Stichwortverzeichnis

Alle Zahlenangaben beziehen sich auf Seitennummern, (Pr. $m.n$) verweist auf die Aufgabe n (im Kapitel m) auf der jeweils angegebenen Seite. Wir verwenden die Abkürzungen »CLT« (Zentraler Grenzwertsatz), »SLLN/WLLN« (starkes/schwaches Gesetz der großen Zahlen), »W-« (Wahrscheinlichkeit/s-) und »ZV« (Zufallsvariable).

Additionssatz

- für die Binomialverteilung, 59
- für die Gammaverteilung, 59
- für die Normalverteilung, 59
- für die Poissonverteilung, 59

Approximation

- der Binomialverteilung, 101
- der Poissonverteilung, 84, 105 (Pr. 8.2)
- asymptotische Vernachlässigbarkeit, 159
- Atom, 24, 34 (Pr. 3.19), 70 (Pr. 6.2)

Auswahl

- mit Zurücklegen, 9, 22
- ohne Zurücklegen, 8, 23

ballot problem, 47 (Pr. 4.17)

Bayes Billiardtisch, 45

Bayessche Formel, 37

bedingte Dichte, 176

bedingte Erwartung, 164

- L^2 -Projektion, 169
- $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$, 175, 178
- abstrakt vs. klassisch, 165
- Beppo Levi, 168
- dominierte Konvergenz, 168
- Eigenschaften, 167
- Fatous Lemma, 168
- Gauß-ZV, 205
- Jensensche Ungleichung, 168
- Markovsche Ungleichung, 182 (Pr. 14.17)
- Maßwechsel, 183 (Pr. 14.22)
- pull out, 169
- reguläre Version, 181
- testen am Erzeuger, 171
- tower property, 169
- Unabhängigkeit, 172
- bedingte Verteilung, 177, 179
- bedingte Wahrscheinlichkeit, 35, 164
 - abstrakt vs. klassisch, 170
 - Bayessche Formel, 37
 - Kettenformel, 37
 - totale Wahrscheinlichkeit, 37

Bernoulliverteilung, 18, 71

Bernstein-Polynome, 87

Bernsteinsche Ungleichung, 235 (Pr. 18.7)

Berry-Esseen-Ungleichung, 101

Bertrands Paradox, 28–30

Bertrands Schubfachproblem, 47 (Pr. 4.15)

Binomialverteilung, 20

Blockbildung bei Unabhängigkeit, 51, 67

Bonferronische Ungleichung, 16 (Pr. 2.18)

Borel-Cantelli-Lemma, 110, 123, 134 (Pr. 10.4)

Buffon's needle problem, 31

Cauchy-Verteilung, 26, 73

– charakteristische Funktion, 73

Cesàros Lemma, 141

charakteristische Funktion, 71

- $\iff$ positiv definit, 192
- analytisch, 201
- Cauchy-Verteilung, 73
- Eigenschaften, 74
- Eindeutigkeit, 76–77
- Momente einer ZV, 74, 75
- Normalverteilung, 72, 197
- periodisch, 185
- Stetigkeitssatz, 117, 184
- truncation inequality, 80
- Umkehrformel, 78, 82 (Pr. 7.15), 195 (Pr. 15.8)
- Unabhängigkeit, 77
- unbegrenzt teilbar, 208
- Verteilungskonvergenz, 117, 184
- Wachstum, 204
- charakteristischer Exponent, 213, 216
- Chebyshevsche Ungleichung, 5, 237
- CLT, *siehe* Zentraler Grenzwertsatz
- Coupling, 85
- coupon collector, 54–55, 61 (Pr. 5.20)
- Cramér-Wold device, 119

d -Konvergenz, *siehe* Konvergenz von ZV

Dichte, 24

- Normalverteilung in $\mathbb{R}^d$, 197

– Normalverteilung in $\mathbb{R}$, 26, 72, 89
 diskreter W -Raum, 17
 Drei-Reihen-Satz, 139

Einschluss-Ausschluss-Formel, 13–14, 16 (Pr. 2.19)
 Ereignis, 2, 6
 Ergebnis, 2, 6
 Ergebnisraum, 2, 6
 Erwartungswert, 4–6
 Etemadis Maximalungleichung, 135
 Experiment, 2, 6
 Exponentialverteilung, 26, 72

Faltung, 58
 Fehler 1. & 2. Art, 39
 Feller-Bedingung, 156
 f.s. Konvergenz, *siehe* Konvergenz von ZV

Gauß-, *siehe auch* Normal-
 Gauß-ZV, 196
 Geburtstagsproblem, 32 (Pr. 3.5)
 Gegenbeispiel
 – char. Funkt. auf $[-a, a]$, 195 (Pr. 15.10)
 – CLT ohne Varianz, 154
 – Faktorisierung char. Funkt., 222 (Pr. 17.6)
 – fester Zweig des Logarithmus, 211
 – Funktionen unabhängiger ZV, 60 (Pr. 5.6)
 – Konvergenz von ZV, 112–113, 120
 – Lindeberg Bedingung, 163 (Pr. 13.9)
 – Produkt char. Fnen., 78, 81 (Pr. 7.3)
 – unabhängig $\neq$ paarweise unabhängig, 49
 – unabhängig $\neq$ unkorreliert, 57, 199
 – Wachstum char. Funkt., 194 (Pr. 15.3)
 gemeinsame Verteilung, 52
 geometrische Verteilung, 20
 geometrische Wahrscheinlichkeit, 27
 Gesetz der großen Zahlen
 – für Warteschlangen, 153 (Pr. 12.4)
 – schwach (WLLN), 86, 88
 – stark (SLLN), 124, 141, 143, 146
 – Umkehrung des SLLN, 126, 145
 Gesetz der kleinen Zahlen, 84
 Gleichverteilung, 17, 26, 71
 Glivenko-Cantelli-Lemma, 150
 Glättungslemma, 93
 große Abweichungen, 227, 230, 233

Hewitt-Savage 0-1-Gesetz, 128

hypergeometrische Verteilung, 11, 24
 – Erwartung, Varianz, 33 (Pr. 3.13)

Integralsinus, 82 (Pr. 7.14)
 Integralvergleichskriterium, 239

Jensensche Ungleichung, 5, 238
 – für bedingte Erwartung, 168

Kahnemann-Tversky-Paradox, 38–39

Kettenformel, 37

klassische Probleme

– Bertrand's ballot problem, 47 (Pr. 4.17)
 – Bertrands Paradox, 28–30
 – Bertrands Schubfachproblem, 47 (Pr. 4.15)
 – Buffon's needle, 31
 – coupon collector, 54–55, 61 (Pr. 5.20)
 – Geburtstagsproblem, 32 (Pr. 3.5)
 – Kahnemann-Tversky-Paradox, 38–39
 – normale Zahlen (Borel), 130–131
 – Pólya-Urne, 24
 – problème des parties (de Méré), 21
 – ruin problem, 43
 – secretary problem, 55–56
 – Simpsons Paradox, 46 (Pr. 4.7)
 – Würfelproblem von de Méré, 15 (Pr. 2.10)
 – Ziegenproblem, 41–42
 – Zwillingenproblem, 46 (Pr. 4.9)

Kolmogorovsche Axiome, 2

Kolmogorovsches 0-1-Gesetz, 127

Kommissionsproblem, 11

Kompaktheit von W -Maßen, 184

Konfidenzintervall, 104

Konvergenz von ZV

– fast sicher (f.s.), 106, 121 (Pr. 9.6)
 – im p -ten Mittel, in L^p , 106
 – in Verteilung (d), 107, 114, 116, 117, 119
 – in Wahrscheinlichkeit ($\mathbb{P}$), 106
 – in Wahrscheinlichkeit ($\mathbb{P}$) ist metrisierbar,
 121 (Pr. 9.5)
 – in Wahrscheinlichkeit ($\mathbb{P}$) ist vollständig,
 121 (Pr. 9.3)
 – in Wahrscheinlichkeit ($\mathbb{P}$) Teilfolgenprinzip,
 121 (Pr. 9.7)
 – schnelle stochastische Konv., 111
 – schwach (d), 107, 114, 116, 117, 119
 – schwach (d) Teilfolgenprinzip, 121 (Pr. 9.8)
 – stochastisch ($\mathbb{P}$), 106
 – Typerhaltung, 190

- Übersichtsschema, 109
- Kovarianz, 59
- Kroneckers Lemma, 145

- Lévy-Khintchin-Formel, 216
- Lévy-Maß, 217
- Lévy-Tripel, 217
- Laplaces »rule of succession«, 44
- Laplacescher W-Raum, 17
- Legendre-Transformation, 225
- Eigenschaften, 228
- Lemma
 - Borel-Cantelli, 110, 123, 134 (Pr. 10.4)
 - Cesàro, 141
 - Glivenko-Cantelli, 150
 - Glättungslemma, 93
 - Kronecker, 145
- Lindeberg-Bedingung, 155
- lineare Modelle, 205
- Lotto, 9, 11
- Lyapunov-Bedingung, 158

- Markov-Kern, 177, 181, 182 (Pr. 14.20)
- Markovsche Ungleichung, 5, 33 (Pr. 3.17), 237
- Mills-Quotient, 89
- Minimax-Prinzip, 233
- Momente einer ZV, 74, 75
- momentenerzeugende Funktion (MGF), 225
 - Eigenschaften, 228, 234 (Pr. 18.1, 18.3)
- Monte-Carlo-Integration, 148–149
- Multinomialkoeffizient, 12

- negative Binomialverteilung, 33 (Pr. 3.11)
- normale Zahl, 130
- Normalverteilung, 26
 - Additionssatz, 59
 - bivariat, 206 (Pr. 16.5)
 - Charakterisierung, 207 (Pr. 16.12)
 - charakteristische Funktion, 72
 - Faktorisierungssatz, 203
 - in $\mathbb{R}^d$, 197
 - Momente, 81 (Pr. 7.8, 7.9)
 - tail estimate, 89, 207 (Pr. 16.13)
 - unabhängig = unkorreliert, 199
- Null-Eins-Gesetz
 - von Hewitt-Savage, 128
 - von Kolmogorov, 127

- $\mathbb{P}$ -Konvergenz, *siehe* Konvergenz von ZV

- Pólya-Urne, 24
- permutierbares Ereignis, 128
- Poincarésche Formel, 14
- Poisson-Approximation, 84, 105 (Pr. 8.2)
- Poissonverteilung, 71, 84
- positiv definit, 191
- problème des parties, 21
- pull out (bed. Erwartung), 169

- Rademacher-Funktionen, 61 (Pr. 5.19), 69, 113
- random walk, 105 (Pr. 7.4), 131
- reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit, 181
- Rekorde, 56–57
- Restgliedabschätzung, 96, 156
- Riemann-Lebesgue-Lemma, 188
- ruin problem, 43

- Satz
 - L^1 -SLLN von Etemadi, 143
 - L^1 -SLLN von Kolmogorov, 146
 - L^2 -SLLN von Kolmogorov, 146
 - L^4 -SLLN, 124
 - CLT von DeMoivre-Laplace, 89, 154
 - CLT von Lindeberg-Lévy-Feller, 155
 - Drei-Reihen-Satz, 139
 - große Abweichungen, 227, 230, 233
 - von Bienaymé, 60
 - von Bochner, 192
 - von Chung-Fuchs, 132
 - von Cramér, 203
 - von Cramér-Chernoff, 227, 230
 - von Cramér-Wold, 119
 - von de Finetti, 215
 - von der Typenkonvergenz, 190
 - von Hadamard, 246
 - von Kac, 52, 77
 - von Lévy, 117, 136, 184
 - von Liouville, 246
 - von Marcinkiewicz, 204
 - von Plancherel, 82 (Pr. 7.12)
 - von Radon-Nikoým, 166
 - von Riemann-Lebesgue, 188
 - von Slutsky, 120, 121 (Pr. 9.12)
 - von Weierstraß, 87
 - WLLN, 86, 88
- secretary problem, 55–56
- Sensitivität, 39
- Simpsons Paradox, 46 (Pr. 4.7)
- SLLN, *siehe* Gesetz der großen Zahlen

- Spezifität, 39
 Steinsche Differentialgleichung, 97
 Stetigkeitssatz von Lévy, 117, 184
 Stirling-Zahl, 14
 stochastische Konvergenz, 106
 Straffheit, 117, 184
 Summen unabhängiger ZV
 – $\mathbb{P}$ -Konvergenz = d -Konvergenz, 140 (Pr. 11.4)
 – f.s. Konvergenz = $\mathbb{P}$ -Konvergenz, 136
 – Konvergenzkriterium, 139
- tail probability, 80
 Teilfolgenprinzip, 121 (Pr. 9.7), 121 (Pr. 9.8), 190
 Teilungsproblem, 21
 terminales Ereignis, 126
 totale Wahrscheinlichkeit, 37
 tower property (bed. Erwartung), 169
 truncation inequality, 80
- Unabhängigkeit
 – Blocklemma, 51, 67
 – Charakterisierung, 52, 77
 – Mengen, 48
 – Mengensysteme, 49
 – paarweise, 49
 – ZV, 49
- unbegrenzt teilbare ZV, 208
 – Beispiele, 209
 – charakteristische Funktion, 208
 – charakteristischer Exponent, 213
 – Konvergenz, 214
 – Lévy-Khintchin-Formel, 216
 – Wurzel, 210
 – zusammengesetzte Poisson-ZV, 216
- unendliches Produkt von Maßen, 66
- Ungleichung
 – bedingte Jensen Ungl., 168
 – Bernstein, 235 (Pr. 18.7)
 – Berry-Esseen, 101
 – Bonferroni, 16 (Pr. 2.18)
 – Chebyshev, 5, 237
 – Etemadi, 135
 – Jensen, 5, 238
 – Kolmogorov, 140 (Pr. 11.1)
 – Markov, 5, 33 (Pr. 3.17), 182 (Pr. 14.17), 237
 – Taylor-Restglied, 96, 156
- unkorreliert, 57
 unterhalbstetig, 240
 Urnenmodell, 22–24
- Varianz, 59
 verallgemeinerte Inverse, 62–64, 70
 Verteilung, 4
 – Tabellen, 248–251
 – absolutstetig, 24
 – α -stabil, 223 (Pr. 17.11)
 – Ausläufer (tail), 80
 – diskret, 34 (Pr. 3.19)
 – gemeinsame, 52
 – singular, 195 (Pr. 15.9)
 – stetig, 24, 34 (Pr. 3.19), 70 (Pr. 6.2), 195 (Pr. 15.9)
 – Summen unabh. ZV, 58
 – unbegrenzt teilbar, 208
 – unendliches Produkt, 66
 – von X/Y , 61 (Pr. 5.15)
 – von $X \cdot Y$, 81 (Pr. 7.5)
- Verteilungsfunktion, 24, 62, 64
 – eindimensionale, 25, 62
 – empirisch, 150
 – Konvergenz, 114, 116, 151
 – multivariate, 242–244
 – tail estimates, 33 (Pr. 3.18)
 – verallg. Inverse, 62, 70 (Pr. 6.1)
- Verteilungskonvergenz, 107, 114, 116, 117, 119
 – Typerhaltung, 190
- W-Maß, W-Raum, 2
 – diskret, 17
 – Kompaktheit, 184
 – Laplace, 17
- Weierstraßscher Approximationssatz, 87
 WLLN, *siehe* Gesetz der großen Zahlen
 Würfelproblem von de Méré, 15 (Pr. 2.10)
- Zentraler Grenzwertsatz (CLT), 154
 – charakterist. Funktionen, 90–94, 155
 – DeMoivre-Laplace, 89, 154, 200
 – Dreiecksschema, 161
 – Feller, 156, 159
 – Lindeberg-Lévy-Feller, 155
 – Lindeberg-Methode, 94–97
 – Lyapunov, 158
 – multivariat, 200
 – Selbstnormalisierung, 162 (Pr. 13.6)
 – Steinsche Methode, 97–101
 – zufällige Summation, 162 (Pr. 13.3, 13.4)
- Ziegenproblem, 41–42
 Zufallsvariable (ZV), 4
 – absolutstetig, 24, 188

- diskret, 17, 188
- Existenz, 62
- gitterförmig, 185
- Konstruktion unabh. ZV, 64, 65, 68
- normal(verteilt), 196
- stetig, 24
- Symmetrisierung, 70 (Pr. 6.6), 74, 82 (Pr. 7.10), 138
- unbegrenzt teilbar, 208
- zufällige Irrfahrt, 105 (Pr. 7.4), 131
- Zwillingsproblem, 46 (Pr. 4.9)
- Zylindermenge, 20, 66
- Zähldichte, 17

René L. Schilling

Wahrscheinlichkeit

Stochastik: von Abweichungen bis Zufall

2. Auflage

DE GRUYTER

Mathematics Subject Classification 2020

Primary: 60-01. Secondary: 60A10; 60E05; 60E07; 60E10; 60Fxx; 60G50.

Autor

Prof. Dr. René L. Schilling
Technische Universität Dresden
Institut für Mathematische Stochastik
01062 Dresden
Germany
rene.schilling@tu-dresden.de
tu-dresden.de/mn/math/stochastik/schilling

Weiterführendes Material

www.motapa.de/stoch

ISBN 978-3-11-134211-5

e-ISBN (PDF) 978-3-11-134225-2

e-ISBN (EPUB) 978-3-11-134261-0

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2025 Copyright-Text, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston

Einbandabbildung: René L. Schilling. Hintergrundbild: New York Südl. Teil. Meyers Konversations-Lexikon 1905⁶, Bd. 14, S. 606 f.

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

www.degruyter.com