Vorwort

Dieses Lehrbuch setzt meinen Kurs »Maß und Integral« mit einer Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie fort. Es richtet sich an Studierende der Mathematik und Physik ab dem zweiten Studienjahr. Mein Ziel ist es, in kompakter und eingängiger Weise die zentralen Techniken und Resultate der Stochastik darzustellen und so eine Grundlage für weiterführende Vorlesungen zu geben.

Der Text folgt meinen Vorlesungen an der TU Dresden, er kann als Begleittext für eine Vorlesung aber auch zum Selbststudium verwendet werden. Als Fortsetzung wird in gleicher Ausstattung der Band *Martingale & Prozesse*, eine Einführung in die Theorie der diskreten Prozesse erscheinen. Voraussetzung für das Verständnis des vorliegenden Bandes sind Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie, wie sie etwa in Kapitel 1–16 meines Lehrbuchs *Maß und Integral* (im Text als [MI] zitiert) vermittelt werden. Um eine parallele Lektüre zu ermöglichen, werden an wesentlichen Stellen Querverweise auf die notwendigen Resultate aus [MI] gegeben. Auf Seite 5 und im Anhang A.1 sind außerdem die wichtigsten Sätze aus der Integralrechnung in wahrscheinlichkeitstheoretischer Schreibweise aufgeführt.

Die ersten fünf und das achte Kapitel führen in die Gedankenwelt der diskreten Wahrscheinlichkeit ein, allerdings nehme ich von Anfang an Bezug auf Konzepte aus der Maßtheorie. Dem schließt sich das Studium des Grenzverhaltens von (Summen von) unabhängigen Zufallsvariablen an. Die letzten vier Kapitel sind als Ergänzungen und zur selektiven Lektüre gedacht. Die Auswahl der Themen und Techniken ist natürlich subjektiv, dennoch will ich dem Leser ein breites Spektrum an klassischen und modernen Methoden, das auf eine weitere Spezialisierung optimal vorbereitet. Dabei war mein Leitbild die Frage »Was wird später im Studium und in Anwendungen wirklich benötigt«, wobei meine eigenen Forschungsinteressen – die Theorie der Stochastischen Prozesse – im Vordergrund stehen.

Für das tiefere Verständnis ist es wichtig, dass der Leser sich mit der Materie selbständig auseinandersetzt. Zum einen sind dafür die Übungsaufgaben gedacht (vollständige Lösungen gibt es unter www.motapa.de/stoch), andererseits weise ich im laufenden Text mit dem Symbol [✍] auf (bisweilen nicht ganz so offensichtliche) Lücken hin, die der Leser selbst ausfüllen sollte. Auf

---

- wichtige Schreibweisen,
- Gegenbeispiele, typische Fallen und versteckte Schwierigkeiten

!

---

wird durch derart markierte Absätze aufmerksam gemacht.

Vom Umfang entsprechen die Kapitel 1–14, abgerundet um ein oder zwei Wahlthemen, einer vierstündigen Vorlesung, etwa 4–5 Textseiten können in einer Vorlesungs-Doppelstunde durchgenommen werden. Die mit dem Symbol ♦ gekennzeichneten Abschnitte sind als Ergänzung gedacht und können je nach Zeit und Zielsetzung ausge-

https://doi.org/10.1515/9783111342252-201

wählt werden. Sie sind auch als Themen für ein Proseminar geeignet. Eine Übersicht über die Abhängigkeit der einzelnen Kapitel findet sich auf Seite VII.

Dieser Text ist aus Vorlesungen entstanden und ich danke meinen Studenten, Schülern und Kollegen für ihr Interesse und ihre Mitarbeit. Namentlich erwähnen möchte ich Dr. Björn Böttcher und Dr. Franziska Kühn, die den gesamten Text der ersten Auflage kritisch durchgesehen und viele Verbesserungen vorgeschlagen haben; Herr Böttcher hat außerdem viele Illustrationen erstellt. Prof. Niels Jacob, Dr. Katharina Fischer und Dr. Georg Berschneider verdanke ich viele hilfreiche Hinweise. Die zahlreichen Änderungen der zweiten Auflage wurden von Herrn Dr. David Berger und Dr. Robert Baumgarth gegengelesen.

Die Zusammenarbeit mit dem Verlag de Gruyter, allen voran Frau Schedensack und Herrn Horn, war sehr angenehm und hat wesentlich zum Gelingen dieses Buchs beigetragen. Meiner Frau danke ich für ihre Geduld, die sie o.B.d.A. (»ohne Beschränkung deiner Arbeitszeit«) immer wieder für meine Buchprojekte aufbringt.

Dresden, Januar 2025 René L. Schilling

Mathematische Grundlagen

Für die Lektüre dieses Texts werden Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie benötigt, etwa im Umfang von Kapitel 1–16 meines in der gleichen Reihe erschienenen Lehrbuchs *Maß und Integral*. Ein Kurs über elementare Wahrscheinlichkeitstheorie wird nicht vorausgesetzt, viele abstrakte Konzepte versteht man aber besser, wenn man die diskreten Grundlagen kennt und eine Intuition für die Sprech- und Denkweisen der Stochastik entwickelt.

Maß- und Integrationstheorie

Schilling, R.L.: *Maß und Integral*. De Gruyter, Berlin 2024[2] (zitiert als [MI]).

Schilling, R.L.: *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge 2017[2] (zitiert als MIMS).

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

Bosch, K.: *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2014[8].

Chung, K.L., Ait Sahlia, F.: *Elementary Probability Theory*. Springer, New York 2003[4].

Gorroochurn, P: *Classic Problems of Probability*. Wiley, Hoboken (NJ) 2012.

Grimmett, G., Welsh, D.: *Probability. An Introduction*. Oxford Univ. Press, Oxford 2014[2].

Haigh, J.: *Probability Models*. Springer, London 2013[2].

Haller, R., Barth, F.: *Berühmte Aufgaben der Stochastik*. De Gruyter, Berlin 2016[2].

Krengel, U.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg, Wiesbaden 2007[8].

Abhängigkeit der einzelnen Kapitel

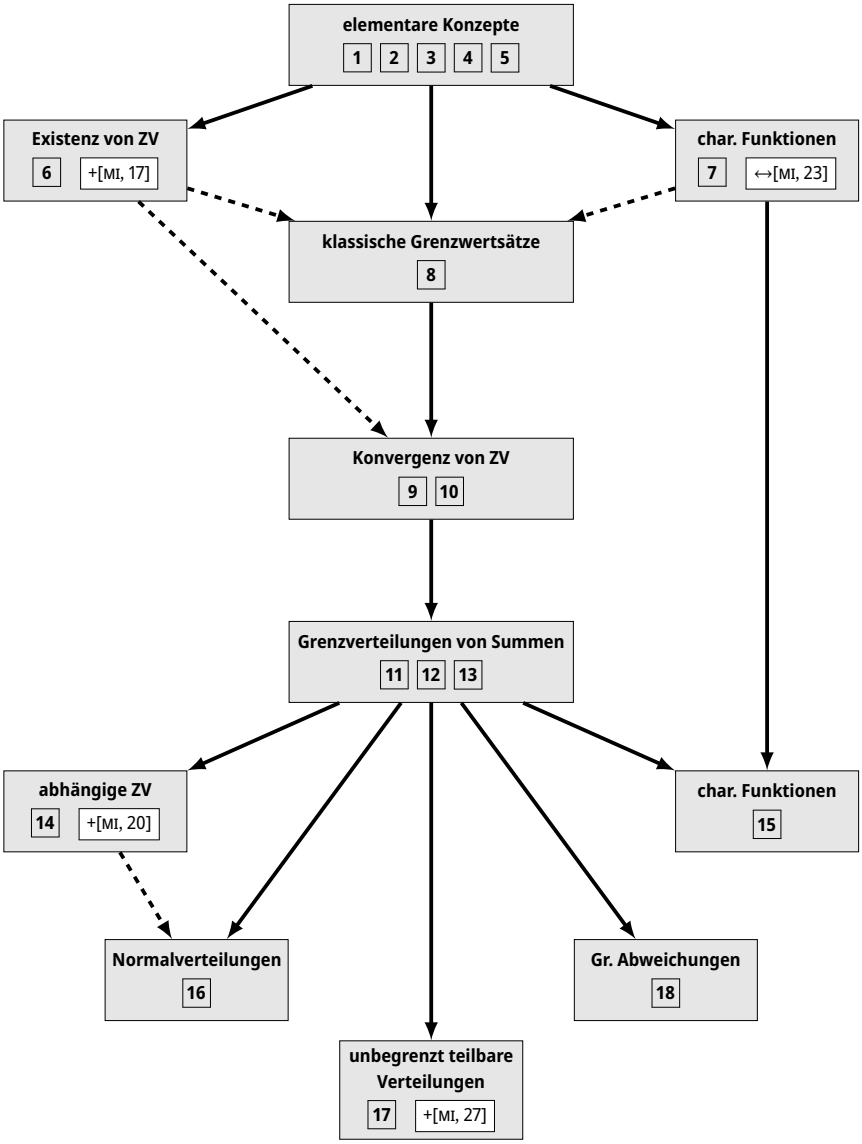

Abb. 1: Die Grafik zeigt die Abhängigkeit der Themen, gestrichelte Pfeile stehen für kleinere oder indirekte Abhängigkeiten. Wenn die nötigen Vorkenntnisse aus der Maß- und Integrationstheorie über den Standardstoff (Kapitel [MI, 1–16]) hinausgeht, weise ich darauf mit »+[MI, *n*]« hin; in der Regel kann aber das entsprechende Resultat zitiert werden. »↔[MI, *n*]« bedeutet, dass das entsprechende Kapitel durch [MI, Kapitel *n*] (teilweise) ersetzt werden kann.

https://doi.org/10.1515/9783111342252-202

Bezeichnungen

Allgemeines & Konventionen

[MI, Satz $n.m$]	Verweis *Maß und Integral*
positiv	stets im Sinne $\geqslant 0$
negativ	stets im Sinne $\leqslant 0$
$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$	$1, 2, 3, \ldots$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\inf \emptyset$	$\inf \emptyset = +\infty$
$a \vee b$	Maximum von a und b
$a \wedge b$	Minimum von a und b
$\lfloor x \rfloor$	$\max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$
$\lvert x \rvert$	Euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$, $\lvert x \rvert^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$
$\langle x, y \rangle$	Skalarprodukt $\sum_{i=1}^d x_i y_i$
E, E_d	Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{d \times d}$

Mengen

$\# A$, $\lvert A \rvert$	Kardinalität der Menge A
$\subset$	Teilmenge (inkl. »=«)
$\dot\bigcup$	Vereinigung paarweise disjunkter Mengen
A^c	Komplement der Menge A
$\overline{A}$	Abschluss der Menge A
$B_r(x)$	offene Kugel um x, Radius r
$A_n \uparrow A$	$A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$ & $A = \bigcup_n A_n$
$B_n \downarrow B$	$B_n \supset B_{n+1} \supset \ldots$ & $B = \bigcap_n B_n$
$\liminf_{n\to\infty} A_n$	$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant k} A_n$, 110, 123
$\limsup_{n\to\infty} B_n$	$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant k} B_n$, 110, 123
$A \perp\!\!\!\perp F$	A und F sind unabhängig, 48; (analog für Mengensysteme)
$\mathscr{A}$, $\mathscr{F}$	generische σ-Algebren
$\mathscr{A} \times \mathscr{F}$	$\{A \times F \mid A \in \mathscr{A},\ F \in \mathscr{F}\}$ »Rechtecke«
$\mathscr{A} \otimes \mathscr{F}$	Produkt-σ-Algebra
$\mathscr{B}(E)$	Borelmengen in E
$\mathscr{P}(E)$	Potenzmenge von E
$\sigma(\mathscr{G})$	erzeugte σ-Algebra [MI, S. 5]
$\delta(\mathscr{G})$	erzeugtes Dynkin-System [MI, S. 16]

Maße & Verteilungen

$\mathbb{P}$	W-Maß, 2
$\mathbb{P}_X$, $\mathbb{P}(X \in \bullet)$	Verteilung, 4
$\mathbb{E} = \int \ldots d\mathbb{P}$	Erwartungswert, 4
δ_x	Dirac-Maß in x
λ, λ^d	Lebesguemaß (in $\mathbb{R}^d$)
$\mu \otimes \nu$	Produkt von Maßen
$\mathsf{B}(p)$	Bernoulliverteilung, 18, 248
$\mathsf{B}(n, p)$	Binomialverteilung, 19, 248
$\mathsf{Poi}(\lambda)$	Poissonverteilung, 71, 248
$\mathsf{Exp}(\lambda)$	Exponentialverteilung, 72, 250
$\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung, 26, 250
$\mathsf{N}(m, C)$	– in $\mathbb{R}^d$, 197, 250
$\mathsf{U}[a, b]$	Gleichverteilung, 26, , 248

Zufallsvariable & Funktionen

X, Y, Z	Zufallsvariable, 4
X^+	Positivteil: $X \vee 0$
X^-	Negativteil: $-(X \wedge 0)$
$\{X \in B\}$	$\{\omega \mid X(\omega) \in B\}$
$\{X \geqslant a\}$	$\{\omega \mid X(\omega) \geqslant a\}$ usw.
$X \perp\!\!\!\perp Y$	X, Y sind unabhängig
$X \sim Y$	X ist wie Y verteilt
$X \sim \mu$	X hat Verteilung μ
$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
$\operatorname{supp} u$	Träger $\overline{\{u \neq 0\}}$
$C(E)$	stetige Funktionen auf E
$C_b(E)$	beschränkte — —
$C_c(E)$	— — mit kompaktem Träger
L^1, $L^1(\mathbb{P})$	ZV mit $\mathbb{E}\lvert X \rvert < \infty$, 5
L^p, L^∞	ZV mit $\mathbb{E}\left[\lvert X \rvert^p\right] < \infty$, 5
$L^p(\mathscr{F})$	betont die $\mathscr{F}$-Messbarkeit
$\lVert X \rVert_{L^p}$	$\left(\mathbb{E}\left[\lvert X \rvert^p\right]\right)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$
$\lVert X \rVert_{L^\infty}$	$\inf\{c > 0 \mid \mathbb{P}(\lvert X \rvert \geqslant c) = 0\}$
$\lVert u \rVert_\infty$	$\sup_x \lvert u(x) \rvert$

Abkürzungen

W-	Wahrscheinlichkeit(s)-
ZV	Zufallsvariable
CLT	zentraler Grenzwertsatz (central limit theorem)
SLLN	starkes Gesetz d. großen Zahlen (strong law of large numbers)
WLLN	schwaches Gesetz d. gr. Zahlen (weak law of large numbers)
iid	unabhängig und identisch verteilt (independent, identically distributed)
f.s., f.ü.	fast sicher, fast überall
$\cap$/$\cup$-stabil	Familie enthält endliche Schnitte/Vereinigungen
[✍]	selbst rechnen!

https://doi.org/10.1515/9783111342252-203

René L. Schilling

Wahrscheinlichkeit

Stochastik: von Abweichungen bis Zufall

2. Auflage

DE GRUYTER

Mathematics Subject Classification 2020
Primary: 60-01. Secondary: 60A10; 60E05; 60E07; 60E10; 60Fxx; 60G50.

Autor

Prof. Dr. René L. Schilling
Technische Universität Dresden
Institut für Mathematische Stochastik
01062 Dresden
Germany

rene.schilling@tu-dresden.de
tu-dresden.de/mn/math/stochastik/schilling

Weiterführendes Material

www.motapa.de/stoch

ISBN 978-3-11-134211-5
e-ISBN (PDF) 978-3-11-134225-2
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-134261-0

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.dnb.de abrufbar.

© 2025 Copyright-Text, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston
Einbandabbildung: René L. Schilling. Hintergrundbild: New York Südl. Teil. Meyers Konversations-Lexikon 1905^{6}, Bd. 14, S. 606 *f*.
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

www.degruyter.com