6. Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|S_n - n\mu| \geqslant n\epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(S_n \geqslant n(\mu+\epsilon)\right) + \mathbb{P}\left(S_n \leqslant n(\mu-\epsilon)\right) \\ &\overset{18.4}{\leqslant} e^{-nI(\mu+\epsilon)} + e^{-nI(\mu-\epsilon)} \\ &\leqslant 2\max\left\{e^{-nI(\mu+\epsilon)}, e^{-nI(\mu-\epsilon)}\right\} = 2e^{-n[I(\mu+\epsilon)\wedge I(\mu-\epsilon)]}.\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 18.7. Lösung: Wir beginnen mit einer elementaren Ungleichung

$$e^x \leqslant x + e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle:

- $x \geqslant 1$. Hier gilt
$$x^2 \geqslant x \implies e^{x^2} \geqslant e^x \implies e^{x^2} + x \geqslant e^x.$$
- $x \leqslant 0$. Hier gilt
$$e^x - x = 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{x^n}{n!} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{x^{2n}}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^\infty \frac{(x^2)^n}{n!} = e^{x^2}.$$
- $x \in (0,1)$. Weil $x \mapsto e^x$ konvex ist, liegt $e^x - 1$ oberhalb seiner Tangente an der Stelle $x_0 = 0$:
$$e^x - 1 \geqslant x, \quad \forall x \implies e^{x^2} - 1 \geqslant x^2, \quad \forall x \implies e^{x^2} \geqslant 1 + x^2, \quad \forall x.$$

Weiter gilt für $x \in (0,1)$

$$e^x = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leqslant 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^2}{n!} = 1 + x + x^2(e-2) \leqslant 1 + x + x^2.$$

Somit also

$$e^x \leqslant 1 + x + x^2 \leqslant x + e^{x^2}.$$

Wir kommen nun zur eigentlichen Aussage. Zunächst haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|S_n - (2p-1)n| \geqslant n\epsilon) &= \mathbb{P}(S_n - (2p-1)n \geqslant n\epsilon) + \mathbb{P}(S_n - (2p-1)n \leqslant -n\epsilon)\\ &= \mathbb{P}(S_n - (2p-1)n \geqslant n\epsilon) + \mathbb{P}(-(S_n - (2p-1)n) \geqslant n\epsilon)\end{aligned}$$

Weil die X_i iid sind, folgt mit der Chebyshev–Markov Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\pm(S_n - (2p-1)n) \geqslant \epsilon n) &\leqslant e^{-an\epsilon}\mathbb{E}e^{\pm a(S_n-(2p-1)n)}\\ &= e^{-an\epsilon}\left(\mathbb{E}e^{\pm a(X_1-(2p-1))}\right)^n\\ &= e^{-an\epsilon}\left(pe^{\pm a(1-2p+1)} + qe^{\pm a(-1+1-2p)}\right)^n\\ &= e^{-an\epsilon}\left(pe^{\pm 2aq} + qe^{\mp 2ap}\right)^n\\ &\qquad |(*) \implies pe^{\pm 2aq} \leqslant p(\pm 2aq + e^{(\pm 2aq)^2})\\ &\qquad |(*) \implies qe^{\mp 2ap} \leqslant q(\mp 2ap + e^{(\mp 2ap)^2})\\ &\overset{(*)}{\leqslant} e^{-an\epsilon}\left(pe^{(2aq)^2} + qe^{(2ap)^2}\right)^n\\ &\leqslant e^{-an\epsilon}\left(pe^{(2a)^2} + qe^{(2a)^2}\right)^n\\ &= e^{4a^2n-an\epsilon}.\end{aligned}$$

Wir minimieren nun den Exponenten $4a^2n - an\epsilon$ und nach kurzer Rechnung sehen wir, dass das Minimum an der Stelle $a = \epsilon/8$ erreicht wird. Daher gilt

$$\mathbb{P}(\pm(S_n - (2p-1)n) \geqslant \epsilon n) \leqslant e^{-\frac{1}{16}\epsilon^2 n}$$

und wir erhalten schließlich die behauptete Ungleichung mit $a = 1/16$.

∎∎

Bibliography

[Schilling-MI] R. L. Schilling: *Maß und Integral. Eine Einführung für Bachelor-Studenten.* De Gruyter, Berlin 2014.

[Schilling-WT] R. L. Schilling: *Wahrscheinlichkeit. Eine Einführung für Bachelor-Studenten.* De Gruyter, Berlin 2017.

[Schilling-MIMS] R. L. Schilling: *Measures, Integrals and Martingales.* Cambridge University Press, Cambridge 2017 (2. Aufl.).

[1] J. Bertrand: *Calcul des Probabilités.* Gauthier–Villars, Paris 1889 (Nachdruck Éd. Jacques Gabay, Paris 2006).

[2] T. M. Bisgaard, Z. Sasvári: When does $E(X^k \cdot Y^l) = E(X^k) \cdot E(Y^l)$ imply independence?, *Stat. Probab. Letters* **76** (2006) 1111–1116.

[3] W. Feller: A limit theorem for random variables with infinite moments. *American Journal of Mathematics* **68** (1946) 257–262. Nachdruck in: R. L. Schilling, Z. Vondraček, W.A. Woyczyński: *William Feller – Selected Papers I*, Springer, Cham 2015, S. 721–726.

[4] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II.* Wiley, New York 1971 (2. Aufl.).

[5] M. Loève: *Probability Theory 1. Fourth Edition.* Springer, Graduate Texts in Mathematics **45**, New York 1977 (4th ed).

[6] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund: Sur les fonctions inépendantes. *Fundamenta Mathematicae* **29** (1937) 60–90. Nachdruck in: A. Zygmund (ed.): *Jozef Marcinkiewicz – Collected Papers*, PWN, Warszawa 1964, S. 233–260.

[7] W. Rudin: *Analysis.* Oldenbourg, München 2009 (4. Aufl.).