Maß & Integral (2. Auflage)
de Gruyter Lehrbuch, Berlin 2025
ISBN: 978–3–11–134277–1

Lösungshandbuch

René L. Schilling & Franziska Kühn

Dresden, April 2025

Diese Version: May 3, 2025

Dank (1. Auflage). Wir bedanken uns bei Herrn Julian Hollender und Frau Vera Schade, die viele der Aufgaben und Lösungen beigesteuert haben.

Dresden, April 2025

René Schilling
Franziska Kühn

Contents

2 Sigma-Algebren

Aufgabe 2.1. Lösung:

(a) Die angegebene Menge ist keine Teilmenge der Potenzmenge von $\{a,b,c,d\}$ und kann somit keine σ-Algebra sein.

(b) Das Mengensystem ist eine σ-Algebra, da sie offensichtlich stabil unter Vereinigungen und Komplementen ist und die Grundmenge $\{a,b,c,d\}$ enthält. Mengen der Form $\{\varnothing,\Omega\}$ sind immer σ-Algebren über Ω für beliebige Mengen Ω.

(c) Das Mengensystem ist keine σ-Algebra, da z. B. das Komplement von $\{a\}$ nicht in ihr enthalten ist.

(d) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist für beliebige Mengen Ω eine σ-Algebra über Ω.

Aufgabe 2.2. Lösung:

(a) Wir zeigen die Mengengleichheit, indem wir nachweisen, dass alle Elemente, die in einer der Mengen liegen, auch in der anderen liegen. Die meisten Schritte in der Argumentation sind klar. Lediglich bei dem mit einem $(\star)$ gekennzeichneten Äquivalenzpfeil muss man genauer hinschauen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\omega \in \xi^{-1}(B^c) &\Leftrightarrow \exists y \in B^c:\ \xi(\omega) = y\\ &\overset{\star}{\Leftrightarrow} \nexists\, z \in B:\ \xi(\omega) = z\\ &\Leftrightarrow \omega \notin \{\xi \in B\}\\ &\Leftrightarrow \omega \in \{\xi \in B\}^c\end{aligned}$$

Die Äquivalenz $(\star)$ gilt, da ξ eine Abbildung ist: Jedem $\omega \in \Omega$ wird *genau* ein Element in $\mathbb{R}$ zugeordnet. (Ist $\xi(\omega) = y \in B^c$, dann gilt $\xi(\omega) \notin B$, d.h. es kann kein $z \in B$ existieren mit $\xi(\omega) = z$. Die Umkehrrichtung folgt analog.)

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\omega \in \xi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) &\Leftrightarrow \xi(\omega) \in \bigcup_{i\in I} B_i\\ &\Leftrightarrow \exists i_0 \in I : \xi(\omega) \in B_{i_0}\\ &\Leftrightarrow \exists i_0 \in I : \omega \in \xi^{-1}\left(B_{i_0}\right)\\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{i\in I} \xi^{-1}\left(B_i\right).\end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}\omega \in \xi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) &\Leftrightarrow \xi(\omega) \in \bigcap_{i\in I} B_i\\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : \xi(\omega) \in B_i\\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : \omega \in \xi^{-1}(B_i)\\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{i\in I} \xi^{-1}(B_i).\end{aligned}$$

(d) Wähle $\Omega = \{1,2\}$, $\xi(1) := \xi(2) := 1$, $A := \{1\}$. In diesem Fall gilt: $A^c = \{2\}$ und somit

$$(\xi(A))^c = (\{1\})^c = \{2\} \neq \{1\} = \xi(A^c).$$

(e) Es gilt:

$$\begin{aligned}x \in \xi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\Leftrightarrow \exists \omega \in \bigcup_{i\in I} A_i : x = \xi(\omega)\\ &\Leftrightarrow \exists i_0 \in I, \omega \in A_{i_0} : x = \xi(\omega)\\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} \xi(A_i).\end{aligned}$$

(f) Für $j \in I$ gilt $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_j$, also

$$\xi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \xi(A_j).$$

Da dies für alle $j \in I$ gilt, folgt

$$\xi\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{j\in I} \xi(A_j).$$

Zusatz: Die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht. Wählen wir z. B. $\Omega = \{1,2,3\}$ und $\xi(1) = \xi(3) = 0$, $\xi(2) = 1$, dann gilt für $A = \{1,2\}$ und $B = \{2,3\}$, dass

$$\xi(A \cap B) = \xi(\{2\}) = \{1\}$$

aber

$$\xi(A) \cap \xi(B) = \xi(\{1,2\}) \cap \xi(\{2,3\}) = \{0,1\} \cap \{0,1\} = \{0,1\}.$$

■■

Aufgabe 2.3. Lösung: Es gilt

- $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{A}$.
- Es sei $A \in \mathcal{A}$. Nach Definition existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $A = f^{-1}(B)$. Gemäß Aufgabe 2.2 gilt

$$A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c).$$

Wegen $B^c \in \mathcal{B}$ folgt $A^c \in \mathcal{A}$.

- Es seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Dann existieren $B_n \in \mathcal{B}$ mit $A_n = f^{-1}(B_n)$. Wiederum folgt aus Aufgabe 2.2, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$ zeigt dies $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

■■

Aufgabe 2.4. Lösung:

(a) (Σ_1) $E \in \mathcal{A}$ und damit $C = E \cap C \in \mathcal{C}$

(Σ_2) Sei $A \cap C \in \mathcal{C}$ dann gilt (mit Komplement bzgl. C), dass

$$(A \cap C)^c = C \smallsetminus (A \cap C) = (E \smallsetminus A) \cap C$$

und $E \smallsetminus A \in \mathcal{A}$. Damit gilt: $(A \cap C)^c \in \mathcal{C}$

(Σ_3) Für $A_j \cap C \in \mathcal{C}$ gilt $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ und damit

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_j \cap C) = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \cap C \in \mathcal{C}.$$

(b) Eine Menge U ist offen in $\mathbb{R}^d$ genau dann wenn für alle $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Wir zeigen als erstes, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie in $\mathbb{R}^d$ ist: $(\mathcal{O}_1)$ Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $B_1(x) \subset \mathbb{R}^d$, also ist $\mathbb{R}^d \in \mathcal{O}$. Außerdem ist für $\varnothing$ die Bedingung leer, d.h. auch $\varnothing \in \mathcal{O}$.

$(\mathcal{O}_2)$ Seien $U, V \in \mathcal{O}$. Gilt $U \cap V = \varnothing$, dann folgt aus $(\mathcal{O}_1)$, dass $U \cap V \in \mathcal{O}$. Wir können also annehmen, das $U \cap V \neq \varnothing$. Für jedes $x \in U \cap V$ existieren $\epsilon_U, \epsilon_V > 0$, so dass $B_{\epsilon_U}(x) \subset U$ und $B_{\epsilon_V}(x) \subset V$. Wegen

$$\mathsf{B}_{\epsilon_U \wedge \epsilon_V}(x) \subset U \cap V$$

folgt $U \cap V \in \mathcal{O}$.

$(\mathcal{O}_3)$ Sei J eine beliebige Indexmenge und $U_j \in \mathcal{O}$ für alle $j \in J$. Für jedes $x \in \bigcup_{j\in J} U_j$ existiert ein $j_0 \in J$ mit $x \in U_{j_0}$. Da U_{j_0} offen ist, können wir $\epsilon > 0$ wählen, so dass

$$B_\epsilon(x) \subset U_{j_0} \subset \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Damit ist $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{O}$.

Dies zeigt, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie in $\mathbb{R}^d$ ist. Damit folgt auch leicht die zweite Behauptung:

$(\mathcal{O}_1)$ $\varnothing, \mathbb{R}^d \in \mathcal{O}$ und damit sind $\varnothing \in \mathcal{O}$, $\mathbb{R}^d \cap C \in \mathcal{O}_C$.

$(\mathcal{O}_2)$ $U \cap C, V \cap C \in \mathcal{O}_C \;\Rightarrow\; (U \cap C) \cap (V \cap C) = (U \cap V \cap C) \in \mathcal{O}$ denn $U \cap V \in \mathcal{O}_C$.

$(\mathcal{O}_3)$ $U_j \cap C \in \mathcal{O}_C \Rightarrow \bigcup_{j\in J}(U_j \cap C) = \left(\bigcup_{j\in J} U_j\right) \cap C \in \mathcal{O}_C$ denn $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{O}$.

(c) Für $O \cap C \in \mathcal{O}_C$ gilt offenbar $O \cap C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_C$ da $\sigma(\mathcal{O}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Folglich, $\sigma(\mathcal{O}_C) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_C$. Um $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_C \subset \sigma(\mathcal{O}_C)$ zu zeigen, definieren wir

$$\Sigma := \{B \subset \mathbb{R}^d; B \cap C \in \sigma(\mathcal{O}_C)\}.$$

Man kann leicht sehen, dass Σ eine σ-Algebra ist. Weiterhin gilt $\mathcal{O} \subset \Sigma$. Damit folgt $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \Sigma$.

Aufgabe 2.5. Lösung: Wir bemerken zunächst, dass $\sigma(\mathcal{G})_A$ eine σ-Algebra ist, nämlich die Spur-σ-Algebra von $\sigma(\mathcal{G})$. Weil $\mathcal{G}_A \subset \sigma(\mathcal{G})_A$, folgt auch $\sigma(\mathcal{G}_A) \subset \sigma(\mathcal{G})_A$.

Wir müssen noch $\sigma(\mathcal{G})_A \subset \sigma(\mathcal{G}_A)$ zeigen. Dazu definieren wir die Menge

$$\Sigma := \{S \subset E \mid S \cap A \in \sigma(\mathcal{G}_A)\}$$

und wir rechnen nach, dass Σ eine σ-Algebra auf E ist.

(Σ_1) $E \cap A = A \in \sigma(\mathcal{G}_A)$, d.h. $E \in \Sigma$

(Σ_2) Sei $S \in \Sigma$. Dann gilt $S^c \cap A = A \setminus S = A \setminus (S \cap A)$. Nach Voraussetzung ist $S \cap A \in \sigma(\mathcal{G}_A)$ und weil $\sigma(\mathcal{G}_A)$ eine σ-Algebra auf A ist, folgt $A \setminus (S \cap A) \in \sigma(\mathcal{G}_A)$. Mithin ist $S^c \in \Sigma$.

(Σ_3) Sei $(S_n)_n \subset \sigma(\mathcal{G}_A)$. Dann ist $S_n \cap A \in \sigma(\mathcal{G}_A)$ und wir erhalten

$$\left(\bigcup_n S_n\right) \cap A = \bigcup_n (S_n \cap A) \in \sigma(\mathcal{G}_A)$$

d.h. $\bigcup_n S_n \in \Sigma$.

Offensichtlich ist $\mathcal{G} \subset \Sigma$, d.h. $\sigma(\mathcal{G}) \subset \Sigma$ und wir erhalten aus der Definition von Σ, dass $\sigma(\mathcal{G}) \cap A \subset \sigma(\mathcal{G}_A)$.

Aufgabe 2.6. Lösung: Wir führen zuächst einige Notationen ein:

- $\mathcal{O}$: offene Mengen im $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{C}$: abgeschlossene Mengen im $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{K}$: kompakte Mengen im $\mathbb{R}^n$

Per Definition gilt dann

$$\mathbb{B} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{C}$$

und somit

$$\sigma(\mathbb{B}) \subset \sigma(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

Da für jede abgeschlossene Menge $C \in \mathcal{C}$ gilt $C^c \in \mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{O})$ und $\sigma(\mathcal{O})$ eine σ-Algebra ist, gilt $C \in \sigma(\mathcal{O})$. Folglich, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{O})$. Können wir zeigen, dass

$$\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathbb{B}) \tag{$\star$}$$

dann folgt wegen $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathbb{B}) \subset \sigma(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{O})$$

die Behauptung.

Zu $(\star)$: $(\star)$ folgt sofort aus der folgenden Identität:

$$O = \bigcup_{B \in \mathbb{B}, B \subset O} B, \qquad O \in \mathcal{O}.$$

Diese Gleichheit sieht man so:

- »$\subset$«: Es sei $x \in O$. Da O offen ist, existiert $r > 0$ mit $B_r(x) \subset O$. Wählen wir $q \in B_{r/4}(x) \cap \mathbb{Q}^n$ und $r' \in (r/4, r/2) \cap \mathbb{Q}$, dann gilt $B := \overline{B}_{r'}(q) \subset B_r(x) \subset O$. Wegen $x \in B \in \mathbb{B}$ zeigt dies "$\subset$".
- »$\supset$«: Das ist klar, die rechte Seite ist eine Vereinigung über Teilmengen von O.

■■

Aufgabe 2.7. Lösung: Sei $\mathcal{A}^*$ die Menge der Atome der σ-Algebra $\mathcal{A}$, welche zumindest die leere Menge enthält. Wir werden zeigen, dass eine σ-Algebra aus der Menge der Vereinigungen seiner Atome besteht. Insbesondere gilt somit

$$\#(\mathcal{A}) = 2^{\#(\mathcal{A}^*)-1},$$

wodurch die zweite Teilaufgabe mit einem Nein beantwortet werden muss. (Beachte: Der Exponent wird um Eins verringert wird, da die leere Menge als Atom nichts zur Vereinigung beiträgt.)

Seien A_1 und A_2 Atome der σ-Algebra $\mathcal{A}$, d.h. $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^*$, dann gilt $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ und $A_1 \cap A_2 \subset A_2$. Daher gilt entweder $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ oder $A_1 = A_1 \cap A_2 = A_2$. Insbesondere sind Atome entweder disjunkt oder identisch.

Angenommen $\mathcal{A}^*$ ist noch keine Partition von E, d.h. $(\cup_{A \in \mathcal{A}^*} A)^c \neq \emptyset$, dann ist

$$\Delta := \{B \in \mathcal{A} \ : \ B \neq \emptyset \ \text{ und } \ B \subset (\cup_{A \in \mathcal{A}^*} A)^c\}$$

nicht leer und endlich. Insbesondere enthält es minimale Elemente bezüglich der Teilmengen-Relation. Sei $D \in \Delta$ ein solches minimales Element und $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset D$. Dann gilt entweder $B = \emptyset$, oder $B \in \Delta$ und somit $B = D$, da D ein minimales Element von Δ ist. Dies zeigt, dass D ein Atom der σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist, im Widerspruch zur Annahme $D \in \Delta \subset (\cup_{A \in \mathcal{A}^*} A)^c$. Also muss $\mathcal{A}^*$ bereits eine Partition von E sein.

(Idee für die Existenz minimaler Elemente: Wir nehmen eine beliebige Menge aus Δ und überprüfen, ob es eine Menge in Δ gibt, die strikt kleiner bzgl. der Teilmengen-Relation ist. Falls dies der Fall ist, iterieren wir den Schritt. Ansonsten sind wir bei einem minimalen Element angekommen. Dieses Verfahren terminiert, da wir jedes Element aus Δ höchstens einmal untersuchen und Δ nur endlich viele Elemente enthält.)

Wir werden nun abschließend zeigen, dass $\mathcal{A}$ aus der Menge der Vereinigungen seiner nichtleeren Atome besteht: Da σ-Algebren stabil unter abzählbaren Vereinigungen sind, ist jede Vereinigung von Atomen wieder ein Element der σ-Algebra. Sei $B \in \mathcal{A}$ eine beliebige Menge der σ-Algebra, dann besitzt die Menge die folgende Darstellung:

$$B = B \cap E = B \cap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}^*} A \right) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}^*} (B \cap A).$$

Da aus $B \cap A \subset A$ für $A \in \mathcal{A}^*$ folgt, dass entweder $B \cap A = \varnothing$ oder $B \cap A = A$ gilt, finden wir

$$B = \bigcup \{A \in \mathcal{A}^* \ : \ B \cap A \neq \varnothing\},$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

Aufgabe 2.8. Lösung: Es sei E eine beliebige Menge und $\mathcal{C}$ eine abzählbare Familie von Teilmengen von E. Wir nehmen an, dass $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra ist. Für jedes $x \in E$ ist die Familie

$$\mathcal{C}_x := \{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$$

abzählbar. Somit ist $C_x := \bigcap_{C \in \mathcal{C}_x} C \in \mathcal{C}$. Per Definition ist C_x die kleinste Menge aus $\mathcal{C}$, die x enthält. Da für alle $C \in \mathcal{C}$ entweder $x \in C_x \smallsetminus C$ oder $x \in C_x \cap C$, folgt $C_x = C_x \smallsetminus C$ oder $C_x = C_x \cap C$. Mit anderen Worten: $C_x \cap C = \varnothing$ oder $C_x \subset C$. Insbesondere gilt dann für $x \neq y$, dass $C_x \cap C_y = \varnothing$ oder $C_x = C_y$.

Nun sei I eine abzählbare Indexmenge mit $(C_x)_{x \in E} = (C_i)_{i \in I}$ und $C_i \neq C_j$ für $i \neq j$. Für $J \subset I$ folgt dann

$$C_J = \bigcup_{j \in J} C_j \in \mathcal{C} \quad \text{und} \quad \forall J \neq K, J, K \subset I : C_J \neq C_K.$$

Offensichtlich ist $J \mapsto C_J$ eine Bijektion von $\mathcal{P}(I)$ nach $\mathcal{C}$. Damit gilt: Ist I endlich, dann ist $\mathcal{C}$ endlich und wenn I unendlich ist, dann ist $\mathcal{C}$ nicht abzählbar.

$\boxed{\text{Alternative:}}$ Sei $\mathcal{A}^*$ die Menge der Atome der σ-Algebra $\mathcal{A}$. Seien A_1 und A_2 Atome der σ-Algebra $\mathcal{A}$, d.h. $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^*$, dann gilt $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ und $A_1 \cap A_2 \subset A_2$. Daher gilt entweder $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ oder $A_1 = A_1 \cap A_2 = A_2$. Insbesondere sind Atome entweder disjunkt oder identisch.

Angenommen $\mathcal{A}^*$ ist noch keine Partition von X, d.h. $(\cup_{A \in \mathcal{A}^*} A)^c \neq \varnothing$. Sei $x \in (\cup_{A \in \mathcal{A}^*} A)^c$, dann ist $\Delta_x := \{E \in \mathcal{A} \ : \ x \in E \ \text{ und } \ E \subset (\cup_{A \in \mathcal{A}^*} A)^c\}$ nicht leer. Falls $\mathcal{A}$ abzählbar ist, dann ist $A := \cap_{D \in \Delta_x} D$ wieder in $\mathcal{A}$ und ein Atom von $\mathcal{A}$: Angenommen $B \subset A$ mit $B \in \mathcal{A}$, dann gilt entweder $x \in B$ oder $x \in A \smallsetminus B$. Daher haben wir entweder $A \subset B \subset A$ oder $A \subset A \smallsetminus B \subset A$, d.h. $B = A$ oder $B = \varnothing$.

Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{A}^*$ eine Partition von $\mathcal{A}$ wäre, falls $\mathcal{A}$ abzählbar ist. Wir werden nun zeigen, dass $\mathcal{A}$ in diesem Fall aus der Menge der Vereinigungen seiner nichtleeren Atome besteht: Da σ-Algebren stabil unter abzählbaren Vereinigungen sind, ist jede Vereinigung von Atomen wieder ein Element der σ-Algebra. Sei $E \in \mathcal{A}$ eine beliebige Menge der σ-Algebra, dann besitzt die Menge die folgende Darstellung:

$$E = E \cap X = E \cap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}^*} A \right) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}^*} (E \cap A)$$

Da aus $E \cap A \subset A$ für $A \in \mathcal{A}^*$ folgt, dass entweder $E \cap A = \varnothing$ oder $E \cap A = A$ gilt, finden wir

$$E = \cup \{ A \in \mathcal{A}^* \;:\; E \cap A \neq \varnothing \},$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

Somit gilt immer $\#(\mathcal{A}) = \#(2^{\mathcal{A}^* \setminus \{\varnothing\}})$, falls $\mathcal{A}$ abzählbar ist. Falls $\mathcal{A}$ jedoch abzählbar unendlich ist, dann ergibt dies einen Widerspruch, da $2^{\mathcal{A}^* \setminus \{\varnothing\}}$ in diesem Fall überabzählbar wäre. (Denke an die Dualdarstellung der reellen Zahlen!)

Aufgabe 2.9. Lösung:

(a) Nach Definition gilt

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \setminus B, \\ 1, & x \in B \setminus A, \\ 1, & x \in A \cap B, \\ 0, & x \notin A \cup B, \end{cases} \qquad \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \setminus B, \\ 0, & x \in B \setminus A, \\ 1, & x \in A \cap B, \\ 0, & x \notin A \cup B. \end{cases} \tag{$\star$}$$

Addition der beiden Gleichungen gibt

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(x) + \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \setminus B, \\ 1, & x \in B \setminus A, \\ 2, & x \in A \cap B, \\ 0, & x \notin A \cup B, \end{cases} = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \tag{$\star\star$}$$

wegen

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \setminus B, \\ 0, & x \in B \setminus A, \\ 1, & x \in A \cap B, \\ 0, & x \notin A \cup B, \end{cases} \qquad \mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \setminus B, \\ 1, & x \in B \setminus A, \\ 1, & x \in A \cap B, \\ 0, & x \notin A \cup B. \end{cases}$$

(b) Wegen $\mathbb{1}_A(x) \in \{0,1\}$ und $\mathbb{1}_B(x) \in \{0,1\}$ gilt

$$\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1 \iff x \in A \cap B \iff \mathbb{1}_A(x) = 1, \mathbb{1}_B(x) = 1 \iff \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1.$$

Da beide Seiten nur Werte in $\{0,1\}$ annehmen können, folgt die Behauptung. Analog:

$$\min\{\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\} = 1 \iff \mathbb{1}_A(x) = 1, \mathbb{1}_B(x) = 1 \iff \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1.$$

(c) Per Definition gilt

$$\mathbb{1}_{A^c}(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \notin A, \end{cases} = 1 - \mathbb{1}_A(x).$$

(d) Aus (dem Beweis von) Teilaufgabe (a) sehen wir

$$\min\{\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x), 1\} \overset{(\star\star)}{=} \begin{cases} 1, & x \in A \setminus B, \\ 1, & x \in B \setminus A, \\ 1, & x \in A \cap B, \\ 0, & x \notin A \cup B, \end{cases} \overset{(\star)}{=} \mathbb{1}_{A \cup B}(x).$$

(e) Wegen $\mathbb{1}_{A_i}(x) \in \{0,1\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_i}(x) = 1 &\iff \exists i_0 \in \mathbb{N} : \mathbb{1}_{A_{i_0}}(x) = 1 \iff \exists i_0 \in \mathbb{N} : x \in A_{i_0} \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \iff \mathbb{1}_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i}(x) = 1. \end{aligned}$$

Da sowohl $\sup_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ als auch $\mathbb{1}_{\bigcup_i A_i}(x)$ nur Werte in $\{0,1\}$ annimt, folgt die Behauptung.

(f) Wegen $\mathbb{1}_{A_i}(x) \in \{0,1\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_i}(x) = 1 &\iff \forall i \in \mathbb{N} : \mathbb{1}_{A_i}(x) = 1 \iff \forall i \in \mathbb{N} : x \in A_i \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \iff \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i}(x) = 1. \end{aligned}$$

Da sowohl $\inf_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ als auch $\mathbb{1}_{\bigcap_i A_i}(x)$ nur Werte in $\{0,1\}$ annimt, folgt die Behauptung.

Aufgabe 2.10. Lösung:

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \omega \in \liminf_{i \to \infty} A_i &\iff \exists k_0 \in \mathbb{N} : \omega \in \bigcap_{i \geqslant k_0} A_i \\ &\iff \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall i \geqslant k_0 : \omega \in A_i \\ &\iff \omega \text{ liegt in schließlich allen } A_i\text{'s.} \end{aligned}$$

Analog sieht man:

$$\begin{aligned} \omega \in \limsup_{i \to \infty} A_i &\iff \forall k \in \mathbb{N} : \omega \in \bigcup_{i \geqslant k} A_i \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N} \exists i_k \geqslant k : \omega \in A_{i_k} \\ &\iff \omega \text{ liegt in unendlich vielen } A_i\text{'s.} \end{aligned}$$

(a) Sei $\omega \in \Omega$. Da Indikatorfunktionen nur die Werte 0 und 1 annehmen, ist $(\mathbb{1}_{A_i}(\omega))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Nullen und Einsen. Deshalb gilt wegen (b):

$$\begin{aligned} \liminf_{i\to\infty} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1 &\iff \lim_{i\to\infty} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1 \\ &\iff \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1 \text{ für schließlich alle } i \in \mathbb{N} \\ &\iff \omega \in A_i \text{ für schließlich alle } i \in \mathbb{N} \\ &\iff \omega \in \liminf_{i\to\infty} A_i. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich folgt:

$$\begin{aligned} \limsup_{i\to\infty} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1 &\iff \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1 \text{ für unendlich viele } i \in \mathbb{N} \\ &\iff \omega \in A_i \text{ für unendlich viele } i \in \mathbb{N} \\ &\iff \omega \in \limsup_{i\to\infty} A_i. \end{aligned}$$

(c) Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{i\to\infty} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1 &\iff \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1 \text{ für unendlich viele } i \in \mathbb{N} \\ &\iff \sum_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \infty. \end{aligned}$$

3 Maße

Aufgabe 3.1. Lösung: Seien im Folgenden stets $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ disjunkt mit $A := \dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} A_j$.

a) (*Dirac-Maß, δ-Funktion, Punktmasse*). $(E, \mathcal{A})$ beliebiger Messraum, $x \in E$ fest.

$$\delta_x : \mathcal{A} \to \{0,1\}, \quad \delta_x(A) := \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

ist ein Maß, denn

(M_0) $\mathcal{A}$ ist per Definition eine σ-Algebra auf E.

(M_1) $\delta_x(\emptyset) = 0$, da offenbar $x \notin \emptyset$.

(M_2) Um die σ-Additivität zu zeigen, betrachten wir zwei Fälle:

- $\delta_x(A) = 1$: Dann gilt $x \in A$ und es gibt auf Grund der Disjunktheit der A_j genau ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{j_0}$. Also folgt

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_x(A_j) = \delta_x(A_{j_0}) = 1 = \delta_x(A).$$

- $\delta_x(A) = 0$: Es gilt für alle $j \in \mathbb{N}$, dass $x \notin A_j$; folglich

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_x(A_j) = 0 = \delta_x(A).$$

b) $E = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ wie in Beispiel 2.3e) (d.h. $A \in \mathcal{A} \iff A$ oder A^c abzählbar). Dann ist

$$\gamma(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ 1, & A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ein Maß, denn:

(M_0) Nach Beispiel 2.3e) handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um eine σ-Algebra. Weiterhin bemerken wir, dass γ wohldefiniert ist, da (wegen $E = \mathbb{R}$) nicht sowohl A als auch A^c abzählbar sein kann.

(M_1) $\emptyset$ ist offensichtlich abzählbar, also $\gamma(\emptyset) = 0$.

(M_2) Wir betrachten wieder getrennt zwei Fälle:

- $\gamma(A) = 0 \Leftrightarrow A$ abzählbar $\Leftrightarrow$ alle A_j sind abzählbar $\Leftrightarrow \sum_j \gamma(A_j) = 0$

- Per Definition sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned}\gamma(A)=1 &\Leftrightarrow A=\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \text{ nicht abzählbar}\\ &\Leftrightarrow \exists j_0\in\mathbb{N}: A_{j_0}^c \text{ abzählbar}\\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \sum_j \gamma(A_j)=1.\end{aligned}$$

  $(*)$, »$\Rightarrow$«: Wegen der Disjunktheit gilt $A_j \subset A_{j_0}^c$ für alle $j\neq j_0$. Aus $A_{j_0}^c$ abzählbar folgt also, dass A_j abzählbar ist für alle $j\neq j_0$, d.h. insbesondere $\gamma(A_j)=0$.

  $(*)$, »$\Leftarrow$« Wegen $\gamma(A_j)\in\{0,1\}$ kann nur ein $j_0\in\mathbb{N}$ existieren mit $\gamma(A_{j_0})\neq 0$. Folglich ist $\gamma(A_{j_0})=1$ und somit $A_{j_0}^c$ abzählbar.

  Ersetzen wir »abzählbar«durch »endlich«ist γ nicht mehr σ-additiv: Betrachte zum Beispiel $A_j := \{j\}$, $j\in\mathbb{N}$. Dann ist $A=\dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} A_j = \mathbb{N}\notin\mathcal{A}$, d.h. $\mathcal{A}$ ist keine σ-Algebra (insbesondere ist $\gamma(A)$ gar nicht definiert). Mit der gleichen Argumentation wie oben können wir jedoch zeigen, dass die endliche Additivität weiterhin gilt.

c) $(E,\mathcal{A})$ beliebiger Messraum. Dann ist

$$|A| := \begin{cases}\#A, & A \text{ endliche Menge}\\ +\infty, & A \text{ unendliche Menge}\end{cases} \qquad A\in\mathcal{A},$$

ein Maß, denn:

(M_0) $\mathcal{A}$ ist per Definition eine σ-Algebra.

(M_1) $|\varnothing|=0$.

(M_2) Gilt $|A|<\infty$, dann ist $|A_j|<\infty$ für alle $j\in\mathbb{N}$, da die Mengen nach Voraussetzung disjunkt sind. Das bedeutet gerade, dass die $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Partition von A bilden und sich folglich die Mächtigkeiten addieren.

Falls $|A|=\infty$, so gibt es ein $j_0\in\mathbb{N}$ mit $|A_{j_0}|=\infty$ oder abzählbar unendlich viele A_j sind nichtleer. In beiden Fällen ergibt sich

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |A_j| = \infty = |A|.$$

d) (*diskretes W-Maß*) $E=\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$ abzählbar, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$, $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset[0,1]$ mit $\sum_{j=1}^\infty p_j = 1$. Dann ist

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{j\,:\,\omega_j\in A} p_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j\delta_{\omega_j}(A), \quad A\subset\Omega$$

ein Maß, denn

(M_0) $\mathcal{P}(\Omega)$ ist stets eine σ-Algebra über Ω.

(M_1) $\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{j:\omega_j\in\varnothing} p_j = 0$.

(M_2) Es gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j:\omega_j\in\dot{\bigcup}_i A_i} p_j \overset{A_j\text{ disj.}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j:\omega_j\in A_i} p_j = \sum_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_i).$$

Aufgabe 3.2. Lösung: Nach Voraussetzung enthält Y mindestens zwei Elemente $a, b \in E$. μ_1 ist kein Maß, denn

$$\mu_1(\{a\}\cup\{b\}) = 1 \neq 2 = \mu_1(\{a\}) + \mu_1(\{b\}).$$

μ_3 ist ebenfalls kein Maß, da

$$\mu_3(\{a\}\cup\{b\}) = \infty \neq 0 = \mu_3(\{a\}) + \mu_3(\{b\}).$$

Wir zeigen nun, dass μ_2 ein Maß ist:

(M_0) $\mathcal{P}(E)$ ist eine σ-Algebra.

(M_1) Offensichtlich gilt $\mu_2(\varnothing) = 0$.

(M_2) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Wir betrachten zwei Fälle:

- $\exists j_0 : A_{j_0} \cap Y \neq \varnothing$. In diesem Fall gilt insbesondere $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \cap Y \neq \varnothing$ und somit $\mu_2\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \infty$. Andererseits ist

$$\infty = \mu_2(A_{j_0}) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_2(A_j),$$

also

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_2(A_j) = \infty = \mu_2\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right).$$

- $\forall j : A_j \cap Y = \varnothing$. Dann ist auch $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \cap Y = \varnothing$ und somit

$$\mu_2\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = 0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_2(A_j).$$

Aufgabe 3.3. Lösung:

(a) Falls $\sum_{x\in E} f(x)$ endlich ist, dann sind offensichtlich die Mengen $\{x \in E : f(x) > 1/n\}$ endlich. Somit ist insbesondere

$$\{x \in E :\ f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in E :\ f(x) > \frac{1}{n}\right\}$$

abzählbar.

(b)(M_0) $\mathcal{P}(E)$ ist eine σ-Algebra.

(M_1) Da $x \notin \varnothing$ für alle $x \in A$ gilt $\mu(\varnothing) = 0$.

(M_2) Wir beweisen zunächst das folgende

Lemma. *Es sei* $(\beta_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}. \tag{$\star$}$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\beta_{mn} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Da die rechte Seite nicht von m, n abhängt, bleibt die Ungleichung erhalten, wenn wir das Supremum über n nehmen:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_{mn} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Mit der gleichen Argumentation folgt

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_{mn} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}.$$

Die umgekehrte Ungleichung »$\geqslant$« indem wir die Rollen von i, j und m, n vertauschen. ∎

Es sei nun $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Wir setzen $A := \dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} A_j$ und betrachten zwei Fälle getrennt:

- $\{x \in A; f(x) > 0\}$ ist überabzählbar: Aus (a) folgt, dass dann $\mu(A) = \infty$. Da A die disjunkte Vereinigung von abzählbaren Mengen ist, existiert dann $j_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $\{x \in A_{j_0}; f(x) >\}$ überabzählbar ist. Insbesondere, $\mu(A_{j_0}) = \infty$. Folglich,

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) = \mu(A) = \infty = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$

- $\{x \in A; f(x) > 0\}$ ist abzählbar: Es sei $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\{x \in A; f(x) > 0\}$. Dann

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \sum_{x\in A} f(x) \\
&= \sum_{x\in E} f(x)\delta_x\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) \\
&= \sum_{x\in E} \sum_{j\in\mathbb{N}} f(x)\delta_x(A_j) \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{M\in\mathbb{N}} \sum_{q_1,\dots,q_N} \sum_{j=1}^{M} f(x)\delta_x(A_j) \\
&\overset{(\star)}{=} \sup_{M\in\mathbb{N}} \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{M} \sum_{q_1,\dots,q_N} f(x)\delta_x(A_j)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{x\in E} f(x)\delta_x(A_j)$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{x\in A_j} f(x)$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$

(Vgl. auch Aufgabe 8.6.)

(c) Das Maß μ ist endlich, falls $\sum_{x\in E} f(x)$ endlich ist. Weiterhin folgt direkt aus Teilaufgabe (a), dass $\{x \in E : \ f(x) > 0\}$ abzählbar ist, falls das Maß σ-endlich ist. Andererseits: Ist $\{x \in E : \ f(x) > 1/n\}$ endlich, so ist μ σ-endlich.

Aufgabe 3.4. Lösung: Betrachte den Messraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ausgestattet mit dem Zählmaß

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n(A), \qquad A \subset \mathbb{N}.$$

Für die Mengen $B_n := \{n, n+1, \dots\}$ gilt dann $\mu(B_n) = \infty$, aber

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \mu(\varnothing) = 0.$$

Ein ähnliches Beispiel kann man auch für den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ konstruieren (wähle $B_n := [n, \infty)$).

Aufgabe 3.5. Lösung: Wir zeigen, dass μ endlich additiv und stetig von unten ist. (Beachte: $\mathcal{I}$ ist keine σ-Algebra, da $(0,1]^c = (-\infty, 0] \cup (1, \infty) \notin \mathcal{I}$.)

(a) $\mu(\varnothing) = 0$. Weiterhin ist $\mu(a,b] \geqslant 0$ da m monoton wachsend ist.

(b) Seien $(a,b], (c,d]$ disjunkte Intervalle, so dass $(a,b] \cup (c,d] \in \mathcal{I}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a < b = c < d$, d.h. $(a,b] \cup (c,d] = (a,d]$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}\mu((a,b] \cup (c,d]) &= m(d) - m(a) = m(d) - m(c) + m(c) - m(a)\\ &= (m(d) - m(c)) - (m(b) - m(a))\\ &= \mu((c,d]) + \mu((a,b]).\end{aligned}$$

(c) Seien $U_j \in \mathcal{I}$ mit $U_j \uparrow U \in \mathcal{I}$, d.h. $U_j = (a_j, b_j]$, $U = (a,b]$ mit $a_j \downarrow a$ und $b_j \uparrow b$. Aus der Stetigkeit von m erhalten wir

$$\lim_{j\to\infty} \mu(U_j) = \lim_{j\to\infty} (m(b_j) - m(a_j)) = m(b) - m(a) = \mu(U).$$

Aufgabe 3.6. Lösung: Wir folgen dem Hinweis und beweisen als ersten Schritt das folgende Lemma.

Lemma. *Es sei* $(\beta_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \beta_{ij} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}. \tag{$\star$}$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\beta_{mn} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Da die rechte Seite nicht von m, n abhängt, bleibt die Ungleichung erhalten, wenn wir das Supremum über n nehmen:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_{mn} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Mit der gleichen Argumentation folgt

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_{mn} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}.$$

Die umgekehrte Ungleichung »$\geqslant$« indem wir die Rollen von i, j und m, n vertauschen. ■

Zunächst bemerken wir, dass die Reihe $\mu(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\mu_i(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ eine Summe von nicht-negativen Zahlen darstellt und somit $\mu(A)$ wohldefiniert ist (beachte, dass wir $\mu(A) = \infty$ zulassen).

(M1) Aus $\mu_i(\emptyset) = 0$ erhalten wir

$$\mu(\emptyset) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\mu_i(\emptyset) = 0.$$

(M2) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Aus der σ-Additivität der μ_i's folgt

$$\begin{aligned}
\mu\Bigg(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\Bigg) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\mu_i\Bigg(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\Bigg) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} 2^{-i} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_i(A_j) \\
&= \lim_{N\to\infty} \Bigg(\sum_{i=1}^{N} 2^{-i} \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} \mu_i(A_j)\Bigg) \\
&= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} 2^{-i}\mu_i(A_j) \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{M\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} 2^{-i}\mu_i(A_j).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass die Folgen monoton wachsend sind, also $\lim = \sup$. Mit $(\star)$ sehen wir nun

$$\mu\Bigg(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\Bigg) = \sup_{M\in\mathbb{N}} \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} 2^{-i}\mu_i(A_j)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} 2^{-i} \mu_i(A_j)$$
$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-i} \mu_i(A_j)$$
$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} 2^{-i} \mu\,(A_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Bemerkung: Für eine Verallgemeinerung der Aussage und weiterführende Aufgaben siehe auch Aufgabe 8.6.

Aufgabe 3.7. Lösung: Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}_\mu^*$ die Familie aller Teilmengen von μ-Nullmengen, d.h.

$$\mathcal{N}_\mu^* := \{N \subset E; \exists A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0, A \supset N\}.$$

(a) Da $\mu(\varnothing) = 0$ gilt offensichtlich $\varnothing \in \mathcal{N}_\mu^*$. Damit folgt insbesondere für alle $A \in \mathcal{A}$, dass $A = A \cup \varnothing \in \mathcal{A}^*$. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}^\mu$ eine σ-Algebra ist:

(Σ_0) Klar wegen $\varnothing \in \mathcal{A}$ und $\varnothing \in \mathcal{N}_\mu^*$.

(Σ_1) Es sei $A^* = A \cup N \in \mathcal{A}^*$, $A \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}_\mu^*$. Nach Voraussetzung existiert $M \supset N$, $M \in \mathcal{A}$, mit $\mu(M) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}(A^*)^c = (A \cup N)^c &= A^c \cap N^c \\ &= A^c \cap N^c \cap (M^c \cup M) \\ &= (A^c \cap N^c \cap M^c) \cup (A^c \cap N^c \cap M) \\ &= (A^c \cap M^c) \cup (A^c \cap N^c \cap M)\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass aus $N \subset M$ folgt, dass $M^c \subset N^c$ (und folglich $M^c \cap N^c = M^c$). Wegen

- $A^c \cap M^c \in \mathcal{A}$
- $A^c \cap N^c \cap M \subset M$ und $\mu(M) = 0$

folgt, dass $(A^* c) \in \mathcal{A}^\mu$.

(Σ_2) Es sei $(A_j^*)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^\mu$. Dann ist $A_j^* = A_j \cup N_j$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ und $N_j \in \mathcal{N}_\mu^*$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Folglich

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j^* = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_j \cup N_j) = \underbrace{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j}_{\in\mathcal{A}} \cup \underbrace{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j}_{=:N\in\mathcal{N}_\mu^*} \in \mathcal{A}^\mu.$$

Hier haben wir verwendet, dass die abzählbare Vereinigung von (Teilmengen von) Nullmengen wieder eine (Teilmenge einer) Nullmenge ist: Da $N_j \in \mathcal{N}_\mu^*$ existiert

$M_j \supset N_j$, $M_j \in \mathcal{A}$, mit $\mu(M_j) = 0$. Dann ist

$$N = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j =: M \qquad \mu(M) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(M_j) = 0,$$

d.h. $N \in \mathcal{N}_\mu^*$.

(b) Es sei $A^* \in \mathcal{A}^\mu$. Wir müssen zeigen, dass für zwei beliebige Darstellungen der Form $A^* = A_1 \cup N_1$ und $A^* = A_2 \cup N_2$ mit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ und $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu^*$ gilt, dass $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Wegen $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu^*$ existieren $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, $M_1 \supset N_1$, $M_2 \supset N_2$ mit $\mu(M_1) = 0 = \mu(M_2)$. Insbesondere gilt

$$A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup M_2$$
$$A_2 \subset A_2 \cup N_2 = A_1 \cup N_1 \subset A_1 \cup M_1.$$

Aus der Monotonie und Subadditivität des Maßes folgt daher

$$\mu(A_1) \leqslant \mu(A_2 \cup M_2) \leqslant \mu(A_2) \cup \mu(M_2) = \mu(A_2)$$
$$\mu(A_2) \leqslant \mu(A_1 \cup M_1) \leqslant \mu(A_1) \cup \mu(M_1) = \mu(A_1).$$

Das zeigt $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

(c) Wir haben bereits in Teil (a) gesehen, dass für $A \in \mathcal{A}$ die Zerlegung $A \cup \varnothing$ zulässig ist. Aus Teil (b) folgt sofort, dass $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir zeigen nun noch (M_1) und (M_2):

(M_1) Wegen $\varnothing \in \mathcal{A}$ wissen wir aus dem ersten Teil dieser Teilaufgabe schon, dass $\overline{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

(M_2) Es sei $(A_j^*)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^\mu$ eine Folge disjunkter Mengen. Wir schreiben $A_j^* = A_j \cup N_j$ mit $A_j \in \mathcal{A}$, $N_j \in \mathcal{N}_\mu^*$. In Teil (a) haben wir gesehen, dass $A^* = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j^* = A \cup N$ mit

$$A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A} \qquad N = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j \in \mathcal{N}_\mu^*.$$

Gemäß Teil (b) gilt daher

$$\overline{\mu}(A^*) = \mu(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_j^*).$$

(d) Es sei M^* eine $\bar{\mu}$-Nullmenge, d.h. $M^* \in \mathcal{A}^\mu$ und $\bar{\mu}(M^*) = 0$. Es sei $B \subset M^*$. Wir müssen zeigen, dass $B \in \mathcal{A}^\mu$ und $\bar{\mu}(B) = 0$. Letzteres ist wegen der Monotonie von $\bar{\mu}$ klar, wenn wir wissen, dass $B \in \mathcal{A}^\mu$.

Wir schreiben $\mathcal{N}_\mu^* := \{N^* \subset E \mid \exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0 \,:\, N \supset N^*\}$ für die Familie aller Teilmengen von (messbaren) μ-Nullmengen. Nach Voraussetzung gilt $B \subset M^*$ und $M^* = M \cup N^*$ für ein $M \in \mathcal{A}$ und ein $N^* \in \mathcal{N}_\mu^*$. Weil $\bar{\mu}(M^*) = 0$ gilt, folgt auch $\mu(M) = 0$. Aufgrund der Definition von $\mathcal{N}_\mu^*$ gibt es ein $N \supset N^*$ mit $N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$. Mithin gilt

$$B \subset M^* = M \cup N^* \subset M \cup N \in \mathcal{A}$$

$$\text{und}\quad \mu(M \cup N) \leqslant \mu(M) + \mu(N) = 0.$$

Also folgt, dass $B \in \mathcal{N}_\mu^*$ und $B = \varnothing \cup B \in \mathcal{A}^\mu$. Insbesondere gilt $\bar{\mu}(B) = \mu(\varnothing) = 0$.

(e) Setze $\mathcal{B} := \{A^* \subset E :$ es existieren $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset A^* \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0\}$. Wir müssen zeigen: $\mathcal{A}^\mu = \mathcal{B}$.

Es sei $A^* \in \mathcal{A}^\mu$. Dann ist $A^* = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{N}_\mu^*$. Wegen $N \in \mathcal{N}_\mu^*$ existiert $M \in \mathcal{A}$, $M \supset N$, mit $\mu(M) = 0$. Wir behaupten, dass $B := A \cup M$ alle Voraussetzungen erfüllt.

- $B \in \mathcal{A}$ wegen $A, M \in \mathcal{A}$.
- $A \subset A^* \subset A \cup M = B$
- $\mu(B \setminus A) = \mu(M) = 0$.

Nun sei $A^* \in \mathcal{B}$ und A, B wie in der Definition. Für $N := A^* \setminus A$ und $M := B \setminus A$ gilt dann offenbar

- $N \in \mathcal{N}_\mu^*$ wegen $N \subset M$ und $\mu(M) = \mu(B \setminus A) = 0$.
- $A^* = A \cup (A^* \setminus A) = A \cup N$.

Folglich $A^* \in \mathcal{A}^\mu$.

(f) Wir erinnern zunächst an die Definition der σ-Algebra $\mathcal{A}^\mu$:

$$\mathcal{A}^\mu = \left\{A \cup N^* \mid A \in \mathcal{A},\ N^* \in \mathcal{N}_\mu^*\right\}.$$

Weil

$$A \cup N^* = A \vartriangle \underbrace{(N^* \setminus A)}_{\in \mathcal{N}_\mu^*} \in \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu^*)$$

gilt, erhalten wir sofort, dass

$$\mathcal{A}^\mu \subset \left\{A \vartriangle N^* \mid A \in \mathcal{A},\ N^* \in \mathcal{N}_\mu^*\right\} \subset \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu^*).$$

Umgekehrt wissen wir, dass

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^\mu \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_\mu^* \subset \mathcal{A}^\mu.$$

Weil $\mathcal{A}^\mu$ eine σ-Algebra ist, erhalten wir

$$\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu^*) \subset \sigma(\mathcal{A}^\mu) = \mathcal{A}^\mu \subset \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu^*).$$

Damit haben wir die Behauptung gezeigt.

■■

Aufgabe 3.8. Lösung:

(a) Für festes $\epsilon > 0$ und $A \in \Sigma$ wählen wir Mengen $U \in \mathcal{O}$, $F \in \mathcal{F}$, so dass $F \subset A \subset U$ und $\mu(U \setminus F) < \epsilon$. Definiere $U' := F^c \in \mathcal{O}$ und $F' := U^c \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$F' \subset A^c \subset U' \text{ sowie } U' \setminus F' = F^c \setminus U^c = F^c \cap U = U \setminus F.$$

Es folgt $\mu(U' \setminus F') = \mu(U \setminus F) < \epsilon$, und das zeigt $A^c \in \Sigma$.

Wir schreiben $d(x,y)$ für den Abstand der Punkte $x, y \in E$ und $B_{1/n}(0)$ für die offene metrischen Kugel $\{y \in E \mid d(y,0) < \frac{1}{n}\}$. Mit der Dreiecksungleichung sehen wir sehr einfach, dass die »geränderten« Mengen $U_n := F + B_{1/n}(0)$ offene Mengen sind, die gegen F absteigen: $U_n \downarrow F$. Mit Hilfe der Maßstetigkeit folgt $\mu(U_n \setminus F) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und wegen $\mathcal{F} \ni F \subset F \subset U_n \in \mathcal{O}$ ergibt sich $\mathcal{F} \subset \Sigma$.

(b) Wir wählen $\epsilon > 0$ und $A_j \in \Sigma, j = 1, 2$. Dann gibt es offene Mengen U_j und abgeschlossene Mengen F_j, so dass $F_j \subset A_j \subset U_j$ und $\mu(U_j \setminus F_j) < \epsilon$. Die Mengen $F_1 \cap F_2$ und $U_1 \cap U_2$ sind immer noch abgeschlossen bzw. offen, und es gilt $F_1 \cap F_2 \subset A_1 \cap A_2 \subset U_1 \cap U_2$ sowie

$$\begin{aligned}
\mu\big((U_1 \cap U_2) \setminus (F_1 \cap F_2)\big) &= \mu\big((U_1 \cap U_2) \cap (F_1^c \cup F_2^c)\big) \\
&= \mu\big([(U_1 \cap U_2) \setminus F_1] \cup [(U_1 \cap U_2) \setminus F_2]\big) \\
&\leqslant \mu\big(U_1 \setminus F_1\big) + \mu\big(U_2 \setminus F_2\big) \\
&< 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass Σ schnittstabil ist.

(c) Wir wählen $\epsilon > 0$ und irgendeine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$. Dann gibt es offene Mengen U_n und abgeschlossene Mengen F_n, so dass

$$F_n \subset A_n \subset U_n \quad \text{und} \quad \mu(U_n \setminus F_n) < \epsilon 2^{-n}.$$

Wir definieren $A := \bigcup_n A_n$. Die Menge $U := \bigcup_n U_n \supset A$ ist offen, $F := \bigcup_n F_n$ ist in A enthalten, aber es ist »nur« eine aufsteigende Folge abgeschlossener Mengen $\Phi_n := F_1 \cup \ldots \cup F_n$ (und nicht notwendig selbst abgeschlossen).

Nun gilt

$$U \setminus F = \bigg(\bigcup_n U_n\bigg) \setminus \bigg(\bigcup_k F_k\bigg) = \bigcup_n \bigg(U_n \setminus \bigg(\bigcup_k F_k\bigg)\bigg) \subset \bigcup_n (U_n \setminus F_n).$$

Auf Grund der σ-Subadditivität von μ folgt daher

$$\mu(U \setminus F) \leqslant \sum_n \mu(U_n \setminus F_n) \leqslant \sum_n \epsilon 2^{-n} = \epsilon.$$

Wir beachten nun, dass $\Phi_n \subset A \subset U$ und $U \setminus \Phi_n \downarrow U \setminus F$. Mit der Maßstetigkeit sehen wir dann $\inf_n \mu(U \setminus \Phi_n) = \mu(U \setminus F) \leqslant \epsilon$, d.h. $\mu(U \setminus \Phi_N) \leqslant 2\epsilon$ wenn $N = N_\epsilon$ hinreichend groß ist. Diese Überlegung zeigt, dass Σ stabil ist unter abzählbaren Vereinigungen. Aus Teil a) wissen wir bereits, dass Σ stabil unter Komplementbildung ist und dass $\emptyset \in \Sigma$. Folglich ist Σ eine σ-Algebra.

Da $\mathcal{F} \subset \Sigma$ und $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{F})$, folgt auch $\mathcal{B}(E) \subset \Sigma$.

(d) Für jede Borelmenge $B \in \Sigma$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es offene bzw. abgeschlossene Mengen U_ϵ und F_ϵ, so dass $F_\epsilon \subset B \subset U_\epsilon$ und

$$\mu(B \setminus F_\epsilon) \leqslant \mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon \implies \mu(B) \leqslant \epsilon + \mu(F_\epsilon),$$
$$\mu(U_\epsilon \setminus B) \leqslant \mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon \implies \mu(B) \geqslant \mu(U_\epsilon) - \epsilon.$$

Daher gilt

$$\sup_{F \subset B,\, F \in \mathcal{F}} \mu(F) \leqslant \mu(B) \leqslant \epsilon + \mu(F_\epsilon) \leqslant \epsilon + \sup_{F \subset B,\, F \in \mathcal{F}} \mu(F)$$
$$\inf_{U \supset B,\, U \in \mathcal{O}} \mu(U) - \epsilon \leqslant \mu(U_\epsilon) - \epsilon \leqslant \mu(b) \leqslant \inf_{U \supset B,\, U \in \mathcal{O}} \mu(U).$$

(e) Wenn $F \in \mathcal{F}$ abgeschlossen ist, dann sind alle Schnittmengen $K_n \cap F$, $n \in \mathbb{N}$, kompakt und $K_n \cap F \uparrow F$. Mit Hilfe der Maßstetigkeit folgt

$$\mu(F) = \sup_n \mu(K_n \cap F) \leqslant \sup_{K \subset F, K \text{ komp.}} \mu(K) \leqslant \mu(F).$$

Mithin,

$$\mu(F) = \sup_{K \subset F, K \text{ komp.}} \mu(K) \qquad \forall\, F \in \mathcal{F}. \tag{*}$$

Teil d) und (*) zeigen

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\overset{\text{d)}}{=} \sup_{F \subset B,\, F \in \mathcal{F}} \mu(F) \\
&\overset{(*)}{=} \sup_{F \subset B,\, F \in \mathcal{F}} \sup_{K \subset F, K \text{ komp.}} \mu(K) \\
&\leqslant \sup_{F \subset B,\, F \in \mathcal{F}} \underbrace{\sup_{K \subset B, K \text{ komp.}} \mu(K)}_{\text{Bem: unabhängig von } F \subset B} \\
&= \sup_{K \subset B, K \text{ komp.}} \mu(K).
\end{aligned}$$

Weiter ist $\mu(K) \leqslant \mu(B)$ für beliebiges $K \subset B$ und $\sup_{K \subset B, K \text{ komp.}} \mu(K) \leqslant \mu(B)$. Damit ist alles gezeigt.

4 Eindeutigkeit von Maßen

Aufgabe 4.1. Lösung:

(a) Das folgt sofort aus der σ-Additivität des Lebesgue-Maßes:

$$\lambda^d\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j\right) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda^d(N_j) = 0.$$

(b) Wir erinnern uns: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $B_n \downarrow B$ und $\mu(B_1) < \infty$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$ (Stetigkeit von oben).

Zunächst gilt $\{r\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da $\{r\}$ eine abgeschlossene Menge ist. Für den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^1)$ und $B_n := [r, r + 1/n)$ gilt offenbar $B_n \downarrow \{r\}$, $\lambda^1(B_1) = 1 < \infty$. Aus der Stetigkeit von oben erhalten wir somit

$$\lambda^1(\{r\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^1(B_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(c) Ebenen sind abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ und daher Borelmengen. Da das Lebesgue-Maß translations- und rotationsinvariant ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$. Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$A_{k,\ell} := \left\{(x, y, z); -k \leqslant x < k, -k \leqslant y < k, 0 \leqslant z < \frac{1}{\ell}\right\}.$$

Aus der Stetigkeit von oben, vgl. Teil (b), folgt für $A_k := \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} A_{k,\ell}$:

$$\lambda^3(A_k) = \lim_{\ell\to\infty} \lambda^3(A_{k,\ell}) = \lim_{\ell\to\infty}\left((2k)(2k)\frac{2}{\ell}\right) = 0.$$

Mit Teil (a) erhalten wir, dass $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ als abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.

(d) Nein, da im Allgemeinen $M \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

(e) $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mid a \notin A \text{ und } b \notin A\}$

■■

Aufgabe 4.2. Lösung: $\mathcal{F}$ ist ein Dynkin-System, denn

(D1) $\#E = 2k$ ist gerade, also ist $E \in \mathcal{F}$.

(D2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \#A$ ist gerade $\Rightarrow \#A^c = 2k - \#A$ ist gerade $\Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

(D3) $A_j \in \mathcal{F}$ disjunkt $\Rightarrow \#A_j$ sind gerade und damit auch $\#\bigcup_j A_j = \sum_j \#A_j \Rightarrow \bigcup_j A_j \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ ist keine σ-Algebra, denn $\{1,2\},\{2,3\} \in \mathcal{F}$ aber $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \notin \mathcal{F}$.

Aufgabe 4.3. Lösung:

(a) Wir haben $\mathcal{G} \subset \mathcal{G} \cup \{\varnothing\}$ und somit $\delta(\mathcal{G}) \subset \delta(\mathcal{G} \cup \{\varnothing\})$. Außerdem gilt $\varnothing \in \delta(\mathcal{G})$ nach der Definition von Dynkin-Systemen und $\mathcal{G} \subset \delta(\mathcal{G})$ nach Konstruktion minimaler Dynkin-Systeme. Daher gilt $\mathcal{G} \cup \{\varnothing\} \subset \delta(\mathcal{G})$. Folglich, $\delta(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G} \cup \{\varnothing\})$. Analog zeigt man $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G} \cup \{\varnothing\})$.

Nun ist $\mathcal{G} \cup \{\varnothing\}$ von der Form $\{A^c, A, \varnothing\}$ und somit schnittstabil. Es gilt also

$$\delta(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G} \cup \{\varnothing\}) = \sigma(\mathcal{G} \cup \{\varnothing\}) = \sigma(\mathcal{G}) = \{\varnothing, A, A^c, E\} = \{\varnothing, (0, \tfrac{1}{2}), [\tfrac{1}{2}, 1), (0,1)\}$$

nach Satz 4.4.

(b) Analog zu (a) lässt sich

$$\sigma\big(\big\{(0,\tfrac{1}{2}], [\tfrac{1}{2}, 1)\big\}\big) = \sigma\big(\big\{(0,\tfrac{1}{2}), \{\tfrac{1}{2}\}, (\tfrac{1}{2}, 1)\big\}\big)$$

zeigen. Aus Aufgabe 2.7 kennen wir die Struktur von $\sigma(\{A_1, A_2, A_3\})$ für eine Partition $\{A_1, A_2, A_3\}$ von E. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\sigma\big(\big\{(0,\tfrac{1}{2}], [\tfrac{1}{2}, 1)\big\}\big) &= \sigma(\{A_1, A_2, A_3\}) \\
&= \{\varnothing, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, E\} \\
&= \{\varnothing, (0,\tfrac{1}{2}), \{\tfrac{1}{2}\}, (\tfrac{1}{2}, 1), (0, \tfrac{1}{2}], (0,\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1), [\tfrac{1}{2}, 1), (0,1)\}
\end{aligned}$$

aus der Darstellung einer σ-Algebra durch ihre Atome. Man überprüft leicht, dass

$$\mathcal{D} := \{\varnothing, (0, \tfrac{1}{2}], (\tfrac{1}{2}, 1), [\tfrac{1}{2}, 1), (0, \tfrac{1}{2}), (0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1), \{\tfrac{1}{2}\}, (0,1)\}$$

ein Dynkin-System ist, dessen Elemente sich als Vereinigungen und Komplemente von Mengen aus $\mathcal{G} \cup \{\varnothing\}$ darstellen lassen. Daher gilt

$$\mathcal{D} \subset \delta(\mathcal{G} \cup \{\varnothing\}) = \delta(\mathcal{G})$$

und somit $\mathcal{D} = \delta(\mathcal{G})$, da $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$ und $\delta(\mathcal{G})$ minimales Dynkin-System ist.

Bemerkung: Falls $E = [0,1)$, dann gilt $\delta(\mathcal{G}) \neq \sigma(\mathcal{G})$ für $\mathcal{G} = \{(0, \tfrac{1}{2}], [\tfrac{1}{2}, 1)\}$.

Aufgabe 4.4. Lösung: Manchmal werden Familien mit (D_1), (D_2'), (D_3') auch *monotone Klassen* genannt. Zur Vereinfachung der Sprache wollen wir das in dieser Lösung (und nur hier!) auch so halten.

Offensichtlich ist eine monotone Klasse $\mathcal{M}$ auch ein Dynkin-System:

$$C, D \in \mathcal{M} \xRightarrow[(D_2')]{(D_1)} C \cup D = E \setminus \big[(E \setminus C) \setminus D\big] \in \mathcal{M},$$

d.h. $\mathcal{M}$ ist $\cup$-stabil. Damit folgt (D_3) sofort aus (D_3'); (D_2) ist ein Spezialfall von (D_2'). *Umgekehrt* ist jedes Dynkin-System $\mathcal{D}$ eine monotone Klasse:

$$M, N \in \mathcal{D},\ M \subset N \xrightarrow[(D_3)]{(D_2)} N^c \cap M = M \setminus N = \emptyset \quad \text{und} \quad N \setminus M = (N^c \cup M)^c \in \mathcal{D},$$

d.h. (D_2') ist erfüllt. Daher impliziert (D_3) sofort (D_3').

Aufgabe 4.5. Lösung:

(a) Genau wie im Beweis von Satz 2.4a) sieht man, dass der Schnitt von beliebig vielen monotonen Klassen wieder eine monotone Klasse ist. Daher ist

$$m(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\subset\mathcal{G} \\ \mathcal{G}\,\mathrm{MC}}} \mathcal{G}$$

wieder eine monotone Klasse. Beachte dazu, dass der Schnit nicht-leer ist, weil die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ offenbar eine monotone Klasse ist, die $\mathcal{F}$ enthält. Ebenfalls wie im Beweis von Satz 2.4 folgt, dass $m(\mathcal{F})$ minimal ist.

(b) Definiere

$$\mathcal{D} := \{F \in m(\mathcal{F}); F^c \in m(\mathcal{F})\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$. Können wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ eine monotone Klasse ist, dann folgt die Behauptung.

(MC$_1$) Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ mit $M_n \uparrow M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Dann ist $M \in m(\mathcal{F})$ (da $m(\mathcal{F})$ eine monotone Klasse ist) und

$$M^c = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{M_n^c}_{\in\mathcal{F}} \in m(\mathcal{F}).$$

(Hier haben wir verwendet, dass $M_n \uparrow \implies M_n^c \downarrow$ und somit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n^c \in \mathcal{F}$ gemäß (MC_2) für $m(\mathcal{F})$.) Das zeigt $M \in \mathcal{D}$.

(MC$_2$) Es sei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ mit $N_n \downarrow N = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_n$. Genau wie im ersten Teil des Beweises folgt aus $N \in m(\mathcal{F})$ und $N_n^c \uparrow N^c$, dass $N^c \in m(\mathcal{F})$ wegen (MC_1) für die monotone Klasse $m(\mathcal{F})$. Folglich, $N \in \mathcal{D}$.

(c) Wir folgen dem Hinweis. Aus der $\cap$-Stabilität von $\mathcal{F}$ folgt offensichtlich $\mathcal{F} \subset \Sigma$. Dass Σ eine monotone Klasse ist, sieht man so:

(MC$_1$) Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ mit $M_n \uparrow M$ und $F \in \mathcal{F}$. Dann gilt $M \in m(\mathcal{F})$ und aus $m(\mathcal{F}) \ni M_n \cap F \uparrow M \cap F$ erhalten wir (aus (MC_1) für $m(\mathcal{F})$), dass $M \cap F \in m(\mathcal{F})$, also $M \in \Sigma$.

(MC$_2$) Die Argumentation ist analog zu (MC$_1$).

Folglich ist Σ eine monotone Klasse und somit $m(\mathcal{F}) \subset \Sigma$. Das zeigt gerade $\mathcal{F} \subset \Sigma'$. Da Σ' eine monotone Klasse ist (genau die gleiche Argumentation wie für Σ; man ersetze die Bedingung »$F \in \mathcal{F}$« durch »$F \in m(\mathcal{F})$«) gilt also $m(\mathcal{F}) \subset \Sigma'$. Das impliziert die Behauptung.

(d) Aus $\mathcal{M} \supset \mathcal{F}$ folgt

$$\mathcal{M} = m(\mathcal{M}) \supset m(\mathcal{F}).$$

Es genügt also zu zeigen, dass $m(\mathcal{F})$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{F}$ enthält. Da $m(\mathcal{F})$ gemäß Teil (c) $\cap$-stabil ist, genügt es zu zeigen, dass $m(\mathcal{F})$ ein Dynkin-System ist (vgl. Satz 4.4). Das sieht man so:

(D_1) Nach Voraussetzung gilt $E \in \mathcal{F} \subset m(\mathcal{F})$.

(D_2) Folgt direkt aus (b).

(D_3)

$$C, D \in m(\mathcal{F}) \overset{(D_1)}{\underset{(D_2')}{\Longrightarrow}} C \cup D = E \setminus \big[(E \setminus C) \setminus D\big] \in m(\mathcal{F}),$$

d.h. $m(\mathcal{F})$ ist $\cup$-stabil. Damit erhält man (D_3) sofort aus (MC_1).

■■

Aufgabe 4.6. Lösung:

(a) Wir folgen dem Hinweis und zeigen, dass

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \,:\, \forall \epsilon > 0 \;\exists G \in \mathcal{G} \,:\, \mu(A \,\triangle\, G) \leqslant \epsilon\}$$

ein Dynkin-System definiert.

(D_1) Nach Voraussetzung gilt $G := E \in \mathcal{G}$ und somit $\mu(E \,\triangle\, G) = \mu(\emptyset) = 0$, also $E \in \mathcal{D}$.

(D_2) Es sei $A \in \mathcal{D}$. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert dann $G \in \mathcal{G}$ mit $\mu(A \,\triangle\, G) \leqslant \epsilon$. Aus

$$\begin{aligned} A^c \,\triangle\, G^c &= (G^c \setminus A^c) \cup (A^c \setminus G^c) \\ &= (G^c \cap A) \cup (A^c \cap G) \\ &= (A \setminus G) \cup (G \setminus A) \\ &= A \,\triangle\, G \end{aligned}$$

sehen wir, dass $\mu(A^c \,\triangle\, G^c) \leqslant \epsilon$; folglich, $A^c \in \mathcal{D}$ (beachte, dass $G^c \in \mathcal{G}$!).

(D_3) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen und $\epsilon > 0$. Da μ ein endliches Maß ist gilt

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) = \mu\Bigg(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\Bigg) < \infty,$$

insbesondere können wir also $N \in \mathbb{N}$ wählen, so dass

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \mu(A_j) \leqslant \epsilon.$$

Für $j \in \{1, \dots, N\}$ existiert $G_j \in \mathcal{G}$ mit $\mu(A_j \bigtriangleup G_j) \leqslant \epsilon 2^{-j}$. Für $G := \bigcup_{j=1}^N G_j \in \mathcal{G}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) \setminus G &= \left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) \cap G^c \\ &= \left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^N G_j^c\right) \\ &= \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} \left(A_j \cap \bigcap_{k=1}^N G_k^c\right) \\ &\subset \dot{\bigcup_{j=1}^N} (A_j \cap G_j^c) \cup \dot{\bigcup_{j=N+1}^\infty} A_j.\end{aligned}$$

Analog sieht man

$$\begin{aligned}G \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) &\subset G \setminus \left(\dot{\bigcup_{j=1}^N} A_j\right) \\ &= G \cap \bigcap_{j=1}^N A_j^c \\ &\subset \bigcup_{j=1}^N (G_j \cap A_j^c).\end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned}\mu\left(\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) \bigtriangleup G\right) &\leqslant \mu\left(\bigcup_{j=1}^N (A_j \bigtriangleup G_j) \cup \dot{\bigcup_{j=N+1}^\infty} A_j\right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^N \mu(A_j \bigtriangleup G_j) + \sum_{j=N+1}^\infty \mu(A_j) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^N \epsilon 2^{-j} + \epsilon \\ &\leqslant \epsilon + \epsilon.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, zeigt das $\dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{D}$.

Offensichtlich gilt $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$ (wähle $G = A \in \mathcal{G}$). Da $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist, folgt

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}.$$

(b) Betrachtet man das Mengensystem

$$\mathcal{D}' := \{A \in \mathcal{A} : \forall \epsilon > 0 \ \exists G \in \mathcal{G} : \mu(A \bigtriangleup G) \leqslant \epsilon, \nu(A \bigtriangleup G) \leqslant \epsilon\},$$

so folgt genau wie in Teil (a), dass $\mathcal{D}'$ ein Dynkin-System ist. Mit der gleichen Argumentation wie in (a) folgt dann die Behauptung.

(c) »$\Leftarrow$«: Es sei $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ und $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) \leqslant \epsilon$. Aus der Monotonie des Maßes folgt

$$\mu(A) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) \leqslant \epsilon,$$

also $\mu(A) = 0$.

"$\Rightarrow$": Wir setzen $\mathcal{K} := \{A \subset \mathbb{R}^d; \exists (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I} : A = \bigcup_n I_n\}$ und beobachten, dass $I \in \mathcal{K} \Rightarrow I^c \in \mathcal{K}$. Weiterhin definieren wir

$$\mathcal{D} := \{A \subset \mathbb{R}^d; \forall \epsilon \exists J, K \in \mathcal{K} : J \subset A \subset K, \mu(K \setminus J) \leqslant \epsilon\}.$$

Behauptung: $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System.

(D_1) Offensichtlich gilt $E = \mathbb{R}^d \in \mathcal{D}$ (wähle $J = K = \mathbb{R}^d$).

(D_2) Es sei $A \in \mathcal{D}$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es $J, K \in \mathcal{K}$ mit $J \subset A \subset K$ und $\mu(K \setminus J) \leqslant \epsilon$. Wegen $J^c, K^c \in \mathcal{K}$, $\mu(K^c \setminus J^c) = \mu(J \setminus K) \leqslant \epsilon$ und $J^c \supset SA^c \supset K^c$ folgt sofort $A^c \in \mathcal{D}$.

(D_3) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen und $\epsilon > 0$. Wir wählen $J_j \in \mathcal{K}$ und $K_j \in \mathcal{K}$ mit $J_j \subset A_j \subset K_j$, $\mu(K_j \setminus J_j) \leqslant \epsilon 2^{-j}$ und setzen

$$J := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \qquad K := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j.$$

Da $\mathcal{K}$ stabil unter abzählbaren Vereinigungen ist, gilt $J \in \mathcal{K}$, $K \in \mathcal{K}$. Weiterhin ist $J \subset \dot{\bigcup}_j A_j \subset K$ und

$$\begin{aligned}
\mu(K \setminus J) &= \mu\left(\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j\right) \cap \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} J_j\right)^c\right) \\
&= \mu\left(\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j\right) \cap \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} J_j^c\right)\right) \\
&= \mu\left(\left[\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left(K_j \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} J_k^c\right)\right]\right) \\
&\leqslant \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (K_j \cap J_j^c)\right) \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu(K_j \cap J_j^c)}_{\mu(K_j \setminus J_j) \leqslant \epsilon 2^{-j}} \\
&\leqslant \epsilon.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\dot{\bigcup}_j A_j \in \mathcal{D}$.

Wegen $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$ folgt, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \delta(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}$.

■■

Aufgabe 4.7. Lösung: "$\Rightarrow$": Wegen $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ und $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$ sieht man aus der Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sofort

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H) \;\; \forall G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$$

"$\Leftarrow$": Das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A}; \forall G \in \mathcal{G} : \mathbb{P}(A \cap G) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(G)\}.$$

ist ein Dynkin-System:

(D_1) Aus
$$\mathbb{P}(\Omega \cap G) = \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(\Omega)$$
folgt sofort $\Omega \in \mathcal{D}$. (Beachte dass $\mathbb{P}$ ein W-Maß ist, also $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.)

(D_2) Es sei $A \in \mathcal{D}$. Für $G \in \mathcal{G}$ ist
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap G) &= \mathbb{P}((\Omega \setminus A) \cap G)\\ &= \mathbb{P}(G \setminus (A \cap G))\\ &\overset{\star}{=} \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(A \cap G)\\ &\overset{A \in \mathcal{D}}{=} \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(G)\\ &= \mathbb{P}(G)(1 - \mathbb{P}(A))\\ &= \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(A^c)\end{aligned}$$
wobei wir in $(\star)$ verwendet haben, dass $\mathbb{P}$ ein endliches Maß ist. Folglich, $A^c \in \mathcal{D}$.

(D_3) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen und $G \in \mathcal{G}$. Dann ist auch $(A_j \cap G)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen und es folgt aus der σ-Additivität von $\mathbb{P}$, dass
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) \cap G\right) &= \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} (A_j \cap G)\right)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j \cap G)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(G)\\ &= \mathbb{P}(G) \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j)\\ &= \mathbb{P}(G)\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}$ und aus der Schnittstabilität von $\mathcal{H}$ folgt somit $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{H}) = \delta(\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}$, , d. h.
$$\mathbb{P}(G \cap C) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(C) \quad \text{für alle } C \in \mathcal{C},\ G \in \mathcal{G}.$$
Definiert man
$$\mathcal{D}' := \{A \in \mathcal{A};\ \forall C \in \mathcal{C} : \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\},$$
sieht man genau wie im ersten Teil des Beweises, dass $\mathcal{D}'$ ein Dynkin-System ist. Da wir bereits gezeigt haben, dass $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}'$ folgt dann sofort $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G}) = \delta(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}'$.

■■

Aufgabe 4.8. Lösung: Für $H_n := \bigcup_{j=1}^n G_j \in \mathcal{A}$ gilt nach Voraussetzung $H_n \uparrow E$. Weiterhin ist auf Grund der Subadditivität
$$\mu(H_n) \leqslant \sum_{j=1}^n \mu(G_j) < \infty.$$

Vollkommen analog sieht man, dass $\nu(H_n) < \infty$. Folglich erfüllt die Folge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen von Satz 4.5b).

Aufgabe 4.9. Lösung: Zunächst zeigen wir, dass $t \cdot B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $t > 0$. Dazu definieren wir

$$\Sigma := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d); tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$$

für festes $t > 0$. Σ ist eine σ-Algebra:

(Σ_1) Offensichtlich ist $t\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, also $\mathbb{R}^d \in \Sigma$.

(Σ_2) Es sei $A \in \Sigma$. Dann

$$t(A^c) = t(\mathbb{R}^d \smallsetminus A) = t\mathbb{R}^d \smallsetminus (tA) = \mathbb{R}^d \smallsetminus (tA) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

also $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

(Σ_3) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$. Aus der Identität

$$t\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (tA_j)$$

folgt sofort $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \Sigma$.

Da die Dilatation eines Rechtecks $I \in \mathcal{J}$ immernoch ein Rechteck ist, gilt $\mathcal{J} \subset \Sigma$. Wegen $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ erhalten wir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \Sigma$. Folglich gilt $tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Nun sei $I = \times_{n=1}^d [a_n, b_n) \in \mathcal{J}$ ein Rechteck. Aus $tI = \times_{n=1}^d [ta_n, tb_n)$ folgt

$$\lambda^d(tI) = \prod_{n=1}^d ((tb_n) - (ta_n)) = t^d \prod_{n=1}^d (b_n - a_n) = t^d \lambda^d(I).$$

Definieren wir zwei Maße μ, ν durch

$$\nu(B) := \lambda^d(tB), \qquad \mu(B) := t^d\lambda^d(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

dann zeigt dies gerade $\nu(B) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{J}$. Da $\mathcal{J}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße, Satz 4.5, dass $\nu(B) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und damit die Behauptung. (Die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Satz 4.5b) kann beispielsweise als $G_n := [-n, n)^d$ gewählt werden.)

Aufgabe 4.10. Lösung: Setze

$$\nu(A) := \mu(\theta^{-1}(A)), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Beachte, dass ν wohldefiniert ist, da nach Voraussetzung $\theta^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ gilt. Wir zeigen, dass ν ein Maß auf $(E, \mathcal{A})$ ist:

(M_1) Wegen $\emptyset = \theta^{-1}(\emptyset)$ gilt $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

(M_2) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge disjunkter Mengen. Aus

$$\theta^{-1}\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) = \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} \theta^{-1}(A_j),$$

vgl. Aufgabe 2.2, und der σ-Additivität von μ folgt

$$\begin{aligned}\nu\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) &= \mu\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} \theta^{-1}(A_j)\right)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(\theta^{-}(A_j))\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(A_j).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $\nu(G) = \mu(G)$ für alle $G \in \mathcal{G}$. Da $\mathcal{G}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger ist, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße, Satz 4.5, dass $\nu(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Beachte, dass die Voraussetzung (b) in Satz 4.5 erfüllt ist, da μ ein endliches Maß ist; wir können $G_n := E$ wählen. (Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $E \in \mathcal{G}$, da die Bedingung $\mu(G) = \mu(\theta^{-1}(G))$ offensichtlich für $G = E$ erfüllt ist.)

5 Existenz von Maßen

Aufgabe 5.1. Lösung:

(a) *Monotonie:* Wir betrachten die einzelnen Fälle getrennt:

- $0 < x \leqslant y$: Aus $[0,x) \subset [0,y)$ folgt $0 \leqslant F_\mu(x) = \mu([0,x)) \leqslant \mu([0,y)) = F_\mu(y)$.
- $x \leqslant 0 \leqslant y$: Per Definition, $F_\mu(x) \leqslant 0 \leqslant F_\mu(y)$.
- $x \leqslant y < 0$: Wegen $[y,0) \subset [x,0)$ gilt $0 \leqslant -F_\mu(y) = \mu([y,0)) \leqslant \mu([x,0)) = -F_\mu(x)$, also $F_\mu(x) \leqslant F_\mu(y)$.

Linksstetigkeit: Wir zeigen die Behauptung hier nur für den Fall $x \geqslant 0$; der Fall $x < 0$ geht analog. Es sei zunächst $x > 0$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_k \uparrow x$. Für k hinreichend groß gilt $0 < x_k < x$. Aus $[0,x_k) \uparrow [0,x)$ folgt mit der Stetigkeit des Maßes von unten, vgl. Satz 3.3f), dass

$$\lim_{k\to\infty} F_\mu(x_k) = \lim_{k\to\infty} \mu([0,x_k)) = \mu([0,x)) = F_\mu(x).$$

Ist $x = 0$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_k \uparrow x$, so gilt $x_k < 0$ und somit $[x_k,0) \downarrow [0,0) = \emptyset$. Aus der Stetigkeit des Maßes μ von oben folgt daher

$$\lim_{k\to\infty} F_\mu(x_k) = -\lim_{k\to\infty} \mu([x_k,0))) = \mu(\emptyset) = 0 = F_\mu(0).$$

Das zeigt die Linksstetigkeit im Punkt $x = 0$.

(b) Angenommen, F ist im Punkt x rechtsstetig. Aus der Stetigkeit des Maßes von unten (vgl. Satz 3.3f)) folgt dann

$$\begin{aligned}
\mu(\{x\}) &= \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left[x, x+\frac{1}{k}\right)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu\left(\left[x, x+\frac{1}{k}\right)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(F\left(x+\frac{1}{k}\right) - F(x)\right) \\
&\overset{\star}{=} F(x) - F(x) = 0
\end{aligned}$$

wobei wir im Schritt $(\star)$ die Rechtsstetigkeit benutzt haben.

Es sei nun $\mu(\{x\}) = 0$. Eine ähnliche Rechnung wie im ersten Teil des Beweises zeigt, dass für jede Folge $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\epsilon_k \to 0$ gilt:

$$F(x+) - F(x) = \lim_{k\to\infty} F(x+\epsilon_k) - F(x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{k\to\infty} \mu([x, x+\epsilon_k)) \\ &= \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [x, x+\epsilon_k)\right) \\ &= \mu(\{x\}). \end{aligned}$$

(c) Da die halboffenen Intervalle $\mathcal{S} = \{[a,b); a < b\}$ einen Halbring bilden, genügt es nach Satz 5.2 zu zeigen, dass ν_F ein Prämaß auf $\mathcal{S}$ ist (beachte: ν_F ist kein Maß, denn $\mathcal{S}$ ist keine σ-Algebra!).

- $\nu_F(\varnothing) = 0$, ν_F nicht-negativ: Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ gilt $\nu_F(\varnothing) = \nu_F([a,a)) = F(a) - F(a) = 0$. Dass ν_F nicht-negativ ist, folgt aus der Tatsache, dass F monoton wachsend ist.
- (endlich) additiv: Es seien $a \leqslant b \leqslant c$ so, dass $[a,c) = [a,b) \cup [b,c) \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \nu_F([a,b)) + \nu_F([b,c)) &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a) \\ &= \nu_F([a,c)) \\ &= \nu_F([a,b) \cup [b,c)). \end{aligned}$$

- σ-additiv auf $\mathcal{S}$. Wir gehen wie beim Lebesgue-Maß vor. Es seien $I_n = [a_n, b_n) \in \mathcal{S}$ diskunkte Intervalle, so dass $I = [a,b) = \dot\bigcup_{n=1}^\infty [a_n, b_n) \in \mathcal{S}$. Für hinreichend kleine $\epsilon_n, \epsilon > 0$ (die genauen Werte wählen wir später) ist

$$\bigcup_{n=1}^\infty (a_n - \epsilon_n, b_n) \supset [a, b-\epsilon]$$

eine Überdeckung des **kompakten** Intervalls $[a, b-\epsilon]$ mit offenen Mengen. Wegen der Kompaktheit gibt es eine endliche offene Teilüberdeckung. Insbesondere gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\bigcup_{n=1}^N (a_n - \epsilon_n, b_n) \supset [a, b-\epsilon] \implies \bigcup_{n=1}^N [a_n - \epsilon_n, b_n) \supset [a, b-\epsilon).$$

Unser Ziel ist es,

$$\nu_F[a,b) - \sum_{n=1}^N \nu_F[a_n, b_n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

zu zeigen. Zunächst bemerken wir, dass wir $a_n \geqslant a_n'$ verkleinern und $b_n \leqslant b_n'$ vergrößern können, um

$$\dot\bigcup_{n=1}^N [a_n, b_n) \subset \dot\bigcup_{n=1}^N [a_n', b_n') = [a,b)$$

zu erreichen. Auf Grund der endlichen Additivität von ν_F auf $\mathcal{S}$ gilt dann

$$0 = \nu_F[a,b) - \sum_{n=1}^N \nu_F[a_n', b_n') \leqslant \nu_F[a,b) - \sum_{n=1}^N \nu_F[a_n, b_n).$$

Wieder können wir die endliche (Sub-)Additivität von ν_F verwenden:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \nu_F[a,b) - \sum_{n=1}^{N} \nu_F[a_n, b_n) \\
&= \underbrace{\nu_F[a, b-\epsilon) - \sum_{n=1}^{N} \nu_F[a_n - \epsilon_n, b_n)}_{\leqslant 0 \text{ Überdeckung \& subadditiv}} + \nu_F[b-\epsilon, b) + \sum_{n=1}^{N} \nu_F[a_n - \epsilon_n, a_n) \\
&\leqslant \nu_F[b-\epsilon, b) + \sum_{n=1}^{N} \nu_F[a_n - \epsilon_n, a_n).
\end{aligned}$$

Nun wählen wir ϵ und ϵ_n. Es sei $\eta > 0$ beliebig und auf Grund der Linksstetigkeit von F gibt es Werte $\epsilon > 0$ und $\epsilon_n > 0$ mit

$$\begin{aligned}
&\nu_F[b-\epsilon, b) = F(b) - F(b-\epsilon) \leqslant \frac{\eta}{2} \\
\text{und} \quad &\nu_F[a_n - \epsilon_n, a_n) = F(a_n) - F(a_n - \epsilon_n) \leqslant 2^{-n}\frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

Mithin gilt

$$0 \leqslant \nu_F[a,b) - \sum_{n=1}^{N} \nu_F[a_n, b_n) \leqslant \frac{\eta}{2} + \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\frac{\eta}{2} \leqslant \eta.$$

und die Behauptung folgt, indem wir zuerst den Grenzwert $N \to \infty$ und danach $\eta \to 0$ bilden.

Gemäß Satz 5.2 existiert somit mindestens eine Erweiterung. Die Eindeutigkeit folgt nun aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße: Die Mengen $A_n := [-n, n)$ erfüllen $\nu_F(A_n) < \infty$ und $A_n \uparrow \mathbb{R}$.

(d) Es sei μ ein Maß mit $\mu([-n,n)) < \infty$. Dann ist die in (a) definierte Funktion F_μ endlich, d.h. $F_\mu(x) < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Teil (b) können wir ν_{F_μ} zu einem Maß fortsetzen. Um zu zeigen, dass $\nu_{F_\mu} = \mu$ genügt es nach dem Maßeindeutigkeitssatz zu zeigen, dass

$$\nu_{F_\mu}([a,b)) = \mu([a,b)) \quad \text{für alle } a \leqslant b.$$

Wir betrachten drei Fälle getrennt:

- $0 \leqslant a \leqslant b$:

$$\nu_{F_\mu}([a,b)) = F_\mu(b) - F_\mu(a) = \mu([0,b)) - \mu([0,a)) = \mu([0,b) \setminus [0,a)) = \mu([a,b)).$$

- $a \leqslant b \leqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\nu_{F_\mu}([a,b)) &= F_\mu(b) - F_\mu(a) \\
&= -\mu([b,0)) - (-\mu([a,0))) \\
&= \mu([a,0)) - \mu([b,0)) \\
&= \mu([a,0) \setminus [b,0)) \\
&= \mu([a,b)).
\end{aligned}$$

- $a \leqslant 0 \leqslant b$:

$$\begin{aligned}\nu_{F_\mu}([a,b)) &= F_\mu(b) - F_\mu(a)\\ &= \mu([0,b)) - (-\mu([a,0)))\\ &= \mu([a,0)) + \mu([0,b))\\ &= \mu([a,0) \cup [0,b))\\ &= \mu([a,b)).\end{aligned}$$

(e) Da $\lambda([a,b)) = b - a = F(b) - F(a)$ gilt $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

(f) Sind $a, b < 0$ oder $a, b > 0$, dann ist $\delta_0([a,b)) = 0$ und somit folgt, dass F auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ konstant sein muss. Andererseits ist $\delta_0([a,b)) = 1$ für $a \leqslant 0 < b$ - das bedeutet, dass F an $x = 0$ einen Sprung der Höhe 1 haben muss. Da F zudem linksstetig sein muss (s. Teil (b)), ist

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,\\ 1, & x > 0\end{cases}$$

ein natürlicher Kandidat. Offenbar erfüllt aber auch $c + F(x)$ für jede beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ die gewünschten Eigenschaften.

■■

Aufgabe 5.2. Lösung: Unter Ausnutzung der Messbarkeit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) &= \mu^*\left(\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \cap A_1\right) + \mu^*\left(\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \cap A_1^c\right)\\ &= \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=2}^\infty A_i\right)\\ &= \dots\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q \cap (\cup_{i=n}^\infty A_i))\end{aligned} \tag{5.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\mu^*(Q \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mu^*(Q \cap A_i)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^\infty \mu^*(Q \cap A_i).$$

Falls $\sum_{i=1}^\infty \mu^*(Q \cap A_i) = \infty$, dann gilt die Behauptung.

Falls $\sum_{i=1}^\infty \mu^*(Q \cap A_i) < \infty$, dann gilt mittels der Subadditivität von äußeren Maßen

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=n}^\infty A_i\right) \leqslant \sum_{i=n}^\infty \mu^*(Q \cap A_i) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Somit folgt die Behauptung aus (5.1) für $n \to \infty$.

■■

Aufgabe 5.3. Lösung: b)⇒ a): Nach Annahme existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halboffener Rechtecke mit $B \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Folglich

$$\lambda^n(B) \leqslant \lambda^n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right) \leqslant \epsilon.$$

a)⇒b): Wie gewohnt bezeichnen wir die halboffenen Rechtecke mit $\mathcal{I}$. Da λ^n ein Prämaß auf $\mathcal{I}$ ist, folgt aus dem Satz von Carathéodory, Satz 5.2, dass das Maß

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(I_k); (I_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I}, \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \supset A\right\}$$

eine Fortsetzung auf $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definiert und dass diese Fortsetzung eindeutig ist (die Mengen $A_k := [-k,k)^n \in \mathcal{I}$ erfüllen $A_k \uparrow \mathbb{R}^n$ und $\lambda^n(A_k) < \infty$). Da λ^n offensichtlich eine weitere Fortsetzung ist, gilt also

$$\mu^*(A) = \lambda^n(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Aus der Definition von μ^* folgt damit sofort die Behauptung.

■■

Aufgabe 5.4. Lösung: Wir rufen uns die Definition von μ^* in Erinnerung:

$$\mu^*(Q) = \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j); (B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \supset Q\right\}.$$

(a) Wir betrachten zunächst den Fall $\mu^*(Q) < \infty$. Aus der Definition des Infimums wissen wir, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(B_j^\epsilon)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $B^\epsilon := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j^\epsilon \supset Q$ und

$$\mu(B^\epsilon) - \mu^*(Q) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j^\epsilon) - \mu^*(Q) \leqslant \epsilon.$$

(Die erste Abschätzung folgt aus der σ-Subadditivität.) Wir setzen $B := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B^{1/k} \in \mathcal{A}$. Offensichtlich gilt dann $B \supset Q$ und aus der Maßstetigkeit sieht man leicht $\mu(B) = \mu^*(Q)$. Es sei nun $N \in \mathcal{A}$ mit $N \subset B \setminus Q$. Dann gilt $B \setminus N \supset Q$ (male ein Bild!) und somit

$$\mu^*(Q) - \mu(N) = \mu(B) - \mu(N) = \mu(B \setminus N) = \mu^*(B \setminus N) \geqslant \mu^*(Q).$$

Folglich, $\mu(N) = 0$.

Nun sei $Q \subset E$ mit $\mu^*(Q) = \infty$. Da μ σ-endlich ist, existiert $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $A_j \uparrow E$ und $\mu(A_j) < \infty$. Für $Q_j := A_j \cap E$ existiert gemäß dem ersten Teil $B_j \in \mathcal{A}$, $B_j \supset Q_j$, mit $\mu(B_j) = \mu^*(Q_j)$ und $\mu(N) = 0$ für all $N \in \mathcal{A}$ mit $N \subset B_j \setminus Q_j$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $B_j \subset A_j$; anderenfalls ersetzen wir B_j durch $B_j \cap A_j$. *Tatsächlich:* Es gilt $B_j \cap A_j \supset Q_j$, $B_j \cap A_j \in \mathcal{A}$ und

$$\mu^*(Q_j) = \mu(B_j) \geqslant \mu(A_j \cap B_j) \geqslant \mu^*(Q_j).$$

Zudem ist $B_j \setminus Q_j \supset (B_j \cap A_j) \setminus Q_j$, d.h. für $N \subset (B_j \cap A_j) \setminus Q_j$ gilt weiterhin $\mu(N) = 0$.

Setze $B := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mu(B) \geqslant \mu(B_j) = \mu^*(B_j) \uparrow \infty$. Es sei nun $N \in \mathcal{A}$ mit $N \subset B \setminus Q$. Für $N_j := N \cap A_j \in \mathcal{A}$ gilt

$$N_j = N \cap A_j \subset (B \setminus Q) \cap A_j \overset{B_j \subset A_j}{\subset} C_j \setminus Q = C_j \setminus Q_j.$$

Also $\mu(N_j) = 0$ und daher folgt aus der σ-Subadditivität, dass $\mu(N) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(N_j) = 0$.

(b) Definiere $\overline{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$. Wir wissen aus (dem Beweis von) Theorem 5.2, dass $\overline{\mu}$ ein Maß auf $\mathcal{A}^*$ ist. Für $N^* \in \mathcal{A}^*$ mit $\overline{\mu}(N^*) = 0$ gilt

$$\mu^*(M) \leqslant \mu^*(N^*) = \overline{\mu}(N^*) = 0 \quad \text{für alle } M \subset N^*.$$

Wir müssen zeigen, dass $M \in \mathcal{A}^*$. Nach (5.2) genügt es zu zeigen, dass

$$\forall Q \subset E : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap M) + \mu^*(Q \setminus M).$$

Da μ^* subadditiv ist, finden wir für alle $Q \subset E$:

$$\begin{aligned}\mu^*(Q) &= \mu^*((Q \cap M) \cup (Q \setminus M))\\ &\leqslant \mu^*(Q \cap M) + \mu^*(Q \setminus M)\\ &\leqslant \underbrace{\mu^*(M)}_{0} + \mu^*(Q \setminus M) \leqslant \mu^*(Q).\end{aligned}$$

Folglich ist $M \in \mathcal{A}^*$.

(c) Offensichtlich ist $(E, \mathcal{A}^*, \overline{\mu})$ eine Fortsetzung von $(E, \mathcal{A}, \mu)$, denn $A \subset \mathcal{A}^*$ und $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Gemäß Aufgabe 3.7 genügt es zu zeigen, dass

$$\mathcal{A}^* = \{A \cup N; A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu^*\} \tag{$\star$}$$

bzw.

$$\mathcal{A}^* = \{A^* \subset E; \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset A^* \subset B : \mu(B \setminus A) = 0\}; \tag{$\star\star$}$$

hier bezeichnet $\mathcal{N}_\mu^* := \{N \subset E; \exists N' \in \mathcal{A}, N \subset N' : \mu(N') = 0\}$. Wir zeigen »$\supset$« in ($\star$) und »$\subset$« in ($\star\star$). Daraus folgt dann schon die Behauptung, da nach Aufgabe 3.7 die rechten Seiten in ($\star$) und ($\star\star$) übereinstimmen.

"$\subset$": Für $A^* \in \mathcal{A}^*$ existiert nach (a) eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $A \supset A^*$ und $A \setminus A^*$ ist eine $\mathcal{A}^*$-Nullmenge. Analog finden wir $B \in \mathcal{A}$, $B \supset (A^*)^c$ mit der Eigenschaft, dass

$$B \setminus (A^*)^c = B \cap A^* = A^* \setminus (B^c)$$

eine $\mathcal{A}^*$-Nullmenge ist. Folglich gilt $B^c \subset A^* \subset A$ und

$$A \setminus B^c \subset (A \setminus A^*) \cup (A^* \setminus B^c)$$

ist als Vereingung von zwei $\mathcal{A}^*$-Nullmengen wieder eine $\mathcal{A}^*$-Nullmenge. Wegen $A \setminus B^c \in \mathcal{A}$ ist $A \setminus B^c$ sogar eine $\mathcal{A}$-Nullmenge.

"$\supset$": Wir haben in (b) gezeigt, dass Teilmengen von $\mathcal{A}$-Nullmengen in $\mathcal{A}^*$ enthalten sind, somit sind Mengen der Form $A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}$ und N Teilmenge einer $\mathcal{A}$-Nullmenge wieder in $\mathcal{A}^*$.

Bemerke: σ-Additivität ist wesentlich. Sei $(E, \mathcal{A}, \mu)$ der Maßraum aus Beispiel 3.5.e) mit $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(E)$ und

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \varnothing, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\mathcal{A}^*$ definiert wie in Aufgabe 3.7 gilt dann $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}$, da die leere Menge die einzige μ-Nullmenge ist. Benutzen wir dagegen die Konstruktion in dieser Aufgabe (Aufgabe 5.4), erhalten wir $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(E)$.

Aufgabe 5.5. Lösung: Da trivialerweise $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ gilt, müssen wir nur untersuchen, ob für Mengen $B \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass B und B^c überabzählbar sind, gilt, dass $B \in \mathcal{A}^*$. Per Definition ist

$$\gamma^*(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma(A_j); A_j \in \mathcal{A}, \bigcup_j A_j \supset B \right\}.$$

(Beachte, dass $\gamma^*(B) \leqslant 1$ für beliebige Mengen $B \subset \mathbb{R}$, da $A_1 = \mathbb{R}$, $A_2 = \cdots = \varnothing$ eine triviale Überdeckung von B ist.) Da B nach Voraussetzung überabzählbar ist, muss eine der Mengen A_j überabzälbar sein und folglich gilt $\gamma^*(B) = 1$. Wenden wir die gleiche Argumentation auf B^c an, so erhalten wir $\gamma^*(B^c) = 1$. Dies widerspricht jedoch der Additivität von γ^* auf $\mathcal{A}^*$:

$$1 = \gamma(\mathbb{R}) = \gamma^*(\mathbb{R}) \neq \gamma^*(B) + \gamma^*(B^c) = 2.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Für $A := (0,1)$ gilt daher offensichtlich $A \notin \mathcal{A}^*$.

Aufgabe 5.6. Lösung: Da m nach Voraussetzung eine additive Mengenfunktion ist und $0 \leqslant m(E) \leqslant \mu(E) < \infty$ genügt es nach Lemma 3.8 zu zeigen, dass m stetig in $\varnothing$ ist und $m(\varnothing) = 0$.

- $m(\varnothing) = 0$: Das folgt sofort aus $m(\varnothing) \leqslant \mu(\varnothing) = 0$. (Beachte, dass $\varnothing = E^c \in \mathcal{B}$.)
- m stetig von oben: Es sei $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ mit $B_k \downarrow \varnothing$. Aus $\mu(B_k) \to 0$ folgt dann

$$m(B_k) \leqslant \mu(B_k) \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

Das zeigt, dass m stetig in $\varnothing$ ist.

Bemerkung: Der Vollständigkeit halber überprüfen wir nochmal, dass jede additive Mengenfunktion m auf einer Boooleschen Algebra $\mathcal{B}$, die stetig von unten ist und $m(\emptyset) = 0$, $m(E) < \infty$ erfüllt, tatsächlich bereits ein Prämaß auf $\mathcal{B}$ ist:

Es sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ eine Folge disjunkter Mengen mit $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}$. Aus $B_1 \uplus \cdots \uplus B_n \in \mathcal{B}$ folgt

$$A_n := B \setminus (B_1 \uplus \cdots \uplus B_n) = B \cap \underbrace{(B_1 \uplus \cdots \uplus B_n)^c}_{\in\mathcal{B}} \in \mathcal{B}.$$

Da $A_n \downarrow \emptyset$ erhalten wir aus der Stetigkeit in $\emptyset$, dass $m(A_n) \to 0$. Unter Ausnutzung der Additivität von m ergibt sich somit

$$\begin{aligned} m(B) &= m(B \setminus (B_1 \uplus \cdots \uplus B_n)) + m(B_1 \uplus \cdots \uplus B_n) \\ &= m(A_n) + \sum_{j=1}^{n} m(B_j) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0 + \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j). \end{aligned}$$

Aufgabe 5.7. Lösung: Siehe Beweis von Lemma 18.5 in Kapitel 18.

---

6 Messbare Abbildungen

Aufgabe 6.1. Lösung:

(a) Nutze Fallunterscheidung (wie in Beispiel 6.3): $\mathbb{1}_A$ erzeugt die σ-Algebra $\{\emptyset, A, A^c, E\}$. Diese ist wegen $A \in \mathcal{A}$ auf jeden Fall in $\mathcal{A}$ enthalten, somit ist $\mathbb{1}_A$ messbar.

(b) B ist das Urbild von $\{1\}$, muss jedoch nicht in $\mathcal{A}$ enthalten sein. Messbarkeit gilt hier also im Allgemeinen nicht.

(c) Nur $\emptyset$ und E können als Urbilder vorkommen, T ist also messbar.

(d) Wir bezeichnen die Abbildung mit T. Beachte, dass aufgrund der Disjunktheit der Mengen A_i die Gleichheit $T^{-1}(B) = \cup\{A_i : i \in \mathbb{N}, c_i \in B\}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $c_i = 2^{-i}$ gilt. Somit ist $T^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ aufgrund der Messbarkeit der A_i. Dies zeigt die Messbarkeit von T.

Aufgabe 6.2. Lösung:

(a)(Σ_1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ist offensichtlich.

(Σ_2) Es sei $A \in \mathcal{A}$. Gilt $2n \in A^c$, dann gilt auch $2n+1 \in A^c$ (dies folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{A}$; wäre $2n+1 \in A$, dann wäre auch $2n \in A$). Analog sehen wir, dass $2n+1 \in A^c \implies 2n \in A^c$. Folglich, $A^c \in \mathcal{A}$.

(Σ_3) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Ist $2n \in \bigcup_j A_j$, dann existiert j_0 mit $2n \in A_{j_0}$. Wegen $A_{j_0} \in \mathcal{A}$ gilt also $2n+1 \in A_{j_0} \subset \bigcup_j A_j$. Genauso folgt, dass $2n+1 \in \bigcup_j A_j \implies 2n \in \bigcup A_j$.

(b) Die Bijektivität von T ist klar, denn offensichtlich gilt $T^{-1}(n) = n-2$. Es sei nun $A \in \mathcal{A}$ eine beliebige Menge. Um die Messbarkeit von T zu beweisen, müssen wir zeigen, dass $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, d.h.

$$2n \in T^{-1}(A) \Leftrightarrow 2n+1 \in T^{-1}(A) \quad \text{für alle } n > 0.$$

Ist $2n \in T^{-1}(A)$, $n > 0$, dann ist $2n+2 = 2(n+1) \in A$. Wegen $A \in \mathcal{A}$ impliziert das $2n+3 \in A$ und damit $2n+1 = T^{-1}(2n+3) \in T^{-1}(A)$. Folglich ist T messbar.

T^{-1} ist jedoch nicht messbar: Die Menge $A = \{k; k \leqslant 0\}$ ist offenbar in $\mathcal{A}$, aber $T(A) = \{k; k \leqslant 2\} \notin \mathcal{A}$ (da $2 = 2\cdot 1 \in A$, aber $2\cdot 1 + 1 = 3 \notin A$).

Aufgabe 6.3. Lösung:

(a) »⇒«: Das folgt sofort aus Satz 6.4.

"⇐": Nach Definition 6.5 wird die σ-Algebra $\sigma(T_i; i \in I)$ von Mengen der Form

$$G := \bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(A_i), \qquad A_i \in \mathcal{A}_i,$$

erzeugt. Gemäß Lemma 6.2 genügt es daher zu zeigen, dass $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$. Mit Hilfe von Aufgabe 2.2 sehen wir

$$\begin{aligned} f^{-1}(G) &= f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(A_i)\right) \\ &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(T_i^{-1}(A_i)) \\ &= \bigcup_{i\in I} \underbrace{(f \circ T_i)^{-1}(A_i)}_{\in\mathcal{F}} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

(b) Für $i \in \{1, \dots, m\}$ bezeichnen wir mit $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, x \mapsto x_i$ die Projektion auf die i-te Koordinate. Die Abbildung π_i ist stetig und somit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Weiterhin gilt offenbar $\pi_i \circ f = f_i$. Die Behauptung folgt aus dem ersten Teil, falls wir zeigen können, dass

$$\sigma(\pi_i; i = 1, \dots, m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Da wir uns bereits überlegt haben, dass π_i $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist für alle $i = 1, \dots, m$, folgt aus der Definition von $\sigma(\pi_i; i = 1, \dots, m)$, dass $\sigma(\pi_i; i = 1, \dots, m) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Andererseits: Ist $I \in \mathcal{J}$ ein halboffenes Rechteck (im $\mathbb{R}^m$), dann können wir $I = I_1 \times \dots \times I_m$ schreiben wobei $I_1, \dots, I_m$ halboffene Rechtecke in $\mathbb{R}$ (also halboffene Intervalle) sind. Damit ist

$$I = \pi_1^{-1}(I_1) \cap \dots \cap \pi_m^{-1}(I_m) \in \sigma(\pi_i; i = 1, \dots, m).$$

Da dies für jedes halboffene Rechteck gilt und $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, zeigt dies $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \sigma(\pi_i; i = 1, \dots, m)$.

■■

Aufgabe 6.4. Lösung: Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \mapsto (x, y)$ und bezeichne mit $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ die Euklidische Topologie auf $\mathbb{C}$.

Vorüberlegung:

$$\mathcal{C} := g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) := \left\{g^{-1}(B) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right\}$$

stimmt mit $\mathcal{B}(\mathbb{C}) := \sigma(\mathcal{O}_\mathbb{C})$ überein.

Begründung: Da die Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ stetig ist, gilt $g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

Andererseits: Ist $z \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$, dann ist $B_\epsilon(z) = g^{-1}(B_\epsilon(g(z))) \in g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (überlegen Sie sich mal, warum die Radien gleich bleiben!?); folglich gilt $\sigma(\mathcal{O}_\mathbb{C}) \subset g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Hier verwenden wir, dass die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ von offenen Kugeln der Form $B_\epsilon(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$, erzeugt wird; das folgt analog zum Beweis von Aufgabe 2.6.

Wir zeigen nun die Aussage aus der Aufgabe: Aus dem ersten Teil unserer Überlegung folgt, dass eine Abbildung $h : E \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{C})$-messbar ist, falls $g \circ h : E \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar ist.

Tatsächlich: Die Abbildung $h : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ ist per Definition messbar genau dann, wenn $h^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{C}$. Wegen $\mathcal{C} = g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ ist dies äquivalent zu $h^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ h)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und damit zur Messbarkeit von $g \circ h$. Da $(g \circ h)(x) = (\operatorname{Re} h(x), \operatorname{Im} h(x))$ folgt die Behauptung nun direkt aus Aufgabe 6.3.

■■

Aufgabe 6.5. Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{T^{-1}(A')}(x) = 1 \;&\Leftrightarrow\; x \in T^{-1}(A') \;\Leftrightarrow\; T(x) \in A' \\ &\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_{A'}(T(x)) = 1 \;\Leftrightarrow (\mathbb{1}_{A'} \circ T)(x) = 1 \end{aligned}$$

Da die Indikatorfunktion nur die Werte 0 und 1 annimmt, erhält man die Gleichheit im Fall $= 0$ durch Negation der gezeigten Äquivalenz.

(b) »$\Rightarrow$«: Sei T meßbar. Dann gilt $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\ \forall A' \in \mathcal{A}'$ und da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, folgt somit

$$\sigma(T) = \sigma(\{T^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}) \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

"$\Leftarrow$": $\sigma(T) \subset \mathcal{A}$ bedeutet insbesondere

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\ \forall A' \in \mathcal{A}',$$

d. h. T ist messbar.

(c) Nach Satz 6.6 sind Bildmaße stets Maße. Da T eine Abbildung ist, gilt stets $T^{-1}(E') = E$ und $\nu \circ T^{-1}(E') < \infty$ bzw. $\nu \circ T^{-1}(E') = 1$ folgt jeweils aus der Definition des Bildmaßes.

Ein von einem σ-endlichen Maß erzeugtes Bildmaß muss nicht σ-endlich sein. **Gegenbeispiel:** Wähle das Zählmaß μ auf $\mathbb{Z}^2$ und $T((x,y)) = x$. Während μ selbst σ-endlich ist, gilt dies nicht für $T(\mu)$.

■■

Aufgabe 6.6. Lösung: Beachte: Wir haben – im Sinne der folgenden Definition 7.1 – implizit »Borel-messbar« angenommen.

Es sei $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine Borel-messbare Funktion und $A \in \mathcal{A}$ ein Atom. Angenommen, f ist nicht konstant auf A, dann existieren $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \neq y_2$, und $e_1, e_2 \in A$

mit $f(e_1) = y_1$, $f(e_2) = y_2$. Da f Borel-messbar ist, sind

$$A_1 := f^{-1}(\{y_1\}) \in \mathcal{A} \qquad A_2 := f^{-1}(\{y_2\}) \in \mathcal{A}.$$

Wesentlich ist hierbei, dass einpunktige Mengen in der σ-Algebra des Bildes sind. Das ist für die Borel-σ-Algebra sicherlich erfüllt: $\{y\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Die Menge $B := A_1 \cap A$ hat offenbar die folgenden Eigenschaften:

- $B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra) und $B \subset A$.
- $B \neq \emptyset$ (wg. $e_1 \in B$).
- $B \neq A$ (wg. $e_2 \in A_2$).

Dies ist offenbar ein Widerspruch zu der Annahme, dass A ein Atom ist.

■■

Aufgabe 6.7. Lösung: Offenbar gilt $T^{-1}(\mathcal{G}) \subset T^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))$ und somit, nach Aufgabe 2.3, $\sigma(T^{-1}(\mathcal{G})) \subset T^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))$. Für die umgekehrte Richtung bemerken wir, dass die Abbildung

$$T : (E, \sigma(T^{-1}(\mathcal{G}))) \to (Y, \sigma(\mathcal{G}))$$

messbar ist. Tatsächlich: Nach Lemma 6.1 genügt es die Messbarkeit am Erzeuger $\mathcal{G}$ zu testen. Diese folgt sofort aus $T^{-1}(\mathcal{G}) \subset \sigma(T^{-1}(\mathcal{G}))$. Folglich ist T messbar und somit

$$T^{-1}(\sigma(\mathcal{G})) \subset \sigma(T^{-1}(\mathcal{G})).$$

■■

Aufgabe 6.7. Lösung:

(a) Wegen $\emptyset \in \mathcal{E}$ und $\emptyset \in \mathcal{F}$ folgt

$$\forall E \in \mathcal{E} : E \cup \emptyset \in \mathcal{E} \Cup \mathcal{F} \implies \mathcal{E} \subset \mathcal{E} \Cup \mathcal{F}$$

sowie

$$\forall F \in \mathcal{F} : \emptyset \cup F \in \mathcal{E} \Cup \mathcal{F} \implies \mathcal{F} \subset \mathcal{E} \Cup \mathcal{F}.$$

Mithin $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \subset \mathcal{E} \Cup \mathcal{F}$. Ganz ähnlich verwendet man $E \in \mathcal{E}$ und $E \in \mathcal{F}$, um $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \subset \mathcal{E} \Cap \mathcal{F}$ zu zeigen.

(b) Es seien $A, B \subset E$ mit $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cup B \neq E$ und $A \not\subset B$, $B \not\subset A$. Dann gilt für $\mathcal{E} := \{\emptyset, A, A^c, E\}$ und $\mathcal{F} := \{\emptyset, B, B^c, E\}$, dass

$$\mathcal{E} \cup \mathcal{F} = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, E\}$$

während

$$\mathcal{E} \Cup \mathcal{F} = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, A \cup B, A^c \cup B^c, A \cup B^c, A^c \cup B, E\}.$$

Ganz ähnlich geht man bei $\mathcal{E} \Cap \mathcal{F}$ vor.

(c) Teilaufgabe (a) zeigt

$$\sigma(\mathcal{E} \Cup \mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}) \quad \text{und} \quad \sigma(\mathcal{E} \Cap \mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}).$$

Umgekehrt ist klar, dass

$$\mathcal{E} \Cup \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}) \quad \text{und} \quad \mathcal{E} \Cap \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{F})$$

also

$$\sigma(\mathcal{E} \Cup \mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}) \quad \text{und} \quad \sigma(\mathcal{E} \Cap \mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}),$$

und es folgt

$$\sigma(\mathcal{E} \Cup \mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{E} \Cap \mathcal{F}).$$

7 Messbare Funktionen

Aufgabe 7.1. Lösung:

(a) Nach Lemma 6.2 reicht es, die Messbarkeit am Erzeuger zu untersuchen. Sei also $B = [a, b) \in \mathcal{I}$, $a < b$. Dann gilt

$$Q^{-1}(B) = E \cap \begin{cases} \varnothing \text{ falls } a, b \leqslant 0 \\ (-\sqrt{b}, +\sqrt{b}) \text{ falls } a \leqslant 0, b > 0 \\ \left(-\sqrt{b}, -\sqrt{a}\right] \cup \left[\sqrt{a}, \sqrt{b}\right) \text{ falls } a, b > 0 \end{cases}$$

Diese Mengen sind in $\mathcal{B}(E)$ enthalten, vgl. Aufgabe 2.4, also ist Q $\mathcal{B}(E)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

(b) Bezeichnet T die Einbettung von E nach $\mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$, so gilt formal:

$$\nu(T^2 \in B) = \nu(\pm T \in \sqrt{B}).$$

Konkret: Wir wissen bereits, dass $\nu \circ Q^{-1}$ ein Maß ist (Satz 6.6). Weiterhin ist $\mathcal{I}$ schnittstabil und $\nu \circ Q^{-1}$ in beiden Fällen sogar endlich, da ν beide Male aus einem beschränkten Lebesgue-Maß hervorgeht. Somit ist die Eindeutigkeit gemäß Satz 4.5 gegeben und es reicht wieder aus, Elemente $B = [a, b) \in \mathcal{I}$, $a \leqslant b$, zu betrachten.

(i) Aus Teil (a) sehen wir

$$\nu(Q^{-1}(B)) = \begin{cases} 0, & b \leqslant 0 \quad \text{oder} \quad a > 1 \\ \lambda([0, \sqrt{b})), & a < 0,\ b > 0 \\ \lambda([\sqrt{a}, \sqrt{b} \wedge 1)), & 0 < a < 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & b \leqslant 0 \quad \text{oder} \quad a > 1 \\ \sqrt{b \wedge 1} - \sqrt{0 \vee a \wedge 1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Auch hier benutzen wir (a):

$$\nu(Q^{-1}(B)) = \begin{cases} 0, & b \leqslant 0 \quad \text{oder} \quad a > 1 \\ \lambda([(-\sqrt{b}) \vee (-1), \sqrt{b} \wedge 1)), & a < 0,\ b > 0 \\ \frac{1}{2}\lambda([(-\sqrt{b}) \vee (-1), \sqrt{a}) \cup [\sqrt{a}, \sqrt{b} \wedge 1)), & 0 < a < 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & b \leqslant 0 \quad \text{oder} \quad a > 1 \\ 2\frac{1}{2}\lambda([0 \vee \sqrt{a} \wedge 1, \sqrt{b} \wedge 1)), & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & b \leqslant 0 \quad \text{oder} \quad a > 1 \\ (\sqrt{b} \wedge 1)) - (0 \wedge \sqrt{a} \wedge 1), & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 7.2. Lösung:

(a) Behauptung: $\sigma(u) = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); B = -B\}$.

"$\subset$": Sei $B \in \sigma(u)$. Nach Definition existiert dann $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $B = u^{-1}(A)$. Es sei nun $x \in B$. Wegen $u(-x) = u(x) \in A$ ist dann auch $-x \in B$. Also $B = -B$. Weiterhin ist $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da u stetig ist.

"$\supset$": Es sei $B \in \{B\mathcal{B}(\mathbb{R}); B = -B\}$. Wir müssen zeigen, dass $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ existiert mit $B = u^{-1}(A)$. Setze $A := B$, dann

$$x \in B \iff |x| \in B \iff x \in u^{-1}(A).$$

(b) Offensichtlich gilt $\sigma(u) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(c) Behauptung: $\sigma(u) = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2); (x,y) \in B, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-z, y+z) \in B\}$.

"$\subset$": Sei $B \in \sigma(u)$, dann $B = u^{-1}(A)$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Insbesondere $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ da u stetig ist. Weiterhin ist für $(x,y) \in B$ und $z \in \mathbb{R}$ immer $u(x-z, y+z) = u(x,y) \in A$, d.h. $(x-z, y+z) \in u^{-1}(A) = B$.

"$\supset$": Es sei $B \in \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2); (x,y) \in B, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-z, y+z) \in B\}$. Wir müssen zeigen, dass $B = u^{-1}(A)$ für ein $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wir setzen $A := \{y; (0,y) \in B\}$. Dann

$$(x,y) \in B \Leftrightarrow (x-x, y+x) = (0, y+x) \in B \Leftrightarrow u(x,y) = x+y \in A.$$

(d) Behauptung: $\sigma(u) = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2); (x,y) \in B, (v,w) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = v^2+w^2 \Rightarrow (v,w) \in B\}$.

"$\subset$": Für $B \in \sigma(u)$ existiert $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $B = u^{-1}(A)$. Ist $(x,y) \in B$ und $(v,w) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2 = v^2+w^2$, dann ist offensichtlich $u(v,w) = u(x,y) \in A$, d.h. $(v,w) \in u^{-1}(A) = B$.

"$\supset$": Sei $B \in \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2); (x,y) \in B, (v,w) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = v^2+w^2 \Rightarrow (v,w) \in B\}$. Für $A := \{(0, y^2+x^2); (x,y) \in B\}$ gilt dann gerade

$$(x,y) \in B \Leftrightarrow (0, x^2+y^2) \in B \Leftrightarrow u(x,y) = x^2+y^2 \in A.$$

Aufgabe 7.3. Lösung: Jede lineare Abbildung auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum ist stetig und somit Borel-messbar.

Beachte, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) := (x,0)^\top$ stetig und somit Borel-messbar ist. Die Abbildung ist jedoch **nicht** messbar bzgl. der vervollständigten Borel-σ-Algebren:

Es sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$, Teilmenge einer Lesbegue-Nullmenge. Für $A \times \{0\}$ gilt dann $A \times \{0\} \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$ wegen $A \times \{0\} \subset N := \mathbb{R} \times \{0\}$ und $\lambda^2(N) = 0$ (vgl. Aufgabe 3.7, Aufgabe 4.1). Andererseits ist $f^{-1}(A \times \{0\}) = A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, d.h. $f : (\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}) \to (\mathbb{R}^2, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)})$ ist nicht messbar.

Aufgabe 7.4. Lösung: Per Definition ist $B^* \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ genau dann, wenn $B^* = B \cup S$ wo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und S eine der folgenden Mengen ist: $\emptyset, \{-\infty\}, \{\infty\}, \{-\infty, \infty\}$. Wir benutzen diese Konvention für den Beweis: Mengen aus $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sind mit einem »$*$« versehen. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine σ-Algebra ist, erhalten wir, dass auch $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ eine σ-Algebra ist:

(Σ_1) Wähle $B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $S = \emptyset$, dann $\emptyset^* = \emptyset \cup \emptyset \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

(Σ_2) Es sei $B^* \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Aus $B^* = B \cup S$ folgt

$$\begin{aligned}(B^*)^c &= (B \cup S)^c \\ &= B^c \cap S^c \\ &= (\overline{\mathbb{R}} \setminus B) \cap (\overline{\mathbb{R}} \setminus S) \\ &= (\mathbb{R} \setminus B \cup \{-\infty, +\infty\}) \cap (\overline{\mathbb{R}} \setminus S) \\ &= ((\mathbb{R} \setminus B) \cap (\overline{\mathbb{R}} \setminus S)) \cup (\{-\infty, +\infty\} \cap (\overline{\mathbb{R}} \setminus S)) \\ &= (\mathbb{R} \setminus B) \cup (\{-\infty, +\infty\} \cap (\overline{\mathbb{R}} \setminus S)).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass sich $(B^*)^c$ als Vereingung einer $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-Menge und einer der Mengen $\emptyset, \{-\infty\}, \{\infty\}, \{-\infty, \infty\}$ schreiben lässt; mithin, $(B^*)^c \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

(Σ_3) Es sei $(B_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $B_n^* = B_n \cup S_n$. Dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cup S_n) = \underbrace{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)}_{=:B} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\right)}_{=:S}.$$

Da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine σ-Algebra ist, gilt $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und S ist eine der Mengen $\emptyset, \{-\infty\}, \{\infty\}, \{-\infty, \infty\}$. Folglich, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^* \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass die Borelmengen in $\overline{\mathbb{R}}$ mit den Borelmengen in $\mathbb{R}$ verträglich sind (Lemma 7.4).

- $\mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$: Es sei $B^* \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $B^* = B \cup S$. Dann ist $B^* \cap \mathbb{R} = B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$: Es sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ beliebig. Wählen wir $S := \emptyset$, so folgt, $B^* = B \cup S \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ und $B = \mathbb{R} \cap B^* \in \mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Aufgabe 7.5. Lösung:

(a) $u^+(x) = u(x)\mathbb{1}_{\{u \geqslant 0\}}(x)$ ist messbar da $\{u \geqslant 0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (beachte hierzu, dass das Produkt von messbaren Funktionen wieder messbar ist, vgl. Korollar 7.14). Entsprechend ist $u^-(x) = -u(x)\mathbb{1}_{\{u\leqslant 0\}}(x)$ ebenfalls messbar und somit $|u| = u^+ + u^-$ messbar als Summe von messbaren Funktionen.

Die »Umkehrung« ist schwieriger. Es gilt

- u^+ messbar, u^- messbar, dann ist $u = u^+ - u^-$ messbar.
- $|u|$ messbar, u^+ messbar, dann ist $u = 2u^+ - |u|$ messbar.
- $|u|$ messbar, u^- messbar, dann ist $u = |u| - 2u^-$ messbar.
- $|u|$ messbar, dann **folgt nicht**, dass u messbar ist. Betrachte dazu eine Menge $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und setze $u = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A^c}$. Dann sind u, u^+, u^- nicht messbar, aber $|u| \equiv 1$ ist messbar.
- u^+ messbar, dann **folgt nicht**, dass u messbar ist. Betrachte dazu Mengen $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und setze $u = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$. Dann ist u nicht messbar, aber u^+ ist messbar.
- u^- messbar, dann **folgt nicht**, dass u messbar ist. Geht analog zum vorangehenden Beispiel.

(b) Da jede differenzierbare Funktion insbesondere stetig ist, ist u messbar. Weiterhin ist

$$u'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{u(x+\frac{1}{n}) - u(x)}{\frac{1}{n}}$$

messbar als punktweiser Grenzwert von messbaren Funktionen, vgl. Korollar 7.13.

Aufgabe 7.6. Lösung:

(a) Direkt aus der Definition des Supremums folgt

$$\begin{aligned}\sup_i f_i(x) > \lambda &\iff \exists i_0 \in I : f_{i_0}(x) > \lambda \\ &\iff \exists i_0 \in I f_{i_0}(x) > \lambda \\ &\iff x \in \bigcup_i \{f_i > \lambda\}.\end{aligned}$$

(b) Sei $x \in \{\sup_i f_i < \lambda\}$. Dann gilt $f_j(x) \leqslant \sup_{i\in I} f_i(x) < \lambda$ für alle $j \in I$, also $x \in \{f_j < \lambda\}$ für alle $j \in I$ und somit $x \in \bigcap_{j\in I}\{f_j < \lambda\}$.

(Beachte: »$\supset$« gilt im Allgemeinen nicht. Betrachte zum Beispiel $f_i(x) := -\frac{1}{i}$, $i \in \mathbb{N}$, und $\lambda = 0$. Dann ist $\{\sup_i f_i < 0\} = \varnothing \neq E = \bigcap_i \{f_i < 0\}$.)

(c) Es sei $x \in \bigcup_i \{f_i \geqslant \lambda\}$. Dann existiert $i_0 \in I$ mit $x \in \{f_{i_0} \geqslant \lambda\}$, also

$$\sup_{i\in I} f(x) \geqslant f_{i_0}(x) \geqslant \lambda.$$

(d) Folgt aus

$$\begin{aligned}\sup_{i\in I} f_i(x) \leqslant \lambda &\iff \forall i \in I : f_i(x) \leqslant \lambda \\ &\iff \forall i \in I : x \in \{f_i \leqslant \lambda\} \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I}\{f_i \leqslant \lambda\}.\end{aligned}$$

(e)-(h) Analog zu (a)-(d).

Aufgabe 7.7. Lösung: Beachte, dass $|f_j(x) - u(x)| \leqslant 2^{-j}$ für alle $x \in \{u < j\}$ gilt. Somit hat man $\sup_{x\in E} |f_j(x) - u(x)| \leqslant 2^{-j}$ für alle $j > c$.

Aufgabe 7.8. Lösung: Betrachte zum Beispiel $T : [0,1) \to [0,1)$ mit $T(x) = \frac{x}{2}$ und $w_n : [0,1) \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $w_n(x) = (-1)^n \mathbb{1}_{[1/2,1)}(x)$.

Aufgabe 7.9. Lösung: Wir zeigen zunächst, dass jede monotone Funktion Borel-messbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass u monoton wachsend ist (sonst betrachte $-u$). Nach Lemma 7.2 genügt es zu zeigen, dass $\{u \leqslant a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Falls $\{u \leqslant a\} = \emptyset$ ist dies trivialerweise erfüllt, wir dürfen also $\{u \leqslant a\} \neq \emptyset$ annehmen. Ist $x \in \{u \leqslant a\}$, dann gilt für $y \leqslant x$, dass

$$u(y) \leqslant u(x) \leqslant a,$$

also $y \in \{u \leqslant a\}$. Setzen wir $\alpha := \sup\{x; x \in \{u \leqslant a\}\}$, so gilt also entweder $\{u \leqslant a\} = (-\infty, \alpha)$ (falls $\alpha \notin \{u \leqslant a\}$) oder $\{u \leqslant a\} = (-\infty, \alpha]$ (falls $\alpha \in \{u \leqslant a\}$). Damit folgt offenbar die Behauptung.

Wir wollen nun zeigen, dass $\sigma(u) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ genau dann gilt, wenn u streng monoton ist. Da wir bereits gesehen haben, dass $\sigma(u) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ müssen wir nur untersuchen, wann $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(u)$ gilt.

Angenommen, u ist monoton, aber nicht streng monoton. Dann existieren $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, so dass $u|_{[x,y]}$ konstant ist. Behauptung: $\{x\} \notin \sigma(u)$. *Tatsächlich:* Gilt $x \in u^{-1}(A)$ für eine Borel-Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, so gilt auch $[x, y] \in u^{-1}(A)$. Folglich kann keine Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ existieren mit $\{x\} = u^{-1}(A)$. Das bedeutet aber gerade $\{x\} \notin \sigma(u)$. Wegen $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ kann also nicht $\sigma(u) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gelten.

Angenommen, u ist streng monoton. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass u streng monoton wachsend ist. Für $a \in \mathbb{R}$, setzen wir $A = (-\infty, u(a)] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da u streng monoton wachsend ist, gilt $u^{-1}(A) = (-\infty, a] \in \sigma(u)$. Da Mengen der Form $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, ein Erzeuger der Borel-σ-Algebra sind (vgl. Bemerkung 2.9), folgt damit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(u)$.

Aufgabe 7.10. Lösung: Wir betrachten den Fall, dass u rechtsseitig stetig ist; der andere Fall geht analog. Wir approximieren u durch Treppenfunktionen:

$$u_n(x) := \sum_{j=1}^{2n^2} u(x_{j+1}^n)\mathbb{1}_{[x_j^n, x_{j+1}^n)}(x)$$

mit $x_j^n := -n + \frac{j}{n}$. Offensichtlich ist u_n Borel-messbar. Behauptung:

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

Tatsächlich: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x \in [-N, N]$ und per Definition gilt dann für alle $n \geqslant N$,

$$u_n(x) = u\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right)$$

($\frac{\lfloor nx\rfloor+1}{n}$ ist die kleinste Zahl vom Typ $\frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, die größer ist als x.) Aus der Rechtsstetigkeit von u folgt nun sofort $u_n(x) \to u(x)$ für $n \to \infty$. Folglich ist u Borel-messbar als punktweiser Grenzwert von Borel-messbaren Funktionen.

Aufgabe 7.11. Lösung: Offensichtlich definiert

$$g_n(x) := \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\mathbb{1}_{G_i}(x), \qquad x \in E,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion. Damit ist $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar als punktweiser Grenzwert von messbaren Funktionen. Folglich gilt $\sigma(g) \subset \mathcal{A}$. Um $\mathcal{A} \subset \sigma(g)$ zu zeigen, definieren wir

$$\Sigma := \{A \in \mathcal{A}; A \in \sigma(g)\}.$$

Σ ist eine σ-Algebra:

(Σ_1) $E \in \Sigma$ wegen $E \in \mathcal{A}$ und $E \in \sigma(g)$.

(Σ_2) Es sei $A \in \Sigma$. Dann ist $A \in \sigma(g)$ und da $\sigma(g)$ eine σ-Algebra ist, ist auch $A^c \in \sigma(g)$; folglich $A^c \in \sigma(g)$.

(Σ_3) Es seien $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$. Dann ist $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \sigma(g)$, also $\bigcup_j A_j \in \Sigma$.

Wegen $G_i = \{g = 2^{-i}\} \in \sigma(g)$ gilt zudem $\mathcal{G} \subset \Sigma$. Folglich ist $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma(g)$.

Aufgabe 7.12. Lösung:

(a) Es sei $\omega \in \Omega$. Zunächst bemerken wir, dass es genügt zu zeigen, dass $t \mapsto X(t,\omega)\mathbb{1}_{[a,b]}(t) =: X^{a,b}(t,\omega)$ für alle $a < b$ messbar ist. *Tatsächlich:* Wegen

$$X(t,\omega) = \lim_{R\to\infty} X^{-R,R}(t,\omega)$$

ist $t \mapsto X(t,\omega)$ dann messbar als punktweiser Grenzwert von messbaren Funktionen, vgl. Korollar 7.13.

Um die Notation einfach zu halten, betrachten wir hier nur $a = 0$, $b = 1$; der allgemeine Fall geht analog. Wir definieren

$$X_n(t,\omega) := \sum_{j=0}^{2^n-1} X(\tfrac{j+1}{2^n},\omega)\mathbb{1}_{[\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n}\wedge 1)}(t).$$

Für $t \in [0,1]$ gilt $\frac{\lfloor 2^n t\rfloor+1}{2^n} \downarrow t$ und damit folgt aus der Rechtsstetigkeit

$$X_n(t,\omega) = X\left(\frac{\lfloor 2^n t\rfloor + 1}{2^n},\omega\right) \xrightarrow{n\to\infty} X(t,\omega) \overset{t\in[0,1]}{=} X^{0,1}(t,\omega).$$

Für $t \notin [0,1]$ ist $X_n(t,\omega) = 0 = X^{0,1}(t,\omega)$ und somit gilt

$$X^{0,1}(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(t,\omega) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega.$$

Folglich genügt es gemäß Korollar 7.13 zu zeigen, dass $t \mapsto X_n(t,\omega)$ messbar ist. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{t; X_n(t,\omega) \leqslant \alpha\} = \bigcup_{j\in I} \underbrace{\left[\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n}\right)}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

wobei

$$I := \left\{j \in \{0,\ldots,2^n-1\}; X\left(\frac{j+1}{2^n},\omega\right) \leqslant \alpha\right\}.$$

Das zeigt, dass $t \mapsto X_n(t,\omega)$ messbar ist, und somit folgt die Behauptung.

(b) Da $t \mapsto X(t,\omega)$ rechtsstetig ist, gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} X(t,\omega) = \sup_{t\in\mathbb{Q}} X(t,\omega). \tag{$\star$}$$

Tatsächlich: Offensichtlich gilt »$\geqslant$«, d.h. es genügt »$\leqslant$« zu zeigen. Nach Definition des Supremums existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $s \in \mathbb{R}$ mit

$$X(s,\omega) \geqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} X(t,\omega) - \epsilon.$$

Aus der Rechtsstetigkeit folgt, dass wir $r \in \mathbb{Q}$, $r > s$, wählen können, so dass $|X(r,\omega) - X(s,\omega)| \leqslant \epsilon$. Damit

$$\sup_{t\in\mathbb{Q}} X(t,\omega) \geqslant X(r,\omega) \geqslant X(s,\omega) - \epsilon \geqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} X(t,\omega) - 2\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir die gewünschte Ungleichung.

Aus ($\star$) sehen wir nun sofort, dass die Abbildung $\omega \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} X(t,\omega)$ messbar ist; es ist nämlich ein (abzählbares) Supremum über messbare Funktionen (vgl. Korollar 7.13).

■■

Aufgabe 7.13. Lösung: "⇐": Angenommen es gibt zwei $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen $f, g : E \to \mathbb{R}$ mit $f \leqslant \phi \leqslant g$ und $\mu\{f \neq g\} = 0$. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\{\phi \leqslant x\} &= \{\phi \leqslant x, f = g\} \cup \{\phi \leqslant x, f \neq g\} \\ &= \underbrace{\{g \leqslant x, f = g\}}_{=:A} \cup \underbrace{\{\phi \leqslant x, f \neq g\}}_{=:N}.\end{aligned}$$

Da f und g messbar sind, ist $A \in \mathcal{A}$. Für N gilt dagegen $N \subset \{f \neq g\}$, d.h. N ist Teilmenge einer μ-Nullmenge. Aus der Definition von $\mathcal{A}^\mu$ (siehe Aufgabe 3.7) folgt deshalb $\{\phi \leqslant x\} \in \mathcal{A}^\mu$.

"⇒": Wir betrachten zunächst den Fall, dass ϕ eine Treppenfunktion ist, d.h.

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^N c_j \mathbb{1}_{A_j}(x), \qquad x \in E,$$

mit $c_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{A}^\mu$ $(j = 1, \ldots, n)$. Aus der Definition von $\mathcal{A}^\mu$ folgt, dass wir A_j schreiben können als

$$A_j = B_j + N_j$$

mit $B_j \in \mathcal{A}$ und N_j Teilmenge einer μ-Nullmenge $M_j \in \mathcal{A}$. Definieren wir

$$f(x) := \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{B_j}(x) \qquad g(x) := \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{B_j \cup M_j}(x), \qquad x \in E,$$

so handelt es sich bei f und g offensichtlich um $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen und es gilt $f \leqslant \phi \leqslant g$. Weiterhin ist

$$\mu(f \neq g) \leqslant \mu\left(\bigcup_{j=1}^n M_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n \mu(M_j) = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Behauptung für Treppenfunktionen gilt.

Es sei nun ϕ eine beliebige $\mathcal{A}^\mu/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen. Aus Korollar 7.11 wissen wir, dass eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{A}^\mu/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Treppenfunktionen existiert mit $\phi_n(x) \to \phi(x)$ für alle $x \in E$. Der erste Teil des Beweises zeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen f_n, g_n mit $f_n \leqslant \phi_n \leqslant g_n$ und $\mu(f_n \neq g_n) = 0$. Wir setzen

$$f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad g(x) := \liminf_{n\to\infty} g_n(x), \qquad x \in E.$$

f und g wieder $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen (Korollar 7.11) und es gilt $f \leqslant \phi \leqslant g$. Außerdem ist

$$\mu(f \neq g) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \neq g_n\}\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f_n \neq g_n) = 0.$$

■■

8 Das Integral positiver messbarer Funktionen

Aufgabe 8.1. Lösung: Betrachte den Maßraum $([-1,0], \mathcal{B}([-1,0]), \lambda)$ und die Folge von Funktionen

$$f_k(x) := 2^k \mathbb{1}_{[-2^{-k},0)}(x), \qquad x \in [-1,0], k \in \mathbb{N}_0.$$

Für jedes feste k ist $x \mapsto f_k(x)$ monoton und positiv. Weiterhin gilt $\int_{[-1,0]} f_k(x)\,\lambda(dx) = 1$. Andererseits ist es nicht schwer zu sehen, dass

$$\sup_{k\in\mathbb{N}_0} f_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \mathbb{1}_{[-2^{-j},-2^{-(j+1)})}(x)$$

(Bild malen!). Aus der Monotonie des Integrals folgt daher

$$\begin{aligned}
\int_{[-1,0]} \sup_{k\in\mathbb{N}_0} f_k(x)\,\lambda(dx) &\geqslant \int_{[-1,2^{-N}]} \sup_{k\in\mathbb{N}_0} f_k(x)\,\lambda(dx)\\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{[-2^{-j},-2^{-(j+1)})} \sup_{k\in\mathbb{N}_0} f_k(x)\,\lambda(dx)\\
&= \sum_{j=0}^{N-1} 2^j \lambda([-2^{-j}, -2^{-(j+1)}))\\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2} = \frac{N}{2}
\end{aligned}$$

für alle $N \geqslant 1$. Da dies für beliebige $N \geqslant 1$ gilt, erhalten wir

$$\int_{[-1,0]} \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)\,\lambda(dx) = \infty \neq 1 = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int f_k(x)\,\lambda(dx).$$

■■

Aufgabe 8.2. Lösung: Wir zeigen zunächst, dass aus dem Satz von Beppo Levi die Aussage

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,\mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \int u_n(x)\,\mu(dx) \tag{$\star$}$$

folgt. Da $u_n \geqslant 0$ gilt für $v_k := \sum_{n=0}^{k} u_n$, dass $v_k \uparrow v := \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Aus dem Satz von Beppo Levi erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned}
\int \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,\mu(dx) = \int v(x)\,\mu(dx) &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \int v_k(x)\,\mu(dx)\\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{k} \int u_n(x)\,\mu(dx)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int u_n(x)\,\mu(dx).$$

Das zeigt die Behauptung.

Nun gelte $(\star)$. Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^{0,+}(\mathcal{A})$ mit $u_n \uparrow u$ wie in Beppo Levi. Wir setzen $v_n := u_n - u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ ($u_0 := 0$). Dann gilt $v_n \geqslant 0$ und

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k = u.$$

Aus $(\star)$ folgt somit

$$\begin{aligned}\int u(x)\,\mu(dx) &= \int \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\,\mu(dx)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int v_k(x)\,\mu(dx)\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\,\mu(dx)\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n(x)\,\mu(dx).\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 8.3. Lösung: Setze

$$\nu(A) := \int_E \mathbb{1}_A(x) u(x)\,\mu(dx).$$

- $\mathcal{A}$ ist nach Voraussetzung eine σ-Algebra auf E. Wegen $\mathbb{1}_A \geqslant 0$ und $u \geqslant 0$ folgt aus der Positivität des Integrals, dass $\nu(A) \geqslant 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
- Offenbar gilt
$$\nu(\varnothing) = \int \underbrace{\mathbb{1}_\varnothing(x)}_{0} u(x)\,\mu(dx) = 0.$$
- Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Aus $\mathbb{1}_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_j}$ und Aufgabe 8.2 folgt
$$\begin{aligned}\nu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) &= \int \sum_{j\in\mathbb{N}} (\mathbb{1}_{A_j}(x) u(x))\,\mu(dx)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int \mathbb{1}_{A_j}(x) u(x)\,\mu(dx)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(A_j).\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 8.4. Lösung: Wegen $u_n \leqslant u$ definiert $v_n := u - u_n$ eine Folge messbarer nicht-negativer Funktionen. Gemäß Fatous Lemma gilt also

$$\int \liminf_{n\to\infty} (u - u_n)\,d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} v_n\,d\mu$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int v_n\,d\mu\\ &= \int \liminf_{n\to\infty} \int (u-u_n)\,d\mu.\end{aligned}$$

Aus $\int u\,d\mu < \infty$ und

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$$

für eine beliebige Folge $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ folgt

$$\int u\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int u_n\,d\mu \leqslant \int u\,d\mu - \int \limsup_{n\to\infty} \int u_n\,d\mu.$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten $\int u\,d\mu < \infty$ und multiplizieren die Ungleichung mit (-1), so erhalten wir die Behauptung.

Bemerkung: Für weitere Verallgemeinerungen von Fatous Lemma siehe auch Aufgabe 9.6.

Aufgabe 8.5. Lösung:

(a) Es gibt (mindestens) zwei Möglichkeiten die Aussage zu beweisen, entweder mit Hilfe der Stetigkeit des Maßes oder Fatous Lemma:

Lösung 1: Für $B_k := \bigcap_{i\geqslant k} A_i$ gilt $B_k \uparrow \liminf_{i\to\infty} A_i$. Aus der Stetigkeit des Maßes von unten (vgl. Satz 3.3f)) erhalten wir deshalb

$$\mu\left(\liminf_{i\to\infty} A_i\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k).$$

Da $B_k \subset A_k$, also $\mu(B_k) \leqslant \mu(A_k)$, folgt

$$\begin{aligned}\mu\left(\liminf_{i\to\infty} A_i\right) &= \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)\\ &\leqslant \liminf_{k\to\infty} \mu(A_k).\end{aligned}$$

Lösung 2: Wegen $\mathbb{1}_{\liminf_{i\to\infty} A_i} = \liminf_{i\to\infty} \mathbb{1}_{A_i}$, siehe Aufgabe 2.10, gilt nach Fatous Lemma

$$\begin{aligned}\mu\left(\liminf_{i\to\infty} A_i\right) &= \int \mathbb{1}_{\liminf_{i\to\infty} A_i}\,d\mu\\ &= \int \liminf_{i\to\infty} \mathbb{1}_{A_i}\,d\mu\\ &\leqslant \liminf_{i\to\infty} \underbrace{\int \mathbb{1}_{A_i}\,d\mu}_{\mu(A_i)}.\end{aligned}$$

(b) Genau wie in Teilaufgabe (a) hat man auch hier verschiedene Möglichkeiten, die Aussage zu beweisen.

Lösung 1: Für $B_k := \bigcup_{i\geqslant k} A_i$ gilt $B_k \downarrow \limsup_{i\to\infty} A_i$. Aus der Stetigkeit des Maßes von oben folgt

$$\mu\left(\limsup_{i\to\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_k) \overset{B_k\subset A_k}{\geqslant} \limsup_{n\to\infty} \mu(A_k).$$

(Für die Stetigkeit von oben haben wir die Endlichkeit des Maßes verwendet, siehe Satz 3.3g).) *Lösung 2:* Wir verwenden eine Folgerung aus Fatous Lemma, die in Aufgabe 8.4 gezeigt wurde:

$$\limsup_{i\to\infty} \int u_i \, d\mu \leqslant \int \limsup_{i\to\infty} u_i \, d\mu$$

falls $0 \leqslant u_i \leqslant u$ für ein u mit $\int u \, d\mu < \infty$. Hier können wir $u = 1$ wählen (integrierbar, da μ ein endliches Maß ist) und erhalten

$$\begin{aligned}\mu\left(\limsup_{i\to\infty} A_i\right) &= \int \mathbb{1}_{\limsup_{i\to\infty} A_i} \, d\mu \\ &= \int \limsup_{i\to\infty} \mathbb{1}_{A_i} \, d\mu \\ &\leqslant \limsup_{i\to\infty} \underbrace{\int \mathbb{1}_{A_i} \, d\mu}_{\mu(A_i)}.\end{aligned}$$

(c) Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ und $A_i := [i, 2i]$. Wegen

$$\limsup_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geqslant k} [i, 2i] = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k, \infty) = \varnothing$$

gilt

$$\lambda\left(\limsup_{i\to\infty} A_i\right) = 0.$$

Andererseits ist $\mu(A_i) = i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also

$$\limsup_{i\to\infty} \mu(A_i) = \infty.$$

(d) Aus $\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) < \infty$ folgt offenbar

$$\sum_{i=k}^\infty \mu(A_i) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Damit

$$\begin{aligned}0 \leqslant \mu\left(\limsup_{i\to\infty} A_i\right) &= \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geqslant k} A_i\right) \\ &\leqslant \mu\left(\bigcup_{i\geqslant k} A_i\right) \\ &\leqslant \sum_{i=k}^\infty \mu(A_i) \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 8.6. Lösung: Bevor wir mit dem Beweis beginnen, beweisen wir ein Hilfslemma.

Lemma. *Es sei* $(\beta_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \beta_{ij} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}. \tag{$\star$}$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\beta_{mn} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Da die rechte Seite nicht von m, n abhängt, bleibt die Ungleichung erhalten, wenn wir das Supremum über n nehmen:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_{mn} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Mit der gleichen Argumentation folgt

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_{mn} \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \beta_{ij}.$$

Die umgekehrte Ungleichung »$\geqslant$« indem wir die Rollen von i, j und m, n vertauschen. ∎

(a) Zunächst bemerken wir, dass wegen $c_i \geqslant 0$ die Reihe $\mu(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \mu_i(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ eine Summe von nicht-negativen Zahlen darstellt und somit $\mu(A)$ wohldefiniert ist (beachte, dass wir $\mu(A) = \infty$ zulassen).

(M1) Aus $\mu_i(\varnothing) = 0$ erhalten wir

$$\mu(\varnothing) = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \mu_i(\varnothing) = 0.$$

Beachte: Es kann der Fall $c_i = \infty$ auftreten; dann gilt aber trotzdem $c_i \mu(\varnothing) = \infty \cdot 0 = 0$, vgl. Tabelle 7.1.

(M2) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Aus der σ-Additivität der μ_i's folgt

$$\begin{aligned}
\mu\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \mu_i \left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} c_i \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_i(A_j) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} c_i \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} \mu_i(A_j) \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_i \mu_i(A_j) \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{M\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_i \mu_i(A_j).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass die Folgen monoton wachsend sind, also $\lim = \sup$. Mit $(\star)$ sehen wir nun

$$\begin{aligned}
\mu\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j\right) &= \sup_{M\in\mathbb{N}} \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} c_i \mu_i(A_j) \\
&= \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} c_i \mu_i(A_j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} \sum_{j\in\mathbb{N}} c_i \mu_i(A_j) \\
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} c_i \mu\,(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).
\end{aligned}
$$

(b) Für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$
\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \mu_i(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \int \mathbb{1}_A \, d\mu_i, \tag{$\star\star$}
$$

d.h. die behauptete Gleichheit gilt für $u = \mathbb{1}_A$. Ist nun $u = \sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{A_j}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{A}$, eine einfache Funktion, so folgt aus der Linearität des Integrals

$$
\begin{aligned}
\int u \, d\mu &= \sum_{j=1}^{m} a_j \int \mathbb{1}_{A_j} \, d\mu \\
&\overset{(\star\star)}{=} \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \int \mathbb{1}_{A_j} \, d\mu_i \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \left(\int \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{1}_{A_j} \right) d\mu_i \right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \int u \, d\mu_i.
\end{aligned}
$$

Schließlich sei $u \in \mathcal{L}^{0,+}(\mathcal{A})$ eine beliebige Funktion. Wir wählen gemäß dem Sombrero-Lemma eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen mit $0 \leqslant u_n \uparrow u$. Aus dem Satz von Beppo Levi (BL) sowie ($\star$) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int u \, d\mu &\overset{\text{BL}}{=} \sup_{k\in\mathbb{N}} \int u_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int u_n \, d\mu_i = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} c_i \int u_n \, d\mu_i \\
&\overset{(\star)}{=} \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} c_i \int u_n \, d\mu_i = \sup_{m\in\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} c_i \int u_n \, d\mu_i = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} c_i \lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu_i \\
&\overset{\text{BL}}{=} \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} c_i \int u \, d\mu_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i \int u \, d\mu_i.
\end{aligned}
$$

(c) Wähle $c_i = 1$ und $\mu_i = \delta_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Aus (b) wissen wir, dass

$$
\int u(x) \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i(dx) \right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int u(x) \, \delta_i(dx)
$$

für alle $u \in \mathcal{L}^{0,+}$. Für $u(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{xk}$, $x \in \mathbb{N}$, ergibt sich wegen

$$
\int u(x) \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i(dx) \right) \overset{\text{BL}}{\underset{\Sigma}{=}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int a_{xk} \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i(dx) \right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ik}
$$

und

$$
\sum_{i\in\mathbb{N}} \int u(x) \, \delta_i(dx) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ik}
$$

die Behauptung.

Alternativlösung: Wir können die Aussage auch elementar mit $(\star)$ beweisen. Wegen $a_{ik} \geqslant 0$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ik} &= \sup_{M\in\mathbb{N}}\sup_{N\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_{ik} \\ &= \sup_{M\in\mathbb{N}}\sup_{N\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} a_{ik} \\ &\overset{(\star)}{=} \sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{M\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} a_{ik} \\ &= \sup_{N\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ik} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ik}.\end{aligned}$$

Aufgabe 8.7. Lösung:

(a) Zunächst beobachten wir, dass das Integral $\int N(x,Q)\,\mu(dx)$ wohldefiniert ist, da die Abbildung $x \mapsto N(x,Q)$ messbar und nicht-negativ ist.

(M_1) Für jedes $x \in E$ ist $Q \mapsto N(x,Q)$ ein Maß; insbesondere ist also $N(x,\varnothing) = 0$. Damit folgt aus der Definition $\mu N(\varnothing) = 0$.

(M_2) Es sei $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} N(x,Q_j) \uparrow \sum_{j=1}^{\infty} N(x,Q_j) = N\left(x, \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} Q_j\right)$$

für jedes $x \in E$. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt daher

$$\begin{aligned}\mu N\left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} Q_j\right) &= \int N\left(x, \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} Q_j\right)\mu(dx) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\int\left(\sum_{j=1}^{n} N(x,Q_j)\right)\mu(dx) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{n}\int N(x,Q_j)\,\mu(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu N(Q_j).\end{aligned}$$

(b) Gemäß Teilaufgabe (a) ist das Integral $Nf(x) := \int f(y)\,N(x,dy)$ wohldefiniert. Die Additivität (bzw. positive Homogenität) folgt sofort aus der Additivität (bzw. positiven Homogenität) des Integrals, vgl. Lemma 8.8. Wir müssen also nur noch die Messbarkeit zeigen. Dazu sei $f \in \mathcal{L}^{0,+}(\mathcal{F})$. Gemäß dem Sombrero-Lemma existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen mit $0 \leqslant f_n \uparrow f$. Wenden wir den Satz von Beppo Levi an, so sehen wir, dass

$$Nf(x) = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(y)\,N(x,dy)$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n(y)\, N(x,dy)$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} Nf_n(x).$$

Da $x \mapsto N(x,Q)$ messbar ist für alle $Q \in \mathcal{F}$, sieht man leicht, dass $x \mapsto Nf_n(x)$ messbar ist (schreibe die einfache Funktion in ihrer Standarddarstellung auf und benutze die Additivität und positive Homogenität). Folglich ist $x \mapsto Nf(x)$ messbar, vgl. Korollar 7.13.

(c) Wir folgen dem Hinweis und betrachten zunächst messbare nicht-negative Treppenfunktionen. Es sei also

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{Q_j}(x), \qquad x \in F,$$

mit $c_j \geqslant 0$ und $Q_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, \dots, n$. Aus der positiven Homogenität und Additivität erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int f(x)(\mu N)(dx) &= \sum_{j=1}^n c_j \int \mathbb{1}_{Q_j}(x)(\mu N)(dx)\\
&= \sum_{j=1}^n c_j (\mu N)(Q_j)\\
&= \sum_{j=1}^n c_j \int N(x,Q_j)\, \mu(dx)\\
&= \sum_{j=1}^n \int \left(\int \mathbb{1}_{Q_j}(y)\, N(x,dy)\right) \mu(dx)\\
&= \int Nf(x)\, \mu(dx).
\end{aligned}$$

Das zeigt die gewünschte Identität für nicht-negative Treppenfunktionen. Um die Aussage auf alle nicht-negativen messbaren Funktionen zu erweitern, wenden wir das Sombrero-Lemma an: Für $f \in \mathcal{L}^{0,+}(\mathcal{F})$ existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $0 \leqslant f_n \uparrow f$. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,(\mu N)(dx) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n(x)\,(\mu N)(dx)\\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int Nf_n(x)\, \mu(dx)\\
&= \int \sup_{n\in\mathbb{N}} Nf_n(x)\, \mu(dx)\\
&= \int Nf(x)\, \mu(dx).
\end{aligned}$$

(Die letzte Gleichheit folgt mit Teilaufgabe (b); dort haben wir gezeigt, dass $f_n \uparrow f \implies Nf = \sup_n Nf_n$.)

■■

Aufgabe 8.8. Lösung:

(a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\mu(A_i) > 0$ (da $A_i \uparrow E$ gilt $\mu(A_i) > 0$ für i hinreichend groß). Wir definieren

$$f(x) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i \mu(A_i)} \mathbb{1}_{A_i}(x).$$

Beachte, dass f wohldefiniert ist, da für i hinreichend groß gilt, dass $\mu(A_i) \geqslant \min\{\mu(E)/2, 1\}$. Da für jedes $x \in E$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_i$ existiert, ist $f(x) > 0$ für alle $x \in E$. Weiterhin ist f messbar (Grenzwert von messbaren Funktionen, vgl. Korollar 7.13). Aus dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\begin{aligned}
\int f(x)\, d\mu(x) &= \int \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i \mu(A_i)} \mathbb{1}_{A_i}(x) \right) d\mu(x) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i \mu(A_i)} \int \mathbb{1}_{A_i}(x)\, d\mu(x) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty.
\end{aligned}$$

(b) Es sei $c > 0$. Dann folgt aus der Monotonie des Integrals

$$\begin{aligned}
\mu\{u \geqslant c\} &= \int_{\{u\geqslant c\}} d\mu(x) \\
&= \int_{\{u\geqslant c\}} \frac{c}{c}\, d\mu(x) \\
&\leqslant \frac{1}{c} \int_{\{u\geqslant c\}} u(x)\, d\mu(x) \\
&\leqslant \frac{1}{c} \int u(x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für weitere Versionen der Markov-Ungleichung siehe auch Korollar 10.5 und Aufgabe 10.4.

(c) Wir folgen dem Hinweis und setzen $A_i := \{f \geqslant i\}$. Offensichtlich gilt dann $A_i \uparrow E$ und $A_i \in \mathcal{A}$ (da f messbar ist). Mit der Markov-Ungleichung aus Teil (b) sehen wir außerdem

$$\mu(A_i) = \mu\{f \geqslant i\} \leqslant \frac{1}{i} \int f\, d\mu < \infty$$

für alle $i \in \mathbb{N}$.

■■

9 Das Integral messbarer Funktionen

Aufgabe 9.1. Lösung: Für jede messbare Funktion u gilt $u \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow |u| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $u \geqslant 0$. Wegen

$$\sum_{n=-k}^{k} \mathbb{1}_{\{2^n \leqslant u < 2^{n+1}\}} u \uparrow u \mathbb{1}_{\{u>0\}}$$

folgt aus dem Satz von Beppo-Levi, dass

$$\int u \, d\mu = \int_{\{u>0\}} u \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\{2^n \leqslant u < 2^{n+1}\}} u \, d\mu,$$

vgl. auch Aufgabe 8.2. Offenbar gilt zudem auf Grund der Monotonie des Integrals

$$C := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\{2^n \leqslant u < 2^{n+1}\}} 2^n \, d\mu \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\{2^n \leqslant u < 2^{n+1}\}} u \, d\mu \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\{2^n \leqslant u < 2^{n+1}\}} 2^{n+1} \, d\mu,$$

d.h.

$$C \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\{2^n \leqslant u < 2^{n+1}\}} u \, d\mu \leqslant 2C.$$

Folglich sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{L}^1(\mu) &\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\{2^n \leqslant u < 2^{n+1}\}} u \, d\mu < \infty \\ &\Leftrightarrow C = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu\{2^n \leqslant u < 2^{n+1}\} < \infty. \end{aligned}$$

■■

Aufgabe 9.2. Lösung:

(a) Da die Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ stetig ist, gilt $g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Andererseits: Ist $z \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$, dann ist $B_\epsilon(z) = g^{-1}(B_{g(z)}(\epsilon)) \in g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$; folglich gilt $\sigma(\mathcal{O}_\mathbb{C}) \subset g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (Beachte: Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{O}_\mathbb{C})$ wird von offenen Kugeln der Form $B_\epsilon(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$, erzeugt, vgl. den Beweis von Aufgabe 2.6.)

(b) Aus Teil (a) folgt, dass eine Abbildung $h : E \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathcal{A}/\mathcal{C}$-messbar ist, falls $g \circ h : E \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar ist. *Tatsächlich:* Die Abbildung $h : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{C})$ ist per Definition messbar genau dann, wenn $h^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{C}$. Wegen $\mathcal{C} = g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ ist dies äquivalent zu $h^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ h)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und damit zur Messbarkeit von $g \circ h$.

"$\Rightarrow$": Es sei $h : E \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A}/\mathcal{C}$-messbar. Dann ist

$$(g \circ h) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} h \\ \operatorname{Im} h \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar. Da die Projektionen $\pi_j : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_j \in \mathbb{R}$, Borel-messbar sind (das folgt sofort aus der Stetigkeit), erhalten wir, dass $\operatorname{Re} h = \pi_1(g \circ h)$ und $\operatorname{Im} h = \pi_2(g \circ h)$ als Kompositionen von messbaren Funktionen messbar sind.

"$\Leftarrow$": Es seien $\operatorname{Re} h$ und $\operatorname{Im} h$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Dann ist die Abbildung $(g \circ h) = (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h)$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar (siehe Satz 16.9). Damit folgt aus den obigen Überlegungen, dass $h : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{C})$ messbar ist.

(c) Wir zeigen zunächst die Additivität: Es seien $g, h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$. Aus

$$|\operatorname{Re}(g+h)| \leqslant |\operatorname{Re} g| + |\operatorname{Re} h| \in \mathcal{L}^1(\mu) \qquad |\operatorname{Im}(g+h)| \leqslant |\operatorname{Im}(g)| + |\operatorname{Im}(h)| \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

sehen wir, dass $g + h \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Wegen $\operatorname{Re}(g+h) = \operatorname{Re}(g) + \operatorname{Re}(h)$ und $\operatorname{Im}(g+h) = \operatorname{Im}(g) + \operatorname{Im}(h)$ erhalten wir aus der Definition des Integrals

$$\begin{aligned}
\int (g+h)\,d\mu &= \int \operatorname{Re}(g+h)\,d\mu + i \int \operatorname{Im}(g+h)\,d\mu \\
&= \int (\operatorname{Re}(g) + \operatorname{Re}(h))\,d\mu + i(\operatorname{Im}(g) + \operatorname{Im}(h))\,d\mu \\
&= \int \operatorname{Re}(g)\,d\mu + \int \operatorname{Re}(h)\,d\mu + i \int \operatorname{Im}(g)\,d\mu + i \int \operatorname{Im}(h)\,d\mu \\
&= \left(\int \operatorname{Re}(g)\,d\mu + i \int \operatorname{Im}(g)\,d\mu \right) + \left(\int \operatorname{Re}(h)\,d\mu + i \int \operatorname{Im}(h)\,d\mu \right) \\
&= \int g\,d\mu + \int h\,d\mu.
\end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass wir bereits wissen, dass das Integral für reellwertige Integranden linear ist. In analoger Weise folgt die Homogenität des komplexwertigen Integrals aus der Homogenität des reellwertigen Integrals.

(d) Da $\operatorname{Re} h$ und $\operatorname{Im} h$ reellwertige Funktionen sind, gilt $\int \operatorname{Re} h\,d\mu \in \mathbb{R}$ und $\int \operatorname{Im} h\,d\mu \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\int h\,d\mu \right) &= \operatorname{Re}\left(\int \operatorname{Re} h\,d\mu + i \int \operatorname{Im} h\,d\mu \right) \\
&= \int \operatorname{Re} h\,d\mu.
\end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\int h\,d\mu \right) &= \operatorname{Im}\left(\int \operatorname{Re} h\,d\mu + i \int \operatorname{Im} h\,d\mu \right) \\
&= \int \operatorname{Im} h\,d\mu.
\end{aligned}$$

(e) Wir folgen dem Hinweis: Da $\int h\,d\mu \in \mathbb{C}$ können wir $\theta \in (-\pi, \pi]$ wählen, so dass $e^{i\theta} \int h\,d\mu \geqslant 0$. Somit folgt aus (c),(d)

$$\begin{aligned}
\left| \int h\,d\mu \right| &= e^{i\theta} \int h\,d\mu \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} \int h\,d\mu \right) \\
&= \int \operatorname{Re}(e^{i\theta} h)\,d\mu
\end{aligned}$$

$$\leqslant \int |e^{i\theta}h|\,d\mu$$
$$= \int |h|\,d\mu.$$

(f) Wir haben uns bereits in (b) überlegt, dass die Messbarkeitsbegriffe übereinstimmen, d.h. dass $h:(E,\mathcal{A})\to(\mathbb{C},\mathcal{C})$ genau dann messbar ist, falls $\operatorname{Re}h$ und $\operatorname{Im}h$ $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar sind. Sind $\operatorname{Re}h$ und $\operatorname{Im}h$ μ-integrierbar, so ist auch

$$|h| = \sqrt{(\operatorname{Re}h)^2+(\operatorname{Im}h)^2} \leqslant |\operatorname{Re}h| + |\operatorname{Im}h|$$

μ-integrierbar. Ist dagegen $|h|\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, so folgt aus $|\operatorname{Re}h|\leqslant|h|$ und $|\operatorname{Im}h|\leqslant|h|$, dass auch $\operatorname{Re}h$ und $\operatorname{Im}h$ μ-integrierbar sind.

Aufgabe 9.3. Lösung: Wir zeigen zunächst die Ungleichungsmkette.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant i\}}(x) \leqslant |u(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant i\}}(x)$$

für alle $x\in E$.

Variante 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant i\}} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\mathbb{1}_{\{k+1>|u|\geqslant k\}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{1}_{\{k+1>|u|\geqslant k\}} = \sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{1}_{\{k+1>|u|\geqslant k\}}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{1}_{\{k+1>|u|\geqslant k\}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|u|\mathbb{1}_{\{k+1>|u|\geqslant k\}} = |u|\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant 1\}}$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{1}_{\{k+1>|u|\geqslant k\}} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}(|u|-1)\mathbb{1}_{\{k+1>|u|\geqslant k\}} = (|u|-1)\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant 1\}} \geqslant |u|\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant 1\}} - \mathbb{1}_{\{|u|\geqslant 0\}}.$$

Somit

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant i\}} \leqslant |u|\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant 1\}} \leqslant |u| \leqslant 1+\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant i\}} = \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant i\}}$$

Variante 2: Es sei $x\in E$, dann existiert genau ein $k\in\mathbb{N}_0$ mit $k\leqslant|u(x)|<k+1$. Dann gilt also

$$x\in\{|u|\geqslant i\}\quad\text{für alle } i\in\{0,\dots,k\}$$

und

$$x\notin\{|u|\geqslant i\}\quad\text{für alle } i\geqslant k+1.$$

Folglich

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0}\mathbb{1}_{\{|u|\geqslant i\}}(x) = k+1.$$

Wegen $k \leqslant |u(x)| \leqslant k+1$ gilt also

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \mathbb{1}_{\{|u|\geqslant i\}}(x) = k+1 \geqslant |u(x)| \geqslant k = (k+1)-1 = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \mathbb{1}_{\{|u|\geqslant i\}}(x)\right) - 1.$$

Wegen $1 = \mathbb{1}_{\{|u|\geqslant 0\}}$ (da $u \geqslant 0$ nach Voraussetzung) folgt die behauptete Ungleichungskette.

Durch Integration der Ungleichungskette erhalten wir unter Verwendung von Lemma 8.9, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu\{|u| \geqslant i\} \leqslant \int |u|\, d\mu \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \mu\{|u| \geqslant i\},$$

also (b). Ist nun $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$, dann folgt sofort, dass $\sum_{i\geqslant 1} \mu(|u| \geqslant 1) < \infty$. Andererseits: Ist u messbar und $\sum_i \mu(|u| \geqslant i) < \infty$, dann folgt $\int |u|\, d\mu < \infty$, also $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Das beweist (a).

Aufgabe 9.4. Lösung: *Lösung 1:* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_0)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Funktion $u(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$, ist offensichtlich nicht beschränkt. Es gilt jedoch

$$\int |u(x)|\, \delta_0(dx) = |u(0)| = 0 < \infty,$$

d.h. $u \in \mathcal{L}^1(\delta_0)$.

Lösung 2: $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum. Definiert man

$$u(x) := \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{i/2} \mathbb{1}_{[2^{-i}, 2^{-i+1})}(x)$$

so ist u nicht beschränkt. Aus dem Satz von Beppo Levi sehen wir, dass

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} u(x)\, \lambda(dx) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{i/2} \int_{[2^{-i}, 2^{-i+1})} \lambda(dx)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{i/2} (2^{-i+1} - 2^{-i})\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i/2} < \infty,\end{aligned}$$

also $u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$.

Aufgabe 9.5. Lösung:

(a) Wir nehmen an, dass alle auftretenden Funktionen messbar sind. Es sei $u = u^+ - u^-$, $w = w^+ - w^-$, wobei $\int u^+\, d\mu = \infty$, $\int u^-\, d\mu < \infty$ und $\int w^+\, d\mu < \infty$, $\int w^-\, d\mu = \infty$, d.h. u, w sind quasi-integrierbar. Offensichtlich gilt nun:

- a) gilt: au ist wieder quasi-integrierbar.
- b) gilt nicht: $u + w$ ist i.allg. nicht quasi-integrierbar. Wähle dazu u und w wie oben und so, dass $u^- = 0$ und $w^+ = 0$.

- c) gilt: es gilt $u \vee w = u^+ \vee w^+ - u^- \wedge w^-$. Das sieht man ganz einfach mit einer Fallunterscheidung: Betrachte $u(x) \vee w(x)$ und diskutiere alle Fälle $u(x) \geqslant 0, w(x) \geqslant 0$ usw. – beachte dabei $u(x) = u^+(x)$, wenn $u(x) \geqslant 0$ usw. Wenn wir o.B.d.A. u, w wie oben wählen, ist $\int u^+ \vee w^+ \, d\mu \geqslant \int u^+ \, d\mu = \infty$ und $\int u^- \wedge w^- \, d\mu \leqslant \int u^- \, d\mu < \infty$, d.h. wir haben quasi-Integrierbarkeit. Dasselbe gilt für $u \wedge w$ – entweder mit einer analogen Rechnung oder wegen $u \wedge w = -((-u) \vee (-w))$.
- d) gilt: $u \leqslant v \implies u^+ \leqslant v^+$ und $v^- \leqslant u^-$. Mithin

  $$\int u^+ \, d\mu \leqslant \int v^+ \, d\mu, \quad -\int u^- \, d\mu \leqslant -\int v^- \, d\mu$$

  und wir dürfen beide Ungleichungen addieren, da nach Vorr. der Fall »$\infty - \infty$« nicht auftreten kann.
- e) gilt, der Beweis ändert sich nicht.

(b) Offensichlich gilt $u_n - u_1 \geqslant 0$, d.h. mit dem Satz von Beppo Levi erhalten wir für $u = \sup_n u_n$

$$\sup_n \int (u_n - u_1) \, d\mu = \int (u - u_1) \, d\mu$$

und die Aufgabe ist es, $\int u_1 \, d\mu$ auf beiden Seiten addieren zu dürfen. Weil aber $\int u_1 \, d\mu \geqslant -\int u_1^- \, d\mu > -\infty$ gilt, ist $\int u_1 \, d\mu \in (-\infty, \infty]$, d.h. wir haben

$$\sup_n \int u_n \, d\mu = \sup_n \int (u_n - u_1) \, d\mu + \int u_1 \, d\mu = \int (u - u_1) \, d\mu + \int u_1 \, d\mu = \int u \, d\mu$$

in $(-\infty, \infty]$.

(c) Für eine monoton fallende Folge w_n von quasi-integrierbaren Funktionen mit $\int w_1^+ \, d\mu > -\infty$ gilt $\lim_n \int w_n \, d\mu = \int \lim_n w_n \, d\mu$.

Indem wir $u_n := -w_n$ setzen, können wir alles auf den Fall (b) zurückführen.

(d) Wenn $u \leqslant f$ gilt, dann gilt $u^+ \leqslant f^+$ und $f^- \leqslant u^-$. Folglich ist $\int u^+ \, d\mu < \infty$ und wir erhalten quasi-Integrierbarkeit. Der Fall $f \leqslant u$ geht analog.

(e) Wir schreiben $\log^+ x$ für den Positivteil von $\log x$, d.h. $\log^+ x = \log x$ für $x \geqslant 1$. Weiter ist $\log^+ x \leqslant x - 1$ für $x \geqslant 1$ (zeichnen Sie sich den Graphen und betrachten sie die Tangente an der Stelle $x = 1$ an die konkave Funktion $\log x$). Daher gilt

$$\begin{aligned}\int \log^+ u \, d\mu &= \frac{1}{p} \int \log^+(u^p) \, d\mu = \frac{1}{p} \int_{\{u \geqslant 1\}} \log^+(u^p) \, d\mu \\ &\leqslant \frac{1}{p} \int_{\{u \geqslant 1\}} (u^p - 1) \, d\mu \leqslant \frac{1}{p} \int_{\{u \geqslant 1\}} u^p \, d\mu < \infty.\end{aligned}$$

Es folgt quasi-Integrierbarkeit.

Aufgabe 9.6. Lösung:

(a) Aus $u_i(x) \geqslant u(x)$ folgt $f_i(x) := u_i(x) - u(x) \geqslant 0$. Nach Fatous Lemma gilt somit

$$\int \liminf_{i\to\infty} \underbrace{(u_i(x) - u(x)}_{f_i(x)} \mu(dx) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \int \underbrace{u_i(x) - u(x)}_{f_i(x)} \mu(dx).$$

Da $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ können wir auf beiden Seiten $\int u(x)\,\mu(dx)$ addieren und erhalten die gewünschte Aussage.

(b) Dies folgt direkt aus Teilaufgabe (a) mit $u_i := -v_i$ und $u := -v$ (beachte, dass $\limsup_n(-a_n) = -\liminf_n a_n$). Alternativ: Wende Fatous Lemma auf die nicht-negative Folge $f_i(x) := v(x) - v_i(x)$ an.

(c) Aus Teilaufgabe (a) folgt (mit $u_i = w_i$, $u = -g$), dass

$$\int \liminf_{i\to\infty} w_i(x)\,\mu(dx) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \int w_i(x)\,\mu(dx).$$

Aus (b) (mit $v_i = w_i$, $v = g$) erhalten wir zudem

$$\int \limsup_{i\to\infty} w_i(x)\,\mu(dx) \geqslant \limsup_{i\to\infty} \int w_i(x)\,\mu(dx).$$

Wegen $\limsup_n w_i = \liminf_n w_i = w$ ergibt sich durch Kombination der beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\limsup_{i\to\infty} \int w_i(x)\,\mu(dx) &\leqslant \int \lim_{i\to\infty} w_i(x)\,\mu(dx) \\
&= \int w(x)\,\mu(dx) \\
&\leqslant \liminf_{i\to\infty} \int w_i(x)\,\mu(dx).
\end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung (also $\liminf \ldots \leqslant \limsup \ldots$) gilt trivialerweise nach Definition von Limes inferior und superior. Damit

$$\lim_{i\to\infty} w_i(x)\,\mu(dx) = \int w(x)\,\mu(dx) = \int \lim_{i\to\infty} w_i(x)\,\mu(dx).$$

(d) Betrachte den Maßraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ und die Folge $u_i(x) := -i\mathbb{1}_{(0,1/i]}(x)$. Dann gilt

$$\int u_i(x)\,dx = -i \cdot \lambda\left(0, \frac{1}{i}\right] = -1,$$

aber andererseits

$$\int \liminf_{i\to\infty} u_i(x)\,dx = 0$$

da $u_i(x) \to 0$ für alle $x \in [0,1]$. Damit ist die Ungleichung in (a) nicht erfüllt. Die Folge $v_i := -u_i$ ist ein Gegenbeispiel für die Ungleichung in (b).

■■

Aufgabe 9.7. Lösung:

(a) »$\subset$«: Sei $x \in C_f$, d.h. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert. Dann ist insbesondere $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $\ell \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{für alle } m, n \geqslant \ell.$$

Folglich, $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m=\ell}^{\infty} \{|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}\}$.

"$\supset$": Es sei $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m=\ell}^{\infty} \{|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}\}$. Dann existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\ell \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{für alle } m, n \geqslant \ell.$$

Das bedeutet gerade, dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, folgt die Behauptung.

(b) Es folgt direkt aus der Definition des Grenzwertes, dass

$$C_f = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=\ell}^{\infty} \{|f_m(x) - f(x)| \leqslant \tfrac{1}{k}\};$$

vgl. die Argumentation in (a). Wir beobachten, dass

$$A_n^k \uparrow \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{m=\ell}^{\infty} \{|f_m(x) - f(x)| \leqslant \tfrac{1}{k}\} \supset C_f$$

für $n \to \infty$. Aus der Stetigkeit des Maßes folgt daher

$$\mu(A_n^k) \uparrow \mu\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{m=\ell}^{\infty} \{|f_m(x) - f(x)| \leqslant \tfrac{1}{k}\}\right) = \mu(E).$$

(Beachte: Ist $A \subset B$ messbar und $\mu(A) = \mu(E)$, dann gilt auch $\mu(B) = \mu(E)$.) Insbesondere können wir $n = n(k, \epsilon)$ wählen, so dass $\mu(A_n^k) \geqslant \mu(E) - \epsilon 2^{-k}$. Damit

$$\mu(E \setminus A_{n(k,\epsilon)}^k) = \mu(E) - \mu(A_{n(k,\epsilon)}^k) \leqslant \epsilon 2^{-k}.$$

(c) Es sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $n = n(k, \epsilon)$ wie in Teil (b) und setzen

$$A_\epsilon := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{n(k,\epsilon)}^k \in \mathcal{A}.$$

Aus der Subaddditivität von μ folgt

$$\mu(E \setminus A_\epsilon) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (E \setminus A_{n(k,\epsilon)}^k)\right) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E \setminus A_{n(k,\epsilon)}^k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \epsilon 2^{-k} \leqslant \epsilon.$$

Wir müssen noch zeigen, dass f_n auf A_ϵ gleichmäßig gegen f konvergiert. Nach Definition gilt

$$A_\epsilon = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\ell=1}^{n(k,\epsilon)} \bigcap_{m=\ell}^{\infty} \{|f - f_m| \leqslant \tfrac{1}{k}\},$$

d.h. für alle $x \in A_\epsilon$ und $k \in \mathbb{N}$ existiert $\ell(x) \leqslant n(k, \epsilon)$, so dass

$$|f(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{für alle } m \geqslant \ell(x).$$

Wegen $\ell(x) \leqslant n(k, \epsilon)$ folgt daraus insbesondere

$$|f(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{für alle } x \in A_\epsilon,\ m \geqslant n(k, \epsilon).$$

Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist, zeigt das die gewünschte gleichmäßige Konvergenz auf A_ϵ.

Aufgabe 9.8. Lösung: Siehe Satz 10.9.

10 Nullmengen

Aufgabe 10.1. Lösung: Die Richtung $\Leftarrow$ ist klar. Umgekehrt: Da $u - v$ als Differenz von messbaren Funktionen messbar ist, sind die Mengen $\{u \geqslant v\}, \{u < v\}$ messbar. Aus

$$\int |u - v| \, d\mu = \int_{\{u \geqslant v\}} (u - v) \, d\mu - \int_{\{u < v\}} (u - v) \, d\mu = 0 - 0$$

folgt dann mit Satz 10.2, dass $\mu(u - v \neq 0) = 0$, d.h. $u = v$ fast überall.

Aufgabe 10.2. Lösung: Die Richtung $\Leftarrow$ ist klar. Umgekehrt: Wir zerlegen $u = u^+ - u^-$ und $v = v^+ - v^-$ und ordnen die Gleicheit auf der linken Seite folgendermaßen um:

$$\nu(G) := \int_G (u^+ + v^-) \, d\mu = \int_G (v^+ + u^-) \, d\mu =: \rho(G) \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

Da die Integralausdrucke Maße auf $\mathcal{A}$ definieren und da die Maße auf $\mathcal{G}$ übereinstimmen, können wir $\nu(A) = \rho(A)$ aus dem Maßeindeutigkeitssatz folgern – beachten Sie, dass auf Grund der Integrierbarkeit von u, v gilt, dass $\nu(G_n) = \rho(G_n) < \infty$.

Die Behauptung folgt nun mit Hilfe von Aufgabe 10.1.

Aufgabe 10.3. Lösung: Die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ stimmt fast überall mit einer stetigen Funktion überein, ist aber nicht fast überall stetig. Andererseits ist $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$ fast überall stetig, aber stimmt nicht fast überall mit einer stetigen Funktion überein.

Aufgabe 10.4. Lösung:

(a) Es gilt

$$\mu\{|u| > c\} = \int \mathbb{1}_{\{|u|>c\}} \, d\mu = \int \frac{c}{c} \mathbb{1}_{\{|u|>c\}} \, d\mu \leqslant \int \frac{|u|}{c} \mathbb{1}_{\{|u|>c\}} \, d\mu \leqslant \frac{1}{c} \int |u| \, d\mu.$$

Im letzten Schritt wurde die Monotonie des Integrals verwendet:

$$\int \mathbb{1}_{\{|u|>c\}} |u| \, d\mu \leqslant \int |u| \, d\mu.$$

(b) Da $(0, \infty) \ni x \mapsto x^p$ monoton wachsend ist, gilt $\mu(|u| > c) = \mu(|u|^p > c^p)$. Aus Teilaufgabe (a) folgt somit

$$\mu\{|u| > c\} = \mu\{|u|^p > c^p\} \overset{(a)}{\leqslant} \frac{1}{c^p} \int |u|^p \, d\mu.$$

(c) Wir betrachten zunächst den Fall $\int u\,d\mu > 0$. Für $u \geqslant 0$ ist $u = |u|$ und damit erhalten wir aus Teilaufgabe (a) (mit $c := \alpha \int u\,d\mu$), dass

$$\mu\left\{u \geqslant \alpha \int u\,d\mu\right\} = \mu\{|u| \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c}\int |u|\,d\mu = \frac{1}{\alpha \int u\,d\mu}\int u\,d\mu = \frac{1}{\alpha}.$$

Ist $\int u\,d\mu = 0$, dann ist $\int |u|\,d\mu = 0$ (denn nach Annahme gilt $u \geqslant 0$) und aus Satz 10.2 erhalten wir $\mu\{u \neq 0\} = 0$. Damit folgt

$$\mu\left\{u > \alpha \int u\,d\mu\right\} = \mu\{u > 0\} = 0 \leqslant \frac{1}{\alpha}$$

für alle $\alpha > 0$.

(d) Die Monotonie von ϕ impliziert $\{|u| > c\} \subset \{\phi(|u|) \geqslant \phi(c)\}$. Mit der gleichen Argumentation wie in Teilaufgabe (a) erhält man daher

$$\begin{aligned}
\mu\{|u| > c\} &\leqslant \mu\{\phi(|u|) \geqslant \phi(c)\}\\
&= \int \mathbb{1}_{\{\phi(|u|)\geqslant\phi(c)\}}\frac{\phi(c)}{\phi(c)}\,d\mu\\
&\leqslant \int \mathbb{1}_{\{\phi(|u|)\geqslant\phi(c)\}}\frac{\phi(|u|)}{\phi(c)}\,d\mu\\
&= \frac{1}{\phi(c)}\int \mathbb{1}_{\{\phi(|u|)\geqslant\phi(c)\}}\phi(|u|)\,d\mu.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist ϕ nicht-negativ und folgern wir aus der Monotonie des Integrals schließlich

$$\mu\{|u| > c\} \leqslant \frac{1}{\phi(c)}\int \phi(|u|)\,d\mu.$$

(e) Beachte, dass

$$\{|u| < c\} \subset \{\psi(|u|) \geqslant \psi(c)\}$$

da ψ monoton fallend ist. Mit einer analogen Argumentation wie in (d) folgt die Behauptung.

(f) Wählt man in (b) $p = 2$, $u = X - \mathbb{E}X$ und $c = \alpha\sqrt{\mathbb{V}X}$, dann

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geqslant \alpha\sqrt{\mathbb{V}x}) \leqslant \frac{1}{(\alpha\sqrt{\mathbb{V}X})^2}\underbrace{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right)}_{\mathbb{V}X} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

■■

Aufgabe 10.5. Lösung:

(a) Es seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset Q \subset B$. Dann gilt $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ und indem wir zu $\sup_{A\subset Q}$ und $\inf_{Q\subset B}$ übergehen, folgt daraus $\mu_*(Q) \leqslant \mu^*(Q)$.

Es sei $\epsilon > 0$. Gemäß der Definition von μ_* existiert $A \subset Q$, $A \in \mathcal{A}$, mit

$$|\mu_*(Q) - \mu(A)| \leqslant \epsilon.$$

Indem wir A gegebenenfalls vergrößern, können wir erreichen, dass

$$|\mu^*(Q^c) - \mu(A^c)| \leqslant \epsilon.$$

(Beachte: $A^c \supset Q^c$.) Folglich,

$$|\mu(E) - \mu_*(Q) - \mu^*(Q^c)| \leqslant |\mu_*(E) - \mu(A)| + |\mu^*(E^c) - \mu(A^c)| \leqslant 2\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

(b) Es seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \supset R$ und $B \supset Q$. Wegen $A \cup B \supset E \cup F$ gilt dann

$$\mu^*(R \cup Q) \leqslant \mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B).$$

Indem wir das Infimum $\inf_{A \supset R}$ und $\inf_{B \supset Q}$ nehmen, erhalten wir $\mu^*(R \cup Q) \leqslant \mu^*(R) + \mu^*(Q)$.

Es seien nun $R, Q \subset E$ disjunkte Mengen. Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset R$ und $B \subset Q$ gilt offensichtlich $A \uplus B \subset R \uplus Q$ und $A \cap B = \varnothing$. Folglich,

$$\mu_*(R \uplus Q) \geqslant \mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Indem wir zunächst das Supremum $\sup_{A \subset R}$ und dann das Supremum $\sup_{B \subset Q}$ nehmen, folgt $\mu_*(R \uplus Q) \geqslant \mu_*(R) + \mu_*(Q)$.

(c) Aus der Definition des Supremums/Infimums wissen wir, dass Mengen $Q_n, Q^n \in \mathcal{A}$, $Q_n \subset Q \subset Q^n$ existieren mit

$$|\mu_*(Q) - \mu(Q_n)| + |\mu^*(Q) - \mu(Q^n)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Für $Q_* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \mathcal{A}$ und $Q^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q^n$ gilt dann $Q_* \subset Q \subset Q^*$; insbesondere gilt also $\mu(Q_*) \leqslant \mu_*(Q)$ und $\mu^*(Q) \leqslant \mu(Q^*)$. Weiterhin ist

$$\mu(Q_*) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} Q_n\right) \geqslant \mu(Q_k) \geqslant \mu_*(Q) - \frac{1}{k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich $\mu(Q_*) = \mu_*(Q)$. Analog zeigt man, $\mu(Q^*) \leqslant \mu^*(Q) + \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und erhält daraus $\mu(Q^*) = \mu^*(Q)$.

(d) Aus (c) folgt, dass

$$\mathcal{A}^* = \{Q \subset E; \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset Q \subset B : \mu(B \setminus A) = 0\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist aber gerade die vervollständigte σ-Algebra $\overline{\mathcal{A}}$, vgl. Aufgabe 3.7, und somit ist $\mathcal{A}^*$ ebenfalls eine σ-Algebra.

(e) Wir haben in (d) gezeigt, dass $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^*$. Um zu zeigen, dass $(E, \mathcal{A}, \overline{\mu})$ die Vervollständigung ist, genügt es daher zu zeigen, dass $\tilde{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}^*$ wobei wir mit $\tilde{\mu}$ das in Aufgabe 3.7(a) definierte Maß bezeichnen.

Es sei also $Q \in \mathcal{A}^*$, dann existieren per Definition Mengen $Q : *, Q^* \in \mathcal{A}$, $Q_* \subset Q \subset Q^*$, so dass

$$\mu(Q_*) = \mu_*(Q) = \mu^*(Q) = \mu(Q^*). \tag{$\star$}$$

Insbesondere ist $\mu(Q^* \smallsetminus Q_*) = 0$. Für $N := Q \smallsetminus Q_*$ ist $Q = Q_* \cup N$ und $N \subset Q^* \smallsetminus Q_*$, d.h. N ist Teilmenge einer μ-Nullmenge. Aus der Definition von $\tilde{\mu}$ erhalten wir somit

$$\tilde{\mu}(Q) = \mu(Q_*) \overset{(\star)}{=} \mu_*(Q) \overset{(\star)}{=} \mu^*(Q).$$

■■

Aufgabe 10.6. Lösung: Es sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{A}$ mit $G_n \uparrow E$ und $0 < \mu(G_n) < \infty$. Wir setzen $d\mathbb{P}(x) := f(x)\,d\mu(x)$ mit

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\mu(G_n)} 2^{-n} \mathbb{1}_{G_n}(x).$$

Offenbar gilt $f > 0$. Aus dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \int_B f(x)\,d\mu(x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\mu(G_n)} 2^{-n} \int_B \mathbb{1}_{G_n}(x)\,d\mu(x)\end{aligned}$$

für $B \in \mathcal{A}$. Speziell für $B = E$ erhalten wir

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} 2^{-n} = 1,$$

d.h. $\mathbb{P}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Für jede μ-Nullmenge N folgt dagegegen aus Satz 10.2b), dass

$$\mathbb{P}(N) = \int_N f(x)\,d\mu(x) = 0.$$

Andererseits: Ist $\mathbb{P}(N) = 0$ für $N \in \mathcal{A}$, dann ist

$$\int \mathbb{1}_N(x) f(x)\,d\mu(x) = 0$$

und nach Satz 10.2 folgt $f \cdot \mathbb{1}_N = 0$ μ-fast überall. Da $f > 0$ erhalten wir $\mathbb{1}_N = 0$ μ-fast überall, d.h. $\mu(N) = 0$.

■■

Aufgabe 10.7. Lösung:

(a) Um zu zeigen, dass μ eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir Reflexivität ($u \sim u$), Symmetrie ($u \sim v \iff v \sim u$) und Transitivität ($u \sim v$, $v \sim w \implies u \sim w$) prüfen.

- Reflexivität: Klar wegen $\mu(\{u \neq u\}) = \mu(\varnothing) = 0$.
- Symmetrie: Wegen $\{u \neq v\} = \{v \neq u\}$ gilt offensichtlich $u \sim v \iff v \sim u$.

- Transitivität: Sei $\mu(\{u \neq v\}) = 0 = \mu(\{v \neq w\}$ für $u, v, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann

$$\{u = w\} \supset \{u = v\} \cap \{v = w\} \implies \{u \neq w\} \subset \{u \neq v\} \cup \{v \neq w\}$$

und somit folgt aus der Subadditivität von μ, dass

$$\mu(\{u \neq w\}) \leqslant \mu(\{u \neq v\}) + \mu(\{v \neq w\}) = 0.$$

(b) Multiplikation: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$, dann ist $\alpha u \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Insbesondere ist also $[\alpha u]$ definiert. Um zu zeigen, dass die Operation $\alpha[u] := [\alpha u]$ wohldefiniert ist, müssen wir die Unabhängigkeit von der Wahl des Repräsentanten zeigen. Seien dazu $u, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $u \sim w$, dann

$$\mu(\{\alpha u \neq \alpha w\}) = \mu(\{u \neq w\}) = 0,$$

also $\alpha u \sim \alpha w$ und somit $[\alpha u] = [\alpha w]$.

Addition: In c) werden wir beweisen, dass $u + w \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $u, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Damit ist dann also $[u + w]$ definiert. Auch hier muss die Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten gezeigt werden. Seien $u \sim u'$ und $w \sim w'$. Dann

$$\{u + w = u' + w'\} \supset \{u = u'\} \cap \{w = w'\} \implies \{u + w \neq u' + w'\} \subset \{u \neq u'\} \cup \{w \neq w'\}$$

und somit

$$\mu(\{u + w \neq u' + w'\}) \leqslant \mu(\{u \neq u'\}) + \mu(\{w \neq w'\}) = 0,$$

d.h. $u + w \sim u' + w'$ und $[u + w] = [u' + w']$.

(c) Wir zeigen zunächst, dass $u+w \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $u, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Seien dazu $u, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Beachte zunächst, dass $u + w$ messbar ist. Wegen der Dreiecks-Ungleichung gilt

$$|u(x) + w(x)| \leqslant |u(x)| + |w(x)|, \qquad x \in E,$$

und somit gibt die Monotonie des Integrals, dass

$$\int |u(x) + w(x)| \, \mu(dx) \leqslant \int |u(x)| \, \mu(dx) + \int |w(x)| \, \mu(dx) < \infty.$$

Das zeigt $u + w \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\|u + w\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|w\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}. \tag{10.1}$$

Seien nun $u, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $u \sim w$, dann gilt $|u| = |w|$ fast überall und es folgt aus Korollar 10.4, dass

$$\|u\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = \int |u(x)| \, \mu(dx) = \int |w(x)| \, \mu(dx) = \|w\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}.$$

Damit ist also

$$\|[u]\|_{L^1(\mu)} \overset{\text{def}}{=} \inf\{\|w\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \,;\, w \sim u\} = \|u\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}.$$

(Wie wir gerade gesehen haben, ist die Norm rechts unabhängig von der Wahl des Repräsentanten u!) Wir überprüfen nun die Eigenschaften einer Norm:

- Definitheit: Aus $\|[u]\| = 0$ folgt $\|u\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = 0$ und $u \sim 0$ (vgl. Satz 10.2), also $[u] = [0]$.
- absolute Homogenität: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$, dann

$$\|[\alpha \cdot u]\|_{L^1(\mu)} = \|\alpha \cdot [u]\|_{L^1(\mu)} = \|\alpha \cdot u\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = |\alpha| \cdot \|u\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = |\alpha| \cdot \|[u]\|_{L^1(\mu)}.$$

- Dreiecksungleichung: Seien $u, w \in \mathcal{L}^1(\mu)$, dann folgt mit (10.1), dass

$$\|[u+w]\|_{L^1(\mu)} = \|u+w\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \overset{(10.1)}{\leqslant} \|u\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|w\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} = \|[u]\|_{L^1(\mu)} + \|[w]\|_{L^1(\mu)}.$$

■■

Aufgabe 10.8. Lösung: Nach Voraussetzung ist $(\int u^+ \, d\mu + \int v^+ \, d\mu) - (\int u^- \, d\mu + \int v^- \, d\mu)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ definiert, d.h. einer der Klammerausdrücke ist endlich. O.E. sei $\int u^- \, d\mu + \int v^- \, d\mu < \infty$.

Insbesondere ist also $N = \{u^- = \infty\} \cup \{v^- = \infty\}$ eine Nullmenge. Daher ist auf N^c der Ausdruck $u + v = (u^+ + v^+) - (u^- + v^-)$ definiert, wobei der Wert $+\infty$ angenommen werden kann.

Wir haben nun $(u+v)^- \leqslant u^- + v^-$. Das überlegt man sich folgendermaßen: $w^- = \max\{0, -w\}$ und daher reicht es, zu zeigen, dass

$$\max\{0, a+b\} \leqslant \max\{0, a\} + \max\{0, b\}, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}.$$

- $a + b \geqslant 0$ dann gilt $\max\{0, a+b\} = a + b$ und durch Addition von $a \leqslant \max\{0, a\}$, $b \leqslant \max\{0, b\}$ folgt die Behauptung.
- $a + b \leqslant 0$ dann gilt $\max\{0, a+b\} = 0$ und durch Addition von $0 \leqslant \max\{0, a\}$, $0 \leqslant \max\{0, b\}$ folgt die Behauptung.

Also haben wir (vgl. die Def. des Integrals positiver Funktionen).

$$\int (u^- + v^-) \, d\mu = \int u^- \, d\mu + \int v^- \, d\mu < \infty$$

d.h. es folgt Quasi-Integrierbarkeit. Die Formel für das Integral folgt dann aus der Definition der Quasi-Integrierbarkeit.

■■

Aufgabe 10.8. Lösung: Es reicht aus, die erste Ungleichung zu zeigen, da die zweite wegen $-\limsup_n b_n = \liminf_n(-b_n)$ aus der ersten Ungleichung folgt. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_m + b_m \leqslant \sup_{n \geqslant m} a_n + \sup_{n \geqslant m} b_n$$

Nun können wir den $\liminf_m$ auf beiden Seiten bilden. Da wir auf der r.S. zwei monoton fallende Folgen haben, ist der $\liminf_m$ dort ein $\lim_m$, und die Behauptung ist gezeigt.

■■

11 Konvergenzsätze

Aufgabe 11.1. Lösung: Aus der elementaren Ungleichungskette

$$|a-b|^p \leqslant (|a|+|b|)^p \leqslant (2\max\{|a|,|b|\})^p = 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\}$$

folgt sofort, dass $|u_n - u|^p \leqslant 2^p g^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Lösung 1: Die Abschätzung $|u_n - u|^p \leqslant 2^p g^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gibt uns eine integrierbare Majorante für die Folge $w_n := |u_n - u|^p$. Da nach Voraussetzung $\lim_n w_n = 0$ gilt, ergibt sich aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int |u_n - u|^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int w_n \, d\mu = \int \underbrace{\lim_{n\to\infty} w_n}_{0} \, d\mu = 0.$$

Lösung 2: Wir imitieren den Beweis von dem Satz von der dominierten Konvergenz. Aus der oben bewiesen Ungleichung sehen wir, dass $2^p g^p - |u_n - u|^p \geqslant 0$. Aus Fatous Lemma folgt daher

$$\begin{aligned} 2^p \int |g|^p \, d\mu &= \int \liminf_{n\to\infty} (2^p g^p - |u_n - u|^p) \, d\mu \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (2^p g^p - |u_n - u|^p) \, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(\int 2^p g^p \, d\mu - \int |u_n - u|^p \, d\mu \right) \\ &= 2^p \int |g|^p \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |u_n - u|^p \, d\mu \end{aligned}$$

(beachte, dass $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$). Folglich gilt

$$0 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int |u_n - u|^p \, d\mu \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int |u_n - u|^p \, d\mu \leqslant 0.$$

Dies zeigt, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int |u_n - u|^p \, d\mu$ existiert und gleich 0 ist.

Aufgabe 11.2. Lösung: Da $\sum_{n=1}^k |u_n| \uparrow \sum_{n=1}^\infty |u_n|$ gilt gemäß dem Satz von Beppo Levi, Satz 8.6,

$$\int \left(\sum_{n=1}^\infty |u_n| \right) d\mu = \int \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^k |u_n| \right) d\mu \overset{8.6}{=} \sup_{k\in\mathbb{N}} \int \sum_{n=1}^k |u_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int |u_n| \, d\mu < \infty.$$

Das zeigt $w := \sum_{n=1}^\infty |u_n| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Aus Korollar 10.6 sehen wir $\sum_{n=1}^\infty |u_n| \, d\mu < \infty$ fast überall. Insbesondere gilt also $u := \sum_{n=1}^\infty u_n < \infty$ fast überall. Um die zweite Aussage zu zeigen möchten wir den Satz von der dominierten Konvergenz anwenden. Dazu definieren wir $v_k := \sum_{n=1}^k u_n$ und bemerken, dass dann

$$|v_k| = \left|\sum_{n=1}^k u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^k |u_n| \leqslant \sum_{n=1}^\infty |u_n| \leqslant w \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Weiterhin gilt offenbar $v_k \to u = \sum_{n=1}^\infty u_n$ für $k \to \infty$. Damit folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}\int \sum_{n=1}^\infty u_n \, d\mu = \int u \, d\mu = \int \lim_{k\to\infty} v_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int v_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k \int u_n \, d\mu \\ = \sum_{n=1}^\infty \int u_n \, d\mu.\end{aligned}$$

Aufgabe 11.3. Lösung: Gemäß dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe $u := \sum_{n=1}^\infty (-1)^n u_n$. Weiterhin folgt aus der Monotonie, dass die Partialsummen $S_k := \sum_{n=1}^k (-1)^n u_n$ die Ungleichungskette

$$S_{2k} \leqslant S_{2k+2} \leqslant \ldots \leqslant u$$

erfüllen. Damit erhält man aus dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}\int u \, d\mu &= \lim_{k\to\infty} \int S_{2k} \, d\mu \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{2k} \int (-1)^n u_n \, d\mu \\ &= \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \int u_n \, d\mu.\end{aligned}$$

Beachte, dass die Reihe auf der rechten Seiten konvergiert: $u_n \downarrow 0$ impliziert, dass $\int u_n \, d\mu \downarrow 0$ (Satz von der monotonen Konvergenz) und damit folgt die Konvergenz wiederum aus dem Leibniz-Kriterium. Folglich gilt $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Aufgabe 11.4. Lösung: Mit dominierter Konvegenz ($e^{-rx} \leqslant 1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $r, x \geqslant 0$) sehen wir

$$\lim_{r\to\infty} \int_{[0,\infty)} e^{-rx} \, \mu(dx) = \int_{[0,\infty)} \lim_{r\to\infty} e^{-rx} \, \mu(dx) = \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{\{0\}} \, \mu(dx) = \mu\{0\}.$$

Aufgabe 11.5. Lösung:

(a) Es sei $\epsilon > 0$. Wegen $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)^c} |f| \, d\lambda = 0.$$

Insbesondere können wir $R > 0$ wählen mit

$$\int_{B_R(0)^c} |f|\, d\lambda \leqslant \epsilon.$$

Da K kompakt (also insbesondere beschränkt) ist, existiert $r = r(R) > 0$, so dass $x + K \subset B_R(0)^c$ für alle x mit $|x| \geqslant r$. Folglich gilt

$$\int_{x+K} |f|\, d\lambda \leqslant \int_{B_R(0)^c} |f|\, d\lambda \leqslant \epsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \geqslant r$.

(b) Es sei $\epsilon > 0$. Da f nach Voraussetzung gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ so dass

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \epsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ y \in x + K := x + \overline{B_\delta(0)} = \overline{B_\delta(x)}.$$

Somit

$$\begin{aligned} |f(x)|^p &= \frac{1}{\lambda(K+x)} \int_{K+x} |f(x)|^p d\lambda(y) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda(K)} \int_{K+x} \big(\underbrace{|f(y) - f(x)|}_{\leqslant \epsilon} + |f(y)| \big)^p \, d\lambda(y). \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Ungleichung

$$(a+b)^p \leqslant C(a^p + b^p), \qquad a, b \geqslant 0 \tag{$\star$}$$

für ein $C = C(p) > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(x)|^p &\leqslant \frac{C}{\lambda(K)} \left(\int_{K+x} \epsilon^p \, d\lambda(y) + \int_{K+x} |f(y)|\, d\lambda(y) \right) \\ &\leqslant C\epsilon^p \underbrace{\frac{\lambda(K+x)}{\lambda(K)}}_{1} + \frac{C}{\lambda(K)} \int_{K+x} |f(y)|\, d\lambda(y). \end{aligned}$$

Aus Teilaufgabe (a) folgt nun

$$\limsup_{|x| \to \infty} |f(x)|^p \leqslant C\epsilon^p \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0.$$

Offenbar ist dies äquivalent zu $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0$.

Zu $(\star)$: Wir betrachten zunächst den Fall $p \in (0,1)$. Dann ist die Funktion $[0, \infty) \ni a \mapsto f(a) := a^p$ konkav und deshalb insbesondere subadditiv, d.h.

$$(a+b)^p = f(a+b) \leqslant f(a) + f(b) = a^p + b^p, \qquad a, b \geqslant 0.$$

Folglich gilt $(\star)$ mit $C = 1$. Für $p \geqslant 1$ folgt die Ungleichung dagegen aus der Hölder-Ungleichung:

$$\left| \sum_{j=1}^d x_j \cdot y_j \right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^d |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ wobei $p + q = 1$ konjugierte Indizes bezeichnen. Wählen wir speziell $d = 2$, $x = (a, b)$, $y = (1, 1)$, dann

$$|a \cdot 1 + b \cdot 1| \leqslant (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{1}{q}}.$$

Bilden wir von beiden Seiten die p-te Potenz, erhalten wir die gewünschte Ungleichung.

Aufgabe 11.6. Lösung:

(a) Sei $\epsilon > 0$. Für $R > 0$ betrachten wir Mengen der Form $B := \{|f| \leqslant R\}$. Offenbar gilt dann per Definition $\sup_{x \in B} |f(x)| < \infty$. Andererseits folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz und Korollar 10.6, dass

$$\lim_{R \to \infty} \int_{|f| > R} |f(x)| \, dx = \int_{|f| = \infty} |f(x)| \, dx = 0.$$

Insbesondere können wir also R hinreichend groß wählen, so dass $\int_B |f(x)| \, dx < \epsilon$. Weiterhin sieht man aus der Markov-Ungleichung (Korollar 10.5), dass

$$\lambda(B) = \lambda\{|f| \geqslant R\} \leqslant \frac{1}{R} \int |f(x)| \, dx < \infty.$$

(b) Es sei $\epsilon > 0$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine Menge wie in (a). Weiterhin sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(A) < \epsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_A |f| \, d\lambda &= \int_{A \cap B} |f| \, d\lambda + \int_{A \cap B^c} |f| \, d\lambda \\ &\leqslant \sup_{x \in B} |f(x)| \cdot \underbrace{\lambda(A \cap B)}_{\leqslant \lambda(A)} + \int_{B^c} |f| \, d\lambda \\ &\leqslant \sup_{x \in B} |f(x)| \cdot \epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

(Beachte, dass $\sup_{x \in B} |f(x)| < \infty$.) Dies zeigt gerade, dass

$$\lim_{\lambda(A) \to 0} \int_A |f| \, d\lambda = 0.$$

Aufgabe 11.7. Lösung:

(a) Aus $u_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\|u_n - u\|_\infty \leqslant 1$ für n hinreichend groß, folgt zunächst aus der Dreiecksungleichung, dass

$$\int |u| \, d\mu \leqslant \int |u_n - u| \, d\mu + \int |u_n| \, d\mu \leqslant \|u_n - u\|_\infty \mu(E) + \int |u_n| \, d\mu < \infty,$$

also $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Eine ganz ähnliche Rechnung zeigt

$$\left| \int u_n \, d\mu - \int u \, d\mu \right| = \left| \int (u_n - u) \, d\mu \right| \leqslant \int |u_n - u| \, d\mu \leqslant \|u_n - u\|_\infty \mu(E).$$

Da $\mu(E) < \infty$ folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz $\|u_n - u\|_\infty \to 0$, dass

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int u_n \, d\mu - \int u \, d\mu \right| = 0.$$

(b) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Betrachte zum Beispiel den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^1)$ und die Folge $u_n(x) := \frac{1}{2n}\mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt offenbar $u_n \to 0$ gleichmäßig, $u_n \in \mathcal{L}^1(\lambda^1)$, aber

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu = 1 \neq 0 = \int u \, d\mu.$$

■■

Aufgabe 11.8. Lösung: Auf Grund der Monotonie von f gilt für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ mit $a_n \downarrow 0$, dass

$$f(a_n) \downarrow f(0+) := \inf_{t>0} f(t).$$

Speziell für die Folge $a_n := t^n$, $t \in (0,1)$ gilt also $f(t^n) \downarrow 0$. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt somit

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)\, dt = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 f(t^n)\, dt = \int_0^1 \inf_{n\in\mathbb{N}} f(t^n)\, dt = \int_0^1 f(0+)\, dt = f(0+).$$

■■

Aufgabe 11.9. Lösung: Setze $u_n(t) := t^n f(t)$, $t \in (0,1)$. Wegen $|t^n| \leqslant 1$ für $t \in (0,1)$ gilt offenbar

$$|u_n(t)| = |t^n| \cdot |f(t)| \leqslant |f(t)| \in \mathcal{L}^1(0,1).$$

Weiterhin folgt aus $t^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für $t \in (0,1)$ und $|f(t)| < \infty$ fast überall (vgl. Korollar 10.6), dass $|u_n(t)| \to 0$ fast überall. Damit ergibt sich aus dem Satz von der dominierten Konvergenz, Satz 11.3, und Bemerkung 11.4a), dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 t^n f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(t)\, dt = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to\infty} u_n(t)}_{0}\, dt = 0.$$

■■

Aufgabe 11.10. Lösung: Bekanntermaßen gilt $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n$ für $x \in [0,1)$ (geometrische Reihe). Damit sieht man leicht, dass für alle $t > 0$

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{e^t}\frac{1}{1-e^{-t}} = e^{-t}\sum_{n\geqslant 0}(e^{-t})^n = \sum_{n\geqslant 1} e^{-nt}$$

(beachte, dass $e^{-t} < 1$ für $t > 0$!). Definiert man $u_k(t) := \sin(t) \cdot \sum_{n=1}^k e^{-nt}$, dann bekommt man die Abschätzung

$$|u_k(t)| \leqslant |\sin t| \cdot \left|\sum_{n=1}^k e^{-nt}\right| = |\sin t| \sum_{n=1}^k e^{-nt} \leqslant |\sin t| \sum_{n\geqslant 1} e^{-nt} = \frac{|\sin t|}{e^t - 1} \qquad (*)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t > 0$. Aus den elementaren Abschätzungen $e^t - 1 \geqslant t$ $(t \geqslant 0)$ und $e^t - 1 \geqslant e^{t/2}$ $(t \geqslant 1)$ erhalten wir somit

$$|u_k(t)| \leqslant \mathbb{1}_{[0,1]}(t) + e^{-t/2}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(t) =: w(t).$$

Wir wollen nun als nächstes zeigen, dass $w \in \mathcal{L}^1((0,\infty))$. Dies folgt aus dem Satz von Beppo Levi:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty w(t)\,dt &= \int_0^1 \underbrace{w(t)}_{1}\,dt + \int_1^\infty \underbrace{w(t)}_{e^{-t/2}}\,dt\\ &= 1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_1^n e^{-t/2}\,dt = 1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} \big[-2e^{-t/2}\big]_{t=1}^n < \infty.\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $-\infty < a < b < \infty$, auch Lebesgue-integrierbar ist und dass das Lebesgue-Integral mit dem Riemann-Integral übereinstimmt (siehe Satz 13.2). Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt also

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{e^t - 1}\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty u_k(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k \int_0^\infty \sin(t)e^{-nt}\,dt.$$

Schreiben wir nun $\operatorname{Im} e^{it} = \sin t$, dann

$$\int_0^\infty \sin(t)e^{-nt}\,dt = \operatorname{Im}\left(\int_0^\infty e^{t(i-n)}\,dt\right),$$

vgl. auch Aufgabe 9.2. Unter erneuter Benutzung des Satzes von der dominierten Konvergenz sehen wir, dass

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin(t)e^{-nt}\,dt &= \operatorname{Im}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{1/R}^R e^{t(i-n)}\,dt\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{t(i-n)}}{i-n}\right]_{t=1/R}^R\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{n-i}\right) = \frac{1}{n^2+1}.\end{aligned}$$

Aufgabe 11.11. Lösung: Nach Definition der Exponentialfunktion gilt $e^{zx} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(zx)^n}{n!}$. Folglich,

$$u_k(x) := f(x) \sum_{n=0}^k \frac{(zx)^n}{n!} \xrightarrow{k\to\infty} f(x)e^{zx}.$$

Weiterhin folgt sofort aus der Dreiecksungleichung

$$|u_k(x)| \leqslant |f(x)| \sum_{n=0}^k \left|\frac{(zx)^n}{n!}\right| \leqslant |f(x)| \sum_{n\geqslant 0} \frac{|zx|^n}{n!} = |f(x)|e^{|z||x|}.$$

Nutzen wir nun, dass $x \mapsto e^{\lambda x} f(x)$ integrierbar für $\lambda = \pm|z|$, dann finden wir

$$|u_k(x)| \leqslant |f(x)|e^{-|z|x}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + |f(x)|e^{|z|x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Anwenden des Satzes der dominierten Konvergenz gibt

$$\int f(x)e^{zx}\,dx = \int \lim_{k\to\infty} u_k(x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty} \int u_k(x)\,dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \int (zx)^n f(x)\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int x^n f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

unter Ausnutzung der Linearität des Integrals.

Aufgabe 11.12. Lösung: Nach Voraussetzung definieren

$$u_n := f_n - g_n \qquad v_n := G_n - f_n$$

nicht-negative Folgen, die punktweise konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = f - g \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = G - f.$$

Wir wissen, dass $\int f_n\,d\mu \leqslant \int G_n\,d\mu \to \int G\,d\mu$; insbesondere folgt daraus

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu < \infty.$$

Analog erhalten wir $\liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu > -\infty$. Wir wenden zunächst das Lemma von Fatou auf die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an:

$$\int (G-f)\,d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} v_n\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int v_n\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(\int G_n\,d\mu - \int f_n\,d\mu \right).$$

Wegen $\int G\,d\mu = \lim_n \int G_n\,d\mu \in \mathbb{R}$ liefert das

$$\int (-f)\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (-f_n)\,d\mu,$$

also

$$\int f\,d\mu \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu$$

(da $\liminf_n(-a_n) = -\limsup_n a_n$). Analog erhalten wir für $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\int (f-g)\,d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} u_n\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int u_n\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n\,d\mu - \int g_n\,d\mu \right)$$

und somit

$$\int f\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Folglich gilt

$$-\infty < \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leqslant \int f\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu < \infty.$$

Aufgabe 11.13. Lösung: Die Ungleichung $\left|\int_A f\,d\mu\right| \leqslant \int_A |f|\,d\mu$ ergibt sich sofort aus der Dreiecksungleichung. Es genügt also, die zweite Ungleichung zu zeigen. Es sei $\epsilon > 0$.

Lösung 1: Es folgt direkt aus dem Sombrero-Lemma, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathcal{A})$ existiert mit $|f_n| \leqslant |f|$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (Korollar 7.12). Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir nun $\int |f_n - f|\,d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$; insbesondere können wir also $n \in \mathbb{N}$ wählen mit $\int |f_n - f|\,d\mu \leqslant \epsilon$. Da f_n beschränkt ist (das folgt direkt aus der Definition von Treppenfunktionen) gilt

$$\int_A |f_n|\,d\mu \leqslant \|f_n\|_\infty \cdot \mu(A) < \epsilon$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta := \epsilon/\|f_n\|_\infty$. Folglich sehen wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\int_A |f|\,d\mu \leqslant \int_A |f_n - f|\,d\mu + \int_A |f_n|\,d\mu \leqslant \int |f_n - f|\,d\mu + \int_A |f_n|\,d\mu \leqslant 2\epsilon$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$.

Lösung 2: Offenbar gilt

$$\int_A |f|\,d\mu = \int_{A\cap\{|f|\geqslant R\}} |f|\,d\mu + \int_{A\cap\{|f|<R\}} |f|\,d\mu \tag{$\star$}$$

Wir schätzen die Terme getrennt ab. Für den ersten Term auf der rechten Seite gilt nach dem Satz von Beppo-Levi

$$\int_{A\cap\{|f|\geqslant R\}} |f|\,d\mu \xrightarrow{R\to\infty} \int_{A\cap\{|f|=\infty\}} |f|\,d\mu.$$

Da nach Voraussetzung $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist $\mu(|f| = \infty) = 0$ (vgl. Beweis von Korollar 10.6) und damit gilt nach Satz 10.2,

$$\int_{A\cap\{|f|=\infty\}} |f|\,d\mu = 0.$$

Somit könnnen wir $R > 0$ wählen mit

$$\int_{A\cap\{|f|\geqslant R\}} |f|\,d\mu \leqslant \epsilon.$$

Für den zweiten Term in $(\star)$ sieht man leicht, dass

$$\int_{A\cap\{|f|<R\}} |f|\,d\mu \leqslant R \int_{A\cap\{|f|<R\}} 1\,d\mu \leqslant R\mu(A).$$

Für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) \leqslant \delta := \epsilon/R$ erhalten wir also

$$\int_A |f|\,d\mu = \int_{A\cap\{|f|\geqslant R\}} |f|\,d\mu + \int_{A\cap\{|f|<R\}} |f|\,d\mu \leqslant \epsilon + R\mu(A) \leqslant 2\epsilon.$$

■■

Aufgabe 11.14. Lösung:

(a) Das folgt sofort aus der Definition der Konvergenz in W-keit.

(b) Ohne Einschränkung können wir $\epsilon \leqslant 1$ annehmen, da $\{|u - u_n| \geqslant \epsilon\} \supset \{|u - u_n| \geqslant 1\}$ für $\epsilon \leqslant 1$. Wir haben mit der Markov-Ungleichung für alle $A \in \mathcal{A}_0$

$$\mu(\{|u - u_n| \geqslant \epsilon\} \cap A) = \mu(\{|u - u_n| \wedge 1 \geqslant \epsilon\} \cap A) \leqslant \int_A |u - u_n| \wedge 1 \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Umgekehrt gilt für $A \in \mathcal{A}_0$ und $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\int_A |u - u_n| \wedge 1 \, d\mu &= \int_{A \cap \{|u-u_n| \leqslant \delta\}} |u - u_n| \wedge 1 \, d\mu + \int_{A \cap \{|u-u_n| > \delta\}} |u - u_n| \wedge 1 \, d\mu \\ &\leqslant \delta\mu(A) + \mu(\{|u - u_n| > \delta\} \cap A) \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta\mu(A) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

(c) Wir nehmen $u = 0$ an, sonst könnten wir $u_n - u$ betrachten. Es seien $R, \epsilon > 0$. Dann gilt wegen $|u_n| \leqslant w$:

$$\begin{aligned}&\int |u_n| \, d\mu = \int |u_n| \wedge w \, d\mu \\ &= \int_{\{|u_n| < \epsilon\}} |u_n| \wedge w \, d\mu + \int_{\{|u_n| \geqslant \epsilon\} \cap \{w \geqslant R\}} |u_n| \wedge w \, d\mu + \int_{\{|u_n| \geqslant \epsilon\} \cap \{w < R\}} |u_n| \wedge w \, d\mu \\ &= \int_{\{|u_n| < \epsilon\}} |u_n| \wedge w \, d\mu + \int_{\{|u_n| \geqslant \epsilon\} \cap \{w \geqslant R\}} |u_n| \wedge w \, d\mu + \int_{\{|u_n| \geqslant \epsilon\} \cap \{\epsilon \leqslant w < R\}} |u_n| \wedge w \, d\mu \\ &\leqslant \int \epsilon \wedge w \, d\mu + \int_{\{w \geqslant R\}} w \, d\mu + R\mu(\{|u_n| \geqslant \epsilon\} \cap \{w \geqslant \epsilon\}) \xrightarrow[\epsilon\to 0,\ R\to\infty]{n\to\infty} 0 + 0 + 0.\end{aligned}$$

Nun bilden wir die Limiten $n \to \infty$ (Konvergenz in W-keit), $\epsilon \to 0$ (dom. Konv., Majorante w), $R \to \infty$ (dom. Konv. Majorante w).

■■

12 Parameter-Integrale

Aufgabe 12.1. Lösung:

(a) Damit die Integrale existieren, muss $|e^{-i\cdot\xi}| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ bzw. $|e^{-i\cdot\xi}|\cdot|u(\cdot)| \in \mathcal{L}^1(dx)$ gelten. Wegen $|e^{-i\cdot\xi}| = 1$ sind sinnvolle Bedingungen an die Existenz, dass μ ein endliches Maß ist (dann ist die Konstante 1 integrierbar) bzw. dass $u \in \mathcal{L}^1(dx)$ ist. Wir bekommen dann die Stetigkeit der Transformationen direkt aus dem Stetigkeitslemma für parametrisierte Integrale: Definiere

$$f(\xi,x) := \frac{1}{2\pi}e^{-i\,x\xi}, \qquad \xi \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Nach Voraussetzung ist $|f(x,\xi)| \leqslant (2\pi)^{-1} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\xi \mapsto f(\xi,x)$ ist stetig. Damit folgt die Stetigkeit der Abbildung

$$\xi \mapsto \int f(\xi,x)\mu(dx) = \widehat{\mu}(\xi)$$

aus Satz 12.1. Die Argumentation für $\hat{u}$ geht analog.

Hinreichende Bedingungen für die n-fache Differenzierbarkeit können wir aus dem Differenzierbarkeitslemma ableiten. Wegen

$$\frac{d}{d\xi}f(\xi,x) = \frac{(-ix)}{2\pi}e^{-i\,x\xi}$$

gilt

$$\left|\frac{d}{d\xi}f(\xi,x)\right| \leqslant \frac{|x|}{2\pi}.$$

Nach dem Differenzierbarkeitslemma existiert also $\frac{d}{d\xi}\hat{\mu}(\xi)$ falls $\int |x|\,\mu(dx) < \infty$. Iterieren wir diese Überlegung, so folgt, dass $\hat{\mu}$ n-mal differenzierbar ist, falls

$$\int |x|^n\,\mu(dx) < \infty.$$

Analog: $\hat{u}$ ist n-mal differenzierbar, falls $\int |x|^n\,|u(x)|\,dx < \infty$.

(b) »$\Leftarrow$«: Sei $\int x^2\,\mu(dx) < \infty$. Dann gilt

$$\left|\frac{d}{d\xi}(xe^{-ix\xi})\right| = |x|^2 \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Da wir aus a) wissen, dass

$$\hat{\mu}'(\xi) = -i\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xe^{-ix\xi}\,\mu(dx),$$

folgt mit einer nochmaligen Anwendung des Differenzierbarkeitslemmas, dass $\hat{\mu}$ zweimal differenzierbar ist und

$$\hat{\mu}''(\xi) = (-i)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-ix\xi} \, \mu(dx) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-ix\xi} \, \mu(dx).$$

»⇒«: Mit Hilfe von

$$\frac{1}{2} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2}$$

und mit dem Lemma von Fatou schließen wir, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} x^2 \, \mu(dx) = 2 \int_{\mathbb{R}} x^2 \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(2hx)}{(2hx)^2} \, \mu(dx) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(2hx)}{h^2} \, \mu(dx) \\
&\leqslant \frac{1}{2} \liminf_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(2hx)}{h^2} \, \mu(dx) \\
&= \frac{1}{2} \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int (1-\cos(2hx)) \, \mu(dx).
\end{aligned}$$

Beachte nun, dass

$$\begin{aligned}
\int (1-\cos(2hx)) \, \mu(dx) &= \int \left(1 - \frac{1}{2}(e^{2ihx} + e^{-2ihx})\right) \mu(dx) \\
&= 2\pi \left(\hat{\mu}(0) - \frac{1}{2}\hat{\mu}(2h) - \frac{1}{2}\hat{\mu}(-2h)\right).
\end{aligned}$$

Folglich,

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \, \mu(dx) \leqslant \pi \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \left(2\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(2h) - \hat{\mu}(-2h)\right).$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2h) - 2f(0) + f(-2h)}{4h^2}$$

für jede 2 mal differenzierbare Funktion f. Da $\hat{\mu}$ per Annahme zweimal differenzierbar ist, erhalten wir also

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \, \mu(dx) \leqslant -4\pi\hat{\mu}''(0) < \infty.$$

Anmerkung: Allgemeiner kann man zeigen, dass $\hat{\mu}$ genau dann $2n$ mal differenzierbar ist falls $\int |x|^{2n} \, \mu(dx) < \infty$ gilt. Für die Ableitungen ungerader Ordnung stimmt diese Charakterisierung nicht; beispielsweise ist die Bedingung aus b) nicht notwendig für die Differenzierbarkeit von $\hat{\mu}$.

■■

Aufgabe 12.2. Lösung: Es sei

$$V(x) := \int_{(0,x)} u(t) \, \mu(dt).$$

Die Stetigkeit von V in $x = x_0$ ist äquivalent zu $V(x_0-) = V(x_0+)$ mit

$$V(x_0-) := \lim_{x\uparrow x_0} V(x) \qquad V(x_0+) := \lim_{x\downarrow x_0} V(x).$$

(Beachte, dass auf Grund der Monotonie von V beide Grenzwerte existieren.) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \uparrow x_0$. Dann gilt $\mathbb{1}_{(0,x_n)} \uparrow \mathbb{1}_{(0,x_0)}$ und somit erhalten wir aus dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} V(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} V(x_n) = \int \mathbb{1}_{(0,x_0)} u(t)\,\mu(dt).$$

Folglich,

$$V(x_0-) = \int_{(0,x_0)} u(t)\,\mu(dt).$$

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dagegen eine Folge mit $x_n \downarrow x_0$, dann $\mathbb{1}_{(0,x_n)} \downarrow \mathbb{1}_{(0,x_0]}$. Es folgt wiederum aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass

$$V(x_0+) = \inf_{n\in\mathbb{N}} V(x_n) = \int_{(0,x_0]} u(t)\,\mu(dt).$$

Es gilt also $V(x_0-) = V(x_0+)$ genau dann, wenn

$$0 = V(x_0+) - V(x_0-) = \int_{\{x_0\}} u(t)\,\mu(dt).$$

Wegen $u > 0$ folgt die Behauptung (vgl. Satz 10.1).

■■

Aufgabe 12.3. Lösung:

(a) Es sei $t \in (-R,R)$ für $R > 0$. Da $|\phi(x)-t| \leqslant |\phi(x)| + |t| \leqslant |\phi(x)| + R \in \mathcal{L}^1([0,1])$ und die $t \mapsto |\phi(x)-t|$ stetig ist, folgt aus dem Stetigkeitslemma, Satz 12.1, dass die Abbildung

$$(-R,R) \ni t \mapsto f(t) = \int_{[0,1]} |\phi(x)-t|\,dx$$

stetig ist. Da $R > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

Alternativlösung: Aus der (umgekehrten) Dreiecksungleichung folgt

$$|f(t)-f(s)| \leqslant \int_{[0,1]} \big||\phi(x)-t| - |\phi(x)-s|\big|\,dx \leqslant \int_{[0,1]} |s-t|\,dx = |s-t|,$$

d.h. f ist sogar Lipschitz-stetig.

(b) »$\Leftarrow$«: Es sei $t \in \mathbb{R}$ mit $\lambda\{\phi = t\} = 0$ und $h \in \mathbb{R}$. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
\frac{f(t+h)-f(t)}{h} &= \int_{\phi\leqslant t-h} \frac{|\phi(x)-(t+h)| - |\phi(x)-t|}{h}\,dx \\
&\quad + \int_{t-h<\phi<t+h} \frac{|\phi(x)-(t+h)| - |\phi(x)-t|}{h}\,dx \\
&\quad + \int_{\phi\geqslant t+h} \frac{|\phi(x)-(t+h)| - |\phi(x)-t|}{h}\,dx \\
&=: I_1(h) + I_2(h) + I_3(h).
\end{aligned}$$

und behandeln die Integrale getrennt. Es gilt

$$I_1(h) = \int_{\phi\leqslant t-h} \frac{-(\phi(x)-(t+h)) + (\phi(x)-t)}{h}\,dx$$

$$= \int_{\phi \leqslant t-h} dx = \lambda(\phi \leqslant t-h) \xrightarrow{h\to 0} \lambda(\phi < t).$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} I_3(h) &= \int_{\phi \geqslant t-h} \frac{(\phi(x)-(t+h)-(\phi(x)-t)}{h}\,dx \\ &= \lambda(\phi \geqslant t+h) \xrightarrow{h\to 0} \lambda(\phi > t). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\lambda(t-h < \phi < t+h) \xrightarrow{h\to 0} \lambda(\phi = t) = 0$ erhalten wir aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$I_2(h) = \int_{t-h<\phi<t+h} \frac{|\phi(x)-(t+h)|-|\phi(x)-t|}{h}\,dx \xrightarrow{h\to 0} 0$$

(beachte, dass $\frac{||\phi(x)-(t+h)|-|\phi(x)-t||}{h} \leqslant 2$; umgekehrte Dreiecksungleichung!). Kombinieren wir alle Resultate, so erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lambda(\phi > t) + \lambda(\phi < t).$$

»⇒«: Wir verwenden die Notation von »⇐«. Ist f in $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar, folgt wie im ersten Teil des Beweises, dass

$$\lim_{h\to 0} I_2(h) = f'(t) - \lim_{h\to 0} I_1(h) - \lim_{h\to 0} I_3(h)$$

existiert. Wir zerlegen I_2 nochmals:

$$\begin{aligned} I_2(h) &= \int_{\{t-h<\phi<t+h\}\setminus\{\phi=t\}} \frac{|\phi(x)-(t+h)|-|\phi(x)-t|}{h}\,dx \\ &\quad + \int_{\{\phi=t\}} \frac{|\phi(x)-(t+h)|-|\phi(x)-t|}{h}\,dx \\ &=: I_2^1(h) + I_2^2(h) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$I_2^2(h) = \frac{|h|}{h} \int_{\{\phi=t\}} 1\,dx = \frac{|h|}{h} \lambda(\phi = t)$$

und aus dominierter Konvergenz folgt

$$\lim_{h\to 0} I_2^1(h) = 0.$$

Folglich kann $\lim_{h\to 0} I_2(h)$ nur existieren, falls

$$\lim_{h\to 0} I_2^2(h) = \lambda(\phi = t) \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\lambda(\phi = t) = 0$.

■■

Aufgabe 12.4. Lösung:

(a) Die Abbildung $t \mapsto u(t,x) := x^{-2}\sin^2(x)e^{-tx}$ ist auf $[0,\infty)$ stetig und auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Gemäß dem Stetigkeits- und Differenzierbarkeitslemma, Satz 12.1 und Satz 12.2, genügt es daher entsprechende Majoranten für die Ableitungen zu finden. Es sei $t \geqslant 0$. Aus der elementaren Abschätzung $\frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ und $e^{-tx} \leqslant 1$ folgt

$$|u(t,x)| \leqslant \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x) =: w(x).$$

Wegen $w \in \mathcal{L}^1([0,\infty))$ (vgl. Beispiel 12.4) folgt damit aus dem Stetigkeitslemma die Stetigkeit von f. Nun sei $t \in (r,\infty)$ für $r > 0$. Dann

$$\begin{aligned}
|\partial_t u(t,x)| &= \left|\frac{\sin^2(x)}{x^2}(-x)e^{-tx}\right| \\
&\leqslant \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + xe^{-tx}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x) \in \mathcal{L}^1([0,\infty)) \\
|\partial_t^2 u(t,x)| &= \left|\frac{\sin^2(x)}{x^2}(-x)^2e^{-tx}\right| \\
&\leqslant \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + x^2e^{-tx}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x) \in \mathcal{L}^1([0,\infty)).
\end{aligned}$$

Somit folgt aus dem Differenzierbarkeitslemma, dass f zweimal differenzierbar ist und

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}e^{-tx}\,dx \\
f''(t) &= \int_0^\infty \sin^2(x)e^{-tx}\,dx.
\end{aligned}$$

(b) Um f'' auszurechnen, benutzen wir eine Regel, die in Kapitel 13 bewiesen wird: Ist eine Funktion Riemann-Integrierbar, so ist sie auch Lebesgue-integrierbar und Riemann- und Lebsgue-Integral stimmen überein (Satz 13.3).

Aus $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(1-e^{i\,2x})$ folgt zunächst

$$f''(t) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_0^\infty (1-e^{i\,2x})e^{-tx}\,dx\right),$$

vgl. Aufgabe 9.2. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir

$$\int_0^\infty (1-e^{i\,2x})e^{-tx}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R (1-e^{i\,2x})e^{-tx}\,dx.$$

Da $x \mapsto (1-e^{i\,2x})e^{-tx}$ Riemann-integrierbar ist, dürfen wir wie gewohnt rechnen:

$$\int_0^\infty (1-e^{i\,2x})e^{-tx}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{-t}e^{-tx}\right]_{x=0}^R - \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2i-t}e^{x(2i-t)}\right]_{x=0}^R = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-2i}.$$

Somit

$$f''(t) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+4}\right) = \frac{2}{t(t^2+4)}.$$

Die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} f(t)$ und $\lim_{t\to\infty} f'(t)$ können wir leicht mit dem Satz von der dominierten Konvergenz berechnen (die Existenz der entsprechenden Majoranten haben wir in (a) gezeigt):

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} f(t) &= \int_0^\infty \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin^2(x)}{x^2}e^{-tx}\right)dx = 0, \\
\lim_{t\to\infty} f'(t) &= -\int_0^\infty \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin^2(x)}{x}e^{-tx}\right)dx = 0.
\end{aligned}$$

(c) Wir finden zunächst eine einfachere Formel für f': Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung gilt

$$f'(R) - f'(t) = \int_t^R f''(s)\,ds.$$

Für $R \to \infty$ folgt mit (b)

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\lim_{R\to\infty} \int_t^R f''(s)\,ds \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left[\log s - \frac{1}{2}\log(s^2+4)\right]_{s=t}^R \\ &= \frac{1}{2}\Big(\log t - \frac{1}{2}\log(t^2+4)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}. \end{aligned}$$

Schließlich

$$f(t) = -\lim_{R\to\infty}\int_t^R f'(s)\,ds = -\frac{1}{2}\int_t^\infty \log\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\,ds.$$

(Auch in dieser Teilaufgabe haben wir wieder verwendet, dass wir für Riemann-integrierbare Funktionen die Integrale mit den gewohnten Rechenregeln ausrechnen dürfen.)

■■

Aufgabe 12.5. Lösung:

(a) Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Wegen $\operatorname{supp}\phi \subset [-M,M]$ gilt

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx = \int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(x)}{x}\,dx = \int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\,dx + \int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(0)}{x}\,dx.$$

Wir beachten dabei, dass die Funktion $x \mapsto 1/x$ auf $|x| > \epsilon$ stetig und daher messbar ist. Folglich existiert das Integral

$$\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{dx}{|x|} \leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} dx \leqslant \frac{2M}{\epsilon}.$$

Weiter gilt aus Symmetriegründen

$$\int_{\epsilon<|x|<M} \frac{dx}{x} = \int_{[-M,-\epsilon)} \frac{dx}{x} + \int_{(\epsilon,M]} \frac{dx}{x} = -\int_{(\epsilon,M]} \frac{dx}{x} + \int_{(\epsilon,M]} \frac{dx}{x} = 0$$

und daher ist

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx = \int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\,dx.$$

Da $\phi \in C^1$ ist (und kompakten Träger hat), gilt

$$|\phi(x) - \phi(0)| \leqslant \sup_y |\phi'(y)| \cdot |x|,$$

d.h. der Integrand $x \mapsto \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}$ kann als meßbare (sogar stetige) Funktion auf $[-M, M]$ verstanden werden (indem wir ggf. bei $x = 0$ mit $\phi'(0)$ fortsetzen!), d.h.

$$\int_{0<|x|\leqslant M} \left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \right| dx \leqslant 2M \sup_y \frac{|\phi(y) - \phi(0)|}{|x|} \leqslant 2M \sup_y |\phi'(y)| < \infty.$$

Mit dominierter Konvergenz sehen wird dann, dass der Grenzwert $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx$ existiert und den Wert

$$\int_{|x|>0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}\, dx$$

hat.

Bemerkung. Man schreibt oft

$$\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \phi \right\rangle := \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|>0} \frac{\phi(x)}{x}\, dx$$

und nennt $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ die Hauptwertdistribution. Unsere Rechnung zeigt, dass

$$\left| \left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \phi \right\rangle \right| \leqslant \mathrm{Leb}(\operatorname{supp} \phi) \|\phi'\|_\infty$$

gilt, d.h. $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ ist ein beschränktes lineares (und damit stetiges) Funktional auf $C_c^\infty(\mathbb{R})$ (und sogar $C_c^1(\mathbb{R})$).

(b) Wie in Teil (a) müssen wir die Singularität von $\phi(x)/x^2$ an der Stelle $x = 0$ so ausgleichen, dass wir einen integrierbaren Ausdruck erhalten. In Teil (a) haben wir eine »clevere Null« hinzugefügt, hier müssen wir etwas mehr hinzufügen. Die Idee ist wieder eine Taylor-Entwicklung – nun von der Ordnung 1:

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(x)}{x^2}\, dx &= \int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(x) - \phi(0) - \phi'(0)x}{x^2}\, dx \\ &\quad + \int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(0)}{x^2}\, dx + \underbrace{\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi'(0)}{x}\, dx}_{=0 \text{ wie in (a)}}.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun

$$\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(0)}{x^2}\, dx = \phi(0) \int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{dx}{x^2} = 2\phi(0) \int_{\epsilon<x\leqslant M} \frac{dx}{x^2},$$

wobei wir die Symmetrie verwenden. Im Vorgriff auf das nächste Kapitel gilt nun (wir dürfen Riemannsch rechnen, weil der Integrand stetig und beschränkt ist)

$$\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(0)}{x^2}\, dx = 2\phi(0) \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{M} \right)$$

Damit folgt

$$\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(x)}{x^2}\, dx - 2\frac{\phi(0)}{\epsilon} = \int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(x) - \phi(0) - \phi'(0)x}{x^2}\, dx - 2\frac{\phi(0)}{M}.$$

Die linke Seite hängt nicht von M ab, da $\operatorname{supp}\phi \subset [-M, M]$. Daher können wir den Grenzwert $M \to \infty$ bilden und erhalten

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\phi(0)}{\epsilon} = \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x) - \phi(0) - \phi'(0)x}{x^2}\,dx.$$

Nach Vorausssetzung ist der rechts auftretende Integrand stetig (fortsetzbar nach $x = 0$ durch $\frac{1}{2}\phi''(0)$) und beschränkt durch $\frac{1}{2}\sup_y |\phi''(y)|$. Daher existiert der Grenzwert $\epsilon \to 0$ (wir wenden dominierte Konvergenz an) und es folgt schließlich

$$\mathrm{pf}\int \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx = \int_{|x|>0} \frac{\phi(x) - \phi(0) - \phi'(0)x}{x^2}\,dx.$$

Wie schon in a) definiert dann $\mathrm{pf}\frac{1}{x^2}$ eine Distribution auf $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(c) Das ist im Prinzip dieselbe Rechnung wie in (b), wobei wir an zwei Stellen etwas aufpassen müssen, da sich die Korrektur-Integrale anders verhalten (sie sind einseitig, das zu Grunde liegende Maß ist ja nun $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,dx$): Es ist

$$\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(0)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)}{x^2}\,dx = \phi(0)\int_{\epsilon<x\leqslant M} \frac{dx}{x^2} = \phi(0)\left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{M}\right),$$

was die Korrektur »$-\frac{\phi(0)}{\epsilon}$« erklärte – in b) hatten wir noch den Faktor 2, der durch die Symmetrie zustande kam.

Und es gilt auch

$$\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi'(0)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)x}{x^2}\,dx = \int_{\epsilon<x\leqslant M} \frac{\phi'(0)}{x}\,dx = \phi'(0)\left(\log M - \log\epsilon\right),$$

d.h. wir haben einen weiteren Korrekturterm »$+\phi'(0)\log\epsilon$«, da sich der $\phi'(0)$ nicht mehr aus Symmetriegründen weghebt.

Mithin gilt

$$\mathrm{pf}\int \frac{\phi(x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}}{x^2}\,dx = \int_{(0,M]} \frac{\phi(x) - \phi(0) - \phi'(0)x}{x^2}\,dx + \phi'(0)\log M.$$

Beachte, dass wir hier den Grenzwert $M \to \infty$ nicht machen können (was aber für die Existenz des Integrals nicht wesentlich ist, der Grenzwert $\epsilon \to 0$ ist der wichtige Grenzwert.

Die entsprechende (einseitige) Distribution wird oft als $\mathrm{pf}\frac{H}{x^2}$ bezeichnet, wobei $H(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}$ die sog. Heaviside-Funktion ist.

(d) Wir schreiben $f(\epsilon) := \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(-1)^{k-n}-1}{\epsilon^{k-n}} \frac{\partial^{n-1}\phi(0)}{(n-1)!}$. Dann gilt für $k = 3, 4, \dots$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\epsilon<|x|\leqslant M} \frac{\phi(x)}{x^k}\,dx - f(\epsilon)\right) = \int_{|x|>0} \frac{\phi(x) - \phi(0) - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n!}\partial^n\phi(0)x^n}{x^k}\,dx.$$

■■

13 Riemann vs. Lebesgue

Aufgabe 13.1. Lösung: Wir folgen dem Hinweis: Da $e^{-tx} \geqslant 0$ folgt aus dem Satz von Beppo Levi

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^n e^{-xt}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-xt}\,dx.$$

Weiterhin ist $x \mapsto e^{-tx}$ stetig (also insbesondere messbar und Riemann-integrierbar auf kompakten Intervallen), so dass wir dank Theorem 13.2 wie gewohnt mit dem Riemann-Integral rechnen dürfen:

$$\int_0^n e^{-xt}\,dx = \left[\frac{e^{-tx}}{-t}\right]_{x=0}^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{t}.$$

Folglich gilt $e^{-tx} \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$ und $\int_0^\infty e^{-xt}dx = \frac{1}{t}$. Wir wollen nun das Differenzierbarkeitslemma, Satz 12.2, anwenden. Dazu definiere $u(t,x) := e^{-tx}$. Dann ist

$$|\partial_t u(t,x)| = |x|e^{-tx} \leqslant |x|e^{-ax} \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$$

für alle $t \in (a,\infty)$, $a > 0$ (vgl. Beispiel 12.4). Aus dem Differenzierbarkeitslemma folgt daher, dass

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-tx}\,dx = \int_0^\infty (-x)e^{-tx}\,dx$$

für alle $t \in (a,\infty)$. Da $a > 0$ beliebig ist, folgt die Differenzierbarkeit für alle $t > 0$. Indem wir diese Überlegung iterieren, erhalten wir dass wir Ableitungen beliebiger Ordnung mit dem Integral vertauschen dürfen. Damit

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}\left(\int_0^\infty e^{-xt}\,dx\right) &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{t}\right) \\ \Rightarrow \left(\int_0^\infty (-x)^n e^{-xt}\,dx\right) &= \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}. \end{aligned}$$

Für $t = 1$ ergibt sich gerade die Behauptung.

■■

Aufgabe 13.2. Lösung:

(a) Es gilt $\int_{(0,1)}(x\ln x)^k\;d\lambda = \int_{(0,1]}(x\ln x)^k\;d\lambda$ da der Integrand bei $x = 1$ definiert ist und $\lambda(1) = 0$. Nun sei

$$u_k(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ (x\ln x)^k, & x > 0, \end{cases}.$$

u_k ist stetig (mit L'Hospital) auf $[0,1]$ und somit u_k Riemann- und Lebesgue-integrierbar auf $[0,1]$. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt daher

$$\begin{aligned}\int_{(0,1]} (x\ln x)^k \, d\lambda &= \int \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[\frac{1}{n},1)}(x\ln x)^k \, d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[\frac{1}{n},1]} (x\ln x)^k \, d\lambda.\end{aligned}$$

Dieses Lebesgue-Integral stimmt mit dem Riemann-Integral überein (Satz 13.2), also erhalten wir per Substitution ($x = e^{-y\frac{1}{k+1}}, dx = -\frac{1}{k+1}e^{-y\frac{1}{k+1}}dy$):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{[\frac{1}{n},1]} (x\ln x)^k \, dx &= \lim_{n\to\infty} -\int_0^{(k+1)\ln n} e^{-\frac{k}{k+1}y}\frac{(-y)^k}{(k+1)^k}(-1)\frac{1}{k+1}e^{-y\frac{1}{k+1}} \, dy \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\int_0^{(k+1)\ln n} e^{-y}y^{k+1-1} \, dy.\end{aligned}$$

Da $e^{-y}y^k\mathbb{1}_{[0,\infty)} \in \mathcal{L}^1[0,\infty)$ folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\int_0^{(k+1)\ln n} e^{-y}y^{k+1-1} \, dy = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\Gamma(k+1).$$

(b) Da $[0,1] \ni x \mapsto x\ln x$ stetig ist, gilt

$$\left|\sum_{k=0}^m \frac{(-x\ln x)^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{|x\ln x|^k}{k!} = e^{|x\ln x|} \leqslant c \in \mathcal{L}^1(0,1)$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Aus (a) und dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} e^{-x\ln x} \, \lambda(dx) &= \int_{(0,1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-x\ln x)^k}{k!} \, \lambda(dx) \\ &= \int_{(0,1)} \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m \frac{(-x\ln x)^k}{k!} \, \lambda(dx) \\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m \int_{(0,1)} \frac{(-x\ln x)^k}{k!} \, \lambda(dx) \\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \underbrace{\frac{\Gamma(k+1)}{k!}}_{1} \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^k}\end{aligned}$$

Aufgabe 13.3. Lösung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x^{\alpha n}}{n!} \leqslant e^{x^\alpha}$$

und somit

$$e^{-x^\alpha} \leqslant n!\, x^{-\alpha n}.$$

Weiterhin gilt $x^{-\alpha n} \in \mathcal{L}^1(1,\infty)$ für $\alpha n > 1$. Wählen wir $n > \frac{1}{\alpha}$, dann erhalten wir

$$0 \leqslant \mathbb{1}_{[0,\infty]} e^{-x^\alpha} \leqslant \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x) n! x^{-\alpha n} \in \mathcal{L}^1[0,\infty).$$

Das zeigt, dass $[0,\infty) \ni x \mapsto e^{-x^\alpha}$ integrierbar ist.

■■

Aufgabe 13.4. Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\int_{(1,\infty)} \frac{|\sin x|}{x}\,\lambda(dx) &\geq \int_{\{x\in(1,\infty);|\sin(x)|\geq\frac{1}{2}\}} \frac{|\sin x|}{x}\,\lambda(dx)\\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]} \frac{1}{2x}\,\lambda(dx)\\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{5\pi}{6}+k\pi}\lambda\left(\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right]\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5+6k} = \infty.
\end{aligned}$$

Das zeigt, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. (f ist jedoch uneigentlich Riemann-integrierbar, vgl. Beispiel 16.5.)

(b) Aus $|\sin(x)| \leqslant 1$ folgt

$$\left|\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right| = \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2} \quad \text{für alle } x \geqslant 1.$$

Es genügt daher, die Integrierbarkeit von $\frac{1}{x^2}$ zu zeigen. Das sieht man so:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,n)}(x)\,dx && \text{Beppo Levi}\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{[1,n)} \frac{1}{x^2}\,dx && \text{übliche Kurzschreibweise}\\
&= \lim_{n\to\infty}(R)\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx && \text{Riemann-}\int_1^n \text{ existiert}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-\tfrac{1}{x}\right]_1^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1-\tfrac{1}{n}\right] = 1 < \infty.
\end{aligned}$$

(c) Genau wie in (b) sieht man $\left|\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$, d.h. es genügt zu zeigen, dass $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1((0,1))$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{(0,1]}(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{(1/n,1]}(x)\,dx && \text{Beppo Levi}\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{(1/n,1]} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx && \text{übliche Kurzschreibweise}\\
&= \lim_{n\to\infty}(R)\int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx && \text{Riemann-}\int \text{ auf } (1/n,1] \text{ existiert}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_{1/n}^1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left[2-2\sqrt{\tfrac{1}{n}}\right] \\
&= 2 < \infty.
\end{aligned}
$$

(d) Wendet man den Mittelwertsatz auf $f(x) = \sin x$ an, so sieht man leicht, dass

$$|\sin(x)| \leqslant |x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist $\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x} \leqslant \frac{x}{x} = 1$. Da $[0,1] \ni x \mapsto 1$ offensichtlich Lesbgue-integrierbar ist, folgt aus dieser Abschätzung, dass auch $[0,1] \ni x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ Lebesgue-integrierbar ist.

Alternativlösung: Aus dem Satz von Bernoulli-Hôpital folgt sofort, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

stetig in $x = 0$ ist. Da f offensichtlich auch für alle $x \neq 0$ stetig ist, ist f auf $\mathbb{R}$ stetig (also insbesondere auch messbar). Nach dem Satz vom Maximum gilt daher

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| < \infty$$

und da Konstanten über $[0,1]$ integrierbar sind, folgt damit, dass $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$.

(e) Aus

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\mathbb{1}_{(0,1]}(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int \frac{1}{x}\mathbb{1}_{(1/n,1]}(x)\,dx && \text{Beppo Levi} \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{(1/n,1]} \frac{1}{x}\,dx && \text{übliche Kurzschreibweise} \\
&= \lim_{n\to\infty}(R)\int_{1/n}^{1} \frac{1}{x}\,dx && \text{Riemann-}\int \text{ auf } (1/n,1] \text{ existiert} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\log x\right]_{1/n}^{1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\log(1) - \log\tfrac{1}{n}\right] \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

folgt, dass $x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $(0,1)$ nicht Lebesbue-integrierbar ist.

(f) Aus dem Satz von Bernoulli-Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 0} k(x) = a \lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)}{e^x} = a,$$

d.h.

$$\tilde{k}(x) := \begin{cases} k(x), & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

definiert eine stetige Fortsetzung von k auf $[0,\infty)$. Aus dem Satz von Maximum erhalten wir daher

$$\sup_{x\in[0,1]} |k(x)| \leqslant C < \infty.$$

Für $x \geqslant 1$ folgt aus der elementaren Abschätzung $e^x \geqslant 1 + x^2/2$, $x \geqslant 0$, dass

$$\left|\frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\right| \leqslant \frac{1}{e^x - 1} \leqslant \frac{1}{x^2/2} = \frac{2}{x^2}.$$

Folglich ist

$$|k(x)| \leqslant C\mathbb{1}_{(0,1]}(x) + \frac{2}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x).$$

Da Konstanten auf $[0,1]$ integrierbar sind und die Funktion $\frac{1}{x^2}$ auf $[1,\infty)$ integrierbar ist (siehe Beweis von Teil (b)), zeigt das $k \in \mathcal{L}^1((0,\infty))$.

Auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ sind alle Funktionen stetig, daher beschränkt und somit Lesbesgue-integrierbar.

■■

Aufgabe 13.5. Lösung: Mit Hilfe der geometrischen Reihe sehen wir für $x > 0$, dass

$$\frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \sin(ax). \tag{$\star$}$$

Aus der elementaren Ungleichung $|\sin y| \leqslant |y|$ ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\infty |e^{-nx} \sin(ax)|\, dx \leqslant a \int_0^\infty xe^{-nx}\, dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-nx}\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_0^k xe^{-nx}\, dx && \text{Beppo Levi}\\
&= \lim_{k\to\infty} R - \int_0^k xe^{-nx}\, dx && \text{Riemann-}\int \text{ existiert auf } [0,n]\\
&= \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{nx+1}{n^2} e^{-nx}\right]_{x=0}^k\\
&= \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Mithin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty |e^{-nx} \sin(ax)|\, dx < \infty.$$

Somit können wir die Reihe $(\star)$ gliedweise integrieren und die Behauptung folgt dann aus

$$\int_0^\infty e^{-nx} \sin(ax)\, dx = \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-x(n-ia)}\, dx = \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

■■

Aufgabe 13.6. Lösung: Gemäß der binomischen Formel gilt $(1+x^2)^n \geqslant 1+nx^2$; daraus folgt insbesondere

$$\left|\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\right| \leqslant 1.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} = 0 \quad \text{für alle } x \in (0,1)$$

(exponentielles Wachstum ist stärker als polynomielles Wachstum) erhalten wir aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\,dx = 0.$$

■■

Aufgabe 13.7. Lösung:

(a) Zunächst zeigen wir, dass f wohldefiniert ist, d.h. dass das angegebene Integral existiert. Dazu erinnern wir uns an die folgenden Abschätzungen:

$$|\arctan(y)| \leqslant |y| \qquad |\arctan(y)| \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad y \in \mathbb{R},$$

(die erste Abschätzung folgt aus dem Mittelwertsatz, die zweite aus der Definition von arctan.) Weiterhin ist

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \geqslant \frac{1}{2}(e^x - 1) \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2}x^2$$

für alle $x \geqslant 1$. Folglich gilt für $u(t,x) := \arctan\left(\frac{t}{\sinh x}\right)$

$$\begin{aligned}|u(t,x)| &\leqslant \frac{\pi}{2}\mathbb{1}_{(0,1)}(x) + \left|\frac{t}{\sinh x}\right|\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)\\ &\leqslant \frac{\pi}{2}\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x) \in \mathcal{L}^1((0,\infty)).\end{aligned}$$

Das zeigt, dass das Integral $f(t) = \int_{(0,\infty)} u(t,x)\,dx$ existiert. Um Differenzierbarkeit von f zu zeigen, genügt es nach Satz 12.2 entsprechende Majoranten für die Ableitung zu finden. Dazu sei $R > 0$ und $t \in (R^{-1}, R)$. Gemäß der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sinh x}\right)^2}\frac{1}{\sinh x}\\ &= \frac{1}{\frac{t^2}{\sinh x} + \sinh x}.\end{aligned}$$

Da die Funktion $x \mapsto \frac{1}{R^{-2}+\sinh x}$ stetig ist, existiert nach dem Satz vom Maximum eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\sup_{x\in[0,1]}\frac{1}{R^{-2}+\sinh x} \leqslant C_1.$$

Aus $0 \leqslant \sinh x \leqslant 1$ für $x \in [0,1]$ folgt daher

$$|\partial_t u(t,x)| \leqslant \frac{1}{\frac{R^{-2}}{\sinh x} + \sinh x} \leqslant \frac{1}{R^{-2}+\sinh x} \leqslant C_1$$

für alle $x \in [0,1]$. Analog: Für $x > 1$ beobachten wir dagegen

$$|\partial_t u(t,x)| \geqslant \frac{1}{\sinh x} = 2\frac{1}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^x} \underbrace{\frac{1}{1-e^{-2x}}}_{\leqslant C_2 < \infty} \in \mathcal{L}^1((1,\infty)).$$

Folglich,

$$|\partial_t u(t,x)| \leqslant C_1 \mathbb{1}_{(0,1]}(x) + 2C_2 \frac{1}{e^x} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x) \in \mathcal{L}^1((0,\infty)).$$

Wenden wir das Differenzierbarkeitslemma, Satz 12.2, an, so erhalten wir, dass f auf dem Intervall (R^{-1}, R) differenzierbar ist und

$$f'(t) = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\frac{t^2}{\sinh x} + \sinh x}\, dx \quad \text{für alle } t \in (R^{-1}, R).$$

Da $R > 0$ beliebig ist, ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Dass der Grenzwert $\lim_{t \downarrow 0} f'(t)$ nicht existiert, folgt sofort aus der geschlossenen Formel für f' in Teil (b).

(b) Zunächst bemerken wir, dass $f(0) = 0$. Um eine geschlossene Formel für f' zu finden, substituieren wir $u = \cosh x$ und erhalten unter Verwendung der Identität $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_{(1,\infty)} \frac{1}{\frac{t^2}{\sqrt{u^2-1}} + \sqrt{u^2-1}} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\, du \\ &= \int_{(1,\infty)} \frac{1}{t^2 - 1 + u^2}\, du. \end{aligned}$$

(Beachte, dass $x \mapsto \frac{1}{\frac{t^2}{\sinh x} + \sinh x}$ stetig und daher Riemann-integrierbar ist; da wir in (a) bereits die Existenz des Lesbegue-Integrals nachgewiesen haben, dürfen wir daher nach Satz 13.2 wie mit Riemann-Integralen rechnen.) Wir betrachten nun zwei Fälle getrennt:

- $t > 1$: Dann ist $t^2 - 1 > 0$ und somit

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{t^2-1} \int_{(1,\infty)} \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{t^2-1}}\right)^2}\, du \\ &= \frac{1}{t^2-1} \left[\sqrt{t^2-1} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{t^2-1}}\right)\right]_{u=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \arctan\left(\sqrt{t^2-1}\right). \end{aligned}$$

- $t < 1$: Dann ist $C := \sqrt{1-t^2}$ wohldefiniert und somit

$$u^2 + t^2 - 1 = u^2 - C^2 = (u+C)(u-c).$$

Führen wir eine Partialbruchzerlegung durch, so erhalten wir

$$\frac{1}{u^2 - C^2} = \frac{1}{2C}\frac{1}{u+C} - \frac{1}{2C}\frac{1}{u-C}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_{(1,\infty)} \frac{1}{u^2+t^2-1}\,du &= \int_{(1,\infty)} \frac{u^2-C^2}{}du\\ &= \frac{1}{2C}\lim_{R\to\infty}\left(\int_1^R \frac{1}{u+C}\,du - \int_1^R \frac{1}{u-C}\,du\right)\\ &= \frac{1}{2C}\lim_{R\to\infty}\left(\ln\left(\frac{1+C}{1-C}\right)+\ln\left(\frac{R+C}{R-C}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2C}\ln\left(\frac{1+C}{1-C}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{1-\sqrt{1-t^2}}\right).\end{aligned}$$

Aus dem ersten Teil unserer Überlegungen folgt insbesondere

$$\int_1^\infty f'(t)\,dt = \infty.$$

Wegen $f(t) = f(1) + \int_1^t f'(s)\,ds$, $t \geqslant 1$, beweist das $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$.

■■

Aufgabe 13.8. Lösung: Es sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Da jede Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar ist, definiert $u_n(x) := \mathbb{1}_{\{q_1,\dots,q_n\}}(x)$ eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen. Andererseits ist

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \lim_{n\to\infty} u_n$$

nicht Riemann-integrierbar (siehe Beispiel in der Einleitung von Kapitel 13).

■■

Aufgabe 13.9. Lösung: Da u eine messbare nicht-negative Funktion ist folgt aus Beppo Levi, dass

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} u(x)\,\lambda(dx) &= \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_{[j^{-1},j]} u(x)\,\lambda(dx)\\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{[j^{-1},j]} u(x)\,\lambda(dx).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $u|_{[j^{-1},j]}$ Riemann-integrierbar und gemäß Satz 13.2 stimmen das Riemann- und Lebesgue-Integral überein. Aus der uneigentlichen Riemann-Integrierbarkeit sehen wir also, dass der Limit

$$\lim_{j\to\infty} \int_{[j^{-1},j]} u(x)\,\lambda(dx) = \lim_{j\to\infty} (\mathrm{R}) \int_{j^{-1}}^{j} u(x)\,dx$$

existiert und somit folgt die Behauptung.

■■

Aufgabe 13.10. Lösung: Da $x \mapsto \sin(x^2)$ stetig ist, ist die Abbildung auf jedem beschränkten Intervall Lebesgue-integrierbar. Mit Hilfe der Substitution $y = x^2$ sehen wir

$$\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} |\sin(x^2)|\, dx = \int_a^b \frac{|\sin(y)|}{2\sqrt{y}}\, dy$$

für alle $0 \leqslant a < b$. Für $a := a_k := k\pi$, $b := ak + 1 = (k+1)\pi$ folgt aus dieser Identität auf Grund der Periodizität von sin, dass die Folge

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)|\, dx$$

monoton fallend in k ist und gegen 0 konvergiert. Da $\sin(x^2)$ auf dem Intervall $[\sqrt{a_k}, \sqrt{a_{k+1}}]$ entweder positiv *oder* negativ ist (je nachdem ob k gerade oder ungerade ist) und die Vorzeichen immer alternieren, erhalten wir aus dem Leibniz-Kriterium, dass die Reihe

$$\sum_{k \geqslant 0} \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2)\, dx$$

konvergiert. Somit existiert das uneigentliche Riemann-Integral. Die Argumentation für $x \mapsto \cos(x^2)$ ist analog; alternativ kann man benutzen, dass $\sin(x^2) = \cos(x^2 - \frac{\pi}{2})$.

Die Funktionen sind jedoch *nicht* Lebesgue-integrierbar: Aus $\sin(x^2) = \cos(x^2 - \frac{\pi}{2})$ folgt, dass die Integrale $\int_{(0,\infty)} \sin(x^2)\, dx$ und $\int_{(0,\infty)} \cos(x^2)\, dx$ entweder beide existieren oder keins von beiden. Falls beide Integrale existieren würden, dann würde aus $\sin^2(x^2) + \cos^2(x^2) = 1$ und $|\sin|, |\cos| \leqslant 1$ auch folgen, dass

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} 1\, dx &= \int_{(0,\infty)} (\sin^2(x^2) + \cos^2(x^2))\, dx \\ &\leqslant \int_{(0,\infty)} |\sin(x^2)|\, dx + \int_{(0,\infty)} |\cos(x^2)|\, dx < \infty.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist dies ein Widerspruch.

■■

Aufgabe 13.11. Lösung: Zunächst erinnern wir uns an den Mittelwertsatz für Riemann-Integrale:

Es sei $u \geqslant 0$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und $f \in C[a, b]$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b u(t) f(t)\, dt = f(\xi) \int_a^b u(t)\, dt. \tag{$\star$}$$

Die Aussage kann man zum Beispiel so beweisen: Wegen $u \geqslant 0$ ist

$$\inf_{t \in [a,]} f(t) \int_a^b u(t)\, dt \leqslant \int_a^b u(t) f(t)\, dt \leqslant \sup_{t \in [a,b]} f(t) \int_a^b u(t)\, dt.$$

Da $[a, b] \ni t \mapsto f(t)$ nach Voraussetzung stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $\xi \in (a, b)$ existiert, so dass $(\star)$ gilt.

Es sei nun $r \leqslant R$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \leqslant b$. Dann

$$\begin{aligned}\int_r^R \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx &= \int_r^R \frac{f(bx)}{x}\,dx - \int_r^R \frac{f(ax)}{x}\,dx\\ &= \int_{br}^{bR} \frac{f(y)}{y}\,dy - \int_{ar}^{aR} \frac{f(y)}{y}\,dy\\ &= \int_{aR}^{bR} \frac{f(y)}{y}\,dy - \int_{ar}^{br} \frac{f(y)}{y}\,dy.\end{aligned}$$

Aus dem Mittelwertsatz für Riemann-Integrale folgt somit, dass $\xi_r \in (ar, br)$ und $\xi_R \in (aR, bR)$ existieren mit

$$\begin{aligned}\int_r^R \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx &= f(\xi_R)\int_{aR}^{bR} \frac{1}{y}\,dy - f(\xi_r)\int_{ar}^{br} \frac{1}{y}\,dy\\ &= f(\xi_R)\ln\frac{b}{a} - f(\xi_r)\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Für $r \to 0$ (bzw. $R \to \infty$) folgt, dass $f(\xi_r) \to m$ (bzw. $f(\xi_R) \to M$); folglich,

$$\int_r^R \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx \xrightarrow[r\to 0]{R\to\infty} (M-m)\ln\frac{b}{a}.$$

■■

Aufgabe 13.12. Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\int_{(1,\infty)} \frac{|\sin x|}{x}\,\lambda(dx) &\geq \int_{\{x\in(1,\infty);|\sin(x)|\geq\frac{1}{2}\}} \frac{|\sin x|}{x}\,\lambda(dx)\\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi]} \frac{1}{2x}\,\lambda(dx)\\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{5\pi}{6}+k\pi}\lambda\left(\left[\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{5\pi}{6}+k\pi\right]\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5+6k} = \infty.\end{aligned}$$

Das zeigt, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Sei $R > 1$. Mit partieller Integration folgt

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos R}{R} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Da die Funktion $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ auf $[1, R]$ stetig, also Riemann-integrierbar, ist, wissen wir aus Theorem 10.2, dass das Riemann-Integral $\int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ gleich dem Lebesgue-Integral $\int_{(1,R)} \frac{\cos x}{x^2}\,\lambda(dx)$ ist. Also

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos R}{R} - \int_{(1,R)} \frac{\cos x}{x^2}\,\lambda(dx).$$

Wir wollen nun den Grenzwert $R \to \infty$ bilden. Der zweite Term auf der rechten Seite konvergiert wegen der Beschränktheit des Kosinus offensichtlich gegen 0. Für den dritten Term beachten wir, dass $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ auf $[1, \infty)$ Lebesgue integrierbar ist (x^{-2} ist eine integrierbare Majorante) und daher folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{(1,R)} \frac{\cos x}{x^2}\, \lambda(dx) = \int_{(1,\infty)} \frac{\cos x}{x^2}\, \lambda(dx).$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\sin x}{x}\, dx = \cos 1 - \int_{(1,\infty)} \frac{\cos x}{x^2}\, \lambda(dx)$$

existiert, d.h. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[1, \infty)$.

(c) Das Integral $\int_{(0,1)} \frac{\sin x}{x}\, dx$ existiert als Riemann und als Lebesgue-Integral, da dort der Integrand positiv, beschränkt und stetig ist. Somit existiert $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ insgesamt als uneigentliches Riemann-Integral.

■■

14 Die Räume $\mathcal{L}^p$ und L^p

Aufgabe 14.1. Lösung:

(a) Wir betrachten zunächst den Fall $p < \infty$: Für $r > 1$ gilt $\frac{1}{r} + \frac{r-1}{r} = 1$. Durch Anwenden der Hölderungleichung erhalten wir

$$\|u\|_q = \|\,|u|^q\|_1^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\,|u|^q\|_r^{\frac{1}{q}}\ \|1\|_{\frac{r}{r-1}}^{\frac{1}{q}} = \|u\|_{qr}\ \mu(E)^{\frac{1}{q}\frac{r-1}{r}}.$$

Wir setzen $r := \frac{p}{q} > 1$. Damit gilt $\frac{1}{q}\frac{r-1}{r} = \frac{1}{q}\frac{p-q}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ und es folgt

$$\|u\|_q \leqslant \|u\|_p\ \mu(E)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

$p = \infty$: Aus der Hölder-Ungleichung folgt

$$\|u\|_q = \|\,|u|^q\|_1^{\frac{1}{q}} \leqslant (\|\,|u|^q\,\|_\infty \|1\|_1)^{\frac{1}{q}} = \mu(E)^{\frac{1}{q}}\|u\|_\infty.$$

(b) Ist $u \in \mathcal{L}^p(\mu)$, dann folgt aus Teil (a), dass $\|u\|_q < \infty$ für alle $q \geqslant p$. Folglich ist $u \in \mathcal{L}^q(\mu)$.

Aufgabe 14.2. Lösung: Wendet man die Hölder-Ungleichung an, so sieht man leicht, dass die gewünschte Ungleichung gilt. Wir wollen hier stattdessen motivieren wie man auf den Exponenten λ kommt: Es sei $\lambda \in (0,1)$ und $\alpha, \beta \in [1,\infty]$ konjugierte Indizes (d.h. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$). Aus der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\int |u|^r\,d\mu &= \int |u|^{r\lambda}|u|^{r(1-\lambda)}\,d\mu \\ &\leqslant \left(\int |u|^{r\lambda\alpha}\,d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int |u|^{r(1-\lambda)\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.\end{aligned}$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die r-te Wurzel, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\|u\|_r &\leqslant \left(\int |u|^{r\lambda\alpha}\,d\mu\right)^{\frac{\lambda}{\lambda}\frac{1}{r\alpha}} \left(\int |u|^{r(1-\lambda)\beta}\right)^{\frac{1-\lambda}{1-\lambda}\frac{1}{r\beta}} \\ &= \|u\|_{r\lambda\alpha}^{\lambda}\|u\|_{r(1-\lambda)\beta}^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$p = r\lambda\alpha \qquad q = r(1-\lambda)\beta.$$

Unter Ausnutzung von $p^{-1} + q^{-1} = 1$ und $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$ findet man die Lösung

$$\lambda = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \qquad \alpha = \frac{q-p}{q-r} \qquad \beta = \frac{q-p}{r-p}.$$

Die Relation $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^r(\mu)$ folgt sofort aus der gezeigten Ungleichung.

Aufgabe 14.3. Lösung: Wir zeigen die Behauptung per Induktion:

- Induktionsanfang ($n = 2$): Für $n = 2$ ist die Ungleichung gerade die Hölder-Ungleichung, vgl. Satz 14.3.
- Induktionsannahme: Die Ungleichung gelte für ein $n \geqslant 2$.
- Induktionsschritt ($n \to n+1$): Es seien $u_1, \dots, u_{n+1} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{A})$ und $p_i \in (1, \infty)$ mit $\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{-1} = 1$. Wir setzen

$$v := |u_1 \dots u_n| \qquad w := |u_{n+1}| \qquad p^{-1} := \sum_{i=1}^{n} p_i^{-1} \qquad q^{-1} := p_{n+1}^{-1}.$$

Aus der (gewöhnlichen) Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\int |u_1 \cdots u_{n+1}|\, d\mu &= \int |v \cdot w|\, d\mu \\ &\leqslant \left(\int |v|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |w|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int |u_1 \cdots u_n|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \|u_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}}.\end{aligned}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite benutzen wir die Induktionsvoraussetzung mit $\lambda_j := \frac{p_j}{p}$ (beachte, dass $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} = 1$):

$$\int |u_1 \cdots u_n|^p\, d\mu \leqslant \||u_1|^p\|_{L^{\lambda_1}} \cdots \||u_n|^p\|_{L^{\lambda_n}} = \|u_1\|_{L^{p_1}}^p \cdots \|u_n\|_{L^{p_n}}^p.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die p-te Wurzel und setzen die Ungleichung in die vorherige Abschätzung ein, so folgt die Behauptung.

Aufgabe 14.4. Lösung: Das Maß $\frac{d\mu}{\mu(E)}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Da $(0, \infty) \ni x \mapsto -\log x$ konvex ist, folgt aus der Jensen-Ungleichung (Satz 14.15)

$$-\log\left(\int u \frac{d\mu}{\mu(E)}\right) \leqslant \int (-\log(u))\, \frac{d\mu}{\mu(E)}$$

also

$$\log\left(\frac{1}{\mu(E)} \int u\, d\mu\right) \geqslant \frac{1}{\mu(E)} \int \log(u)\, d\mu.$$

Wegen $\int u\, d\mu = 1$ folgt

$$\int \log(u)\, d\mu \leqslant \mu(E) \log\left(\frac{1}{\mu(E)}\right).$$

Wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, dann gilt

$$\int \log(u)\ d\mu \leqslant 0.$$

Aufgabe 14.5. Lösung:

(a) Sind $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, dann sind $f+g$ und αf immer in $\mathcal{L}^p(\mu)$; das folgt sofort aus der Homogenität des Integrals und der Minkowski-Ungleichung, vgl. Korollar 14.5. Wie man aus Cauchy-Schwarz Ungleichung sehen kann, ist das Produkt fg wieder in $\mathcal{L}^p(\mu)$, falls $f, g \in \mathcal{L}^{2p}(\mu)$. Allgemeiner gilt: Existieren konjugierte Indizes $\alpha, \beta \in [1, \infty]$ (d.h. $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$), so dass $f \in \mathcal{L}^{\alpha p}$ und $g \in \mathcal{L}^{\beta p}$, so ist $fg \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dies ist eine direkte Folgerung aus der Hölder-Ungleichung.

(b) Betrachte den Maßraum $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$ und $f(x) := g(x) := x^{-1/3}$. Dann gilt

$$\int_0^1 |f(x)|^2\, dx = \int_0^1 x^{-2/3}\, dx = 3\big[x^{1/3}\big]_{x=0}^1 = 3 < \infty,$$

d.h. $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Andererseits ist $f \cdot g \notin \mathcal{L}^2(\mu)$, denn

$$\int_0^1 |f(x)g(x)|^2\, dx = \int_0^1 x^{-4/3}\, dx = \lim_{r \to 0}\Big[-3x^{-1/3}\Big]_{x=r}^1 = \infty.$$

Das zeigt, dass $\mathcal{L}^2(\mu)$ keine Funktionenalgebra ist. Setzt man $\tilde{f} := f^2$ und $\tilde{g} := g^2$ erhält man ein entsprechendes Gegenbeispiel für $\mathcal{L}^1(\mu)$.

(c) Aus der Minkowski-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \|(f-g)+g\|_p \leqslant \|f-g\|_p + \|g\|_p \\ \Rightarrow \|f\|_p - \|g\|_p &\leqslant \|f-g\|_p. \end{aligned}$$

Vertauscht man die Rollen von f und g, so ergibt sich

$$\|g\|_p - \|f\|_p \leqslant \|g-f\|_p = \|f-g\|_p.$$

Damit folgt

$$\big|\|f\|_p - \|g\|_p\big| = \max\{\|f\|_p - \|g\|_p, \|g\|_p - \|f\|_p\} \leqslant \|f-g\|_p.$$

Aufgabe 14.6. Lösung:

(a) Wir betrachten die verschiedenen Fälle getrennt:

(i) Jede Abbildung $u : (\Omega, \{\varnothing, \Omega\}) \to (\mathbb{R}, \{\varnothing, \mathbb{R}\})$ ist messbar. *Tatsächlich:* u ist genau dann messbar, falls $u^{-1}(A) \in \{\varnothing, \Omega\}$ für alle $A \in \mathcal{A} = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$. Wegen

$$u^{-1}(\varnothing) = \varnothing \qquad u^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$$

sind diese Bedingungen für beliebige Abbildungen u erfüllt.

(ii) Jede messbare Abbildung $u : (\Omega, \{\emptyset, \Omega\}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist konstant. *Tatsächlich:* Angenommen, u ist nicht konstant, d.h. es existieren $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ und $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, so dass $u(\omega_1) = x$, $u(\omega_2) = y$. Dann ist $u^{-1}(\{x\}) \notin \{\emptyset, \Omega\}$, denn $\omega_1 \in u^{-1}(\{x\})$ (also $u^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$) und $\omega_2 \notin u^{-1}(\{x\})$ (also $u^{-1}(\{x\}) \neq \Omega$).

(iii) Jede messbare Abbildung $u : (\Omega, \{\emptyset, \Omega\}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ist insbesondere auch $\{\emptyset, \Omega\}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Aus (ii) wissen wir, dass solche Funktionen konstant sein müssen. Andererseits sind konstante Abbildungen bzgl. beliebiger σ-Algebren messbar. Folglich ist jede $\{\emptyset, \Omega\}/\mathcal{P}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung konstant.

(b) Wir bestimmen zunächst die $\sigma(B)$-messbaren Abbildungen. Behauptung: Jede $\sigma(B)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung ist von der Form

$$u(\omega) = c_1 \mathbb{1}_B(\omega) + c_2 \mathbb{1}_{B^c}(\omega), \qquad \omega \in \Omega, \tag{$\star$}$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Tatsächlich:* Ist u von der Form ($\star$), dann gilt

$$u^{-1}(A) = \begin{cases} \Omega, & c_1, c_2 \in A, \\ B, & c_1 \in A, c_2 \notin A, \\ B^c, & c_1 \notin A, c_2 \in A, \\ \emptyset, & c_1, c_2 \notin A \end{cases}$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Folglich ist u $\sigma(B)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Andererseits: Es sei u eine $\sigma(B)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion. Wir wählen beliebige $\omega_1 \in B$, $\omega_2 \in B^c$ und setzen $c_1 = u(\omega_1)$, $c_2 = u(\omega_2)$. Angenommen, u ist nicht von der Form ($\star$), dann existiert $\omega \in \Omega$ mit $u(\omega) \notin \{c_1, c_2\}$. Für $A := \{u(\omega)\}$ gilt dann offenbar $u^{-1}(A) \notin \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$. Dies ist ein Widerspruch zur Messbarkeit von u.

Nach Definition gilt

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \sigma(B), \mu) = \left\{ u : (\Omega, \sigma(B)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ messbar} : \int |u|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

Wir haben bereits gezeigt, dass die $\sigma(B)$-messbaren Funktionen von der Form ($\star$) sind. Aus der Linearität des Integrals folgt

$$\int |u|^p \, d\mu = |c_1|^p \mu(B) + |c_2|^p \mu(B^c).$$

Folglich ist $u \in \mathcal{L}^p(\Omega, \sigma(B), \mu)$ genau dann wenn

- $c_1 = 0$ oder $\mu(B) < \infty$
- $c_2 = 0$ oder $\mu(B^c) < \infty$.

Insbesondere: Ist μ ein endliches Maß, so ist jede Abbildung der Form ($\star$) in $\mathcal{L}^p(\Omega, \sigma(B), \mu)$.

■■

Aufgabe 14.7. Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha \leqslant \beta$. Wir betrachten die Fälle $x \in (0,1)$ und $x \in [1,\infty)$ getrennt. Ist $x \leqslant 1$, dann

$$\frac{1}{x^\alpha} \geqslant \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \geqslant \frac{1}{x^\alpha + x^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^\alpha} \quad \forall\, x \leqslant 1.$$

Das zeigt, dass $x \mapsto (x^\alpha + x^\beta)^{-1} \in L^p((0,1),dx)$ genau dann, wenn $\alpha p < 1$.

Ist dagegen $x \geqslant 1$, dann

$$\frac{1}{x^\beta} \geqslant \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \geqslant \frac{1}{x^\beta + x^\beta} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^\beta} \quad \forall\, x \geqslant 1.$$

Folglich ist $x \mapsto (x^\alpha + x^\beta)^{-1} \in L^p((1,\infty),dx)$ genau dann, wenn $p\beta > 1$. Kombinieren wir beide Überlegungen, so erhalten wir, dass $x \mapsto (x^\alpha + x^\beta)^{-1} \in L^p((0,\infty),dx)$ genau dann, wenn $\alpha p < 1$ und $\beta p > 1$.

■■

Aufgabe 14.8. Lösung: Wir erinnern uns zunächst an die folgende einfache Identität:

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_2^2 &= \int (u_n - u_m)^2\, d\mu \qquad (14.1)\\
&= \int u_n^2\, d\mu - 2\int u_n u_m\, d\mu + \int u_m^2\, d\mu\\
&= \|u_n\|_2^2 + \|u_m\|_2^2 - 2\int u_n u_m\, d\mu. \qquad (\star)
\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$": Angenommen, u_n konvergiert in $\mathcal{L}^2(\mu)$ gegen eine Funktion $u \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Dann ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine L^2-Cauchy-Folge, d.h. $\lim_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\|_2 = 0$. Außerdem folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung (vgl. Aufgabe 14.5(c)), dass

$$\big|\|u_n\|_2 - \|u\|_2\big| \leqslant \|u_n - u\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_2 = \|u\|_2$. Folglich ist

$$2\int u_n u_m\, d\mu \overset{(\star)}{=} \|u_n\|_2^2 + \|u_m\|_2^2 - \|u_n - u_m\|_2^2 \xrightarrow{m,n\to\infty} 2\|u\|_2^2.$$

"$\Leftarrow$": Angenommen, der Grenzwert

$$c := \lim_{m,n\to\infty} \int u_n u_m\, d\mu$$

existiert. Aus der Definition des Grenzwertes erhalten wir: Für alle $\epsilon > 0$ existiert $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\int u_n u_m\, d\mu - c\right| \leqslant \epsilon \quad \text{für alle } m,n \geqslant N.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n^2\, d\mu = c = \lim_{m\to\infty} \int u_m^2\, d\mu.$$

Aus $(\star)$ sehen wir nun

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\|_2^2 = \lim_{m,n\to\infty} \left(\|u_n\|_2^2 + \|u_m\|_2^2 - 2\int u_n u_m\, d\mu\right) = c^2 + c^2 - 2c^2 = 0.$$

■■

Aufgabe 14.9. Lösung: Wir betrachten zunächst den Fall $\|u\|_{L^\infty} < \infty$. Setzen wir $A_\delta := \{u \geqslant \|u\|_\infty - \delta\}$, $\delta > 0$, so gilt $\mu(A_\delta) > 0$ und

$$\|u\|_p \geqslant \left(\int_{A_\delta} (\|u\|_\infty - \delta)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = (\|u\|_\infty - \delta)\mu(A_\delta)^{\frac{1}{p}}.$$

Folglich

$$\liminf_{p\to\infty} \|u\|_p \geqslant \liminf_{n\to\infty} \left((\|u\|_\infty - \delta)\mu(A_\delta)^{\frac{1}{p}}\right) = \|u\|_\infty - \delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig ist, zeigt das $\liminf_{p\to\infty} \|u\|_p \geqslant \|u\|_\infty$. Andererseits: Für $p > q$ gilt

$$\int |u(x)|^p \, d\mu = \int |u(x)|^{p-q} |u(x)|^q \, d\mu \leqslant \|u\|_\infty^{p-q} \|u\|_q^q.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die p-te Wurzel, so erhalten wir

$$\limsup_{p\to\infty} \|u\|_p \leqslant \limsup_{p\to\infty} \left(\|u\|_\infty^{\frac{p-q}{p}} \|u\|_q^{\frac{q}{p}}\right) = \|u\|_\infty.$$

Das beendet den Beweis für den Fall $\|u\|_{L^\infty} < \infty$.

Fall $\|u\|_{L^\infty} = \infty$: Die Ungleichung

$$\limsup_{p\to\infty} \|u\|_p \leqslant \|u\|_\infty$$

gilt trivialerweise. Die andere Ungleichung sieht man so: Wir definieren $A_R := \{u \geqslant R\}$, $R > 0$. Dann gilt $\mu(A_r) > 0$ (sonst wäre $\|u\|_{L^\infty} < \infty$!) und wie im ersten Teil des Beweises gilt

$$\|u\|_p \geqslant \left(\int_{A_R} R^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = R\mu(A_R)^{\frac{1}{p}}.$$

Damit folgt $\liminf_{p\to\infty} \|u\|_p \geqslant R$ und da $R > 0$ beliebig ist, zeigt dies bereits die Behauptung:

$$\liminf_{p\to\infty} \|u\|_p \geqslant \infty = \|u\|_\infty.$$

■■

Aufgabe 14.10. Lösung: Wir machen zunächst zwei Beobachtungen:

- Für $r \leqslant s \leqslant q$ gilt $\|u\|_r \leqslant \|u\|_s$. Das folgt sofort aus der Jensen-Ungleichung, Satz 14.15, und der Tatsache, dass $V(x) := x^{s/r}$, $x \in \mathbb{R}$, eine konvexe Funktion ist (siehe auch Aufgabe 14.1). Insbesondere ist $\|u\|_r < \infty$ für alle $r \in (0, q)$.
- Es gilt

$$\int \log |u| \, d\mu \leqslant \log \|u\|_p \quad \text{für alle } p \in (0, q). \tag{$\star$}$$

  Auch dies folgt aus der Jensen-Ungleichung angewendet auf die konvexe Funktion $V(x) := -\log x$:

$$-\log\left(\int |u|^p \, d\mu\right) \leqslant \int -\log(|u|^p) \, d\mu - p \int \log |u| \, d\mu;$$

  folglich,

$$\log \|u\|_p = \frac{1}{p} \log\left(\int |u|^p \, d\mu\right) \geqslant \int \log |u| \, d\mu.$$

Wegen ($\star$) genügt es zu zeigen, dass $\lim_{p\to 0}\|u\|_{L^p} \leqslant \exp(\int \ln|u|\,d\mu)$. (Beachte: Auf Grund der Monotonie von $\|u\|_p$ für $p\downarrow 0$ wissen wir, dass der Limes $\lim_{p\to 0}\|u\|_p$ existiert.) Dazu bemerken wir, dass

$$\log a = \inf_{p>0} \frac{a^p - 1}{p}, \qquad a > 0. \tag{$\star\star$}$$

(Hinweis: Zeige durch Differentiation, dass $p \mapsto \frac{a^p-1}{p}$ monoton wachsend ist. Benutze den Satz von Bernoulli–Hôpital, um zu zeigen, dass $\lim_{p\to 0}\frac{a^p-1}{p} = \log a$.) Damit erhalten wir aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (mK)

$$\begin{aligned}\int \log|u|\,d\mu &\overset{\text{mK}}{=} \inf_{p>0}\int \frac{|u|^p - 1}{p}\,d\mu \\ &\geqslant \frac{\int |u|^p\,d\mu - 1}{p} \\ &= \frac{\|u\|_p^p - 1}{p} \overset{(\star\star)}{\geqslant} \log\|u\|_p\end{aligned}$$

für alle $p > 0$. Für $p \to 0$ erhalten wir die Behauptung.

Aufgabe 14.11. Lösung: Es sei $p \in (0,1)$ und $q := \frac{p}{p-1} < 0$ der konjugierte Index. Für $s := \frac{1}{p} \in (1,\infty)$ ist der konjugierte Index t gegeben durch

$$t = \frac{s}{s-1} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{1-p} \in (1,\infty).$$

Aus der »gewöhnliche« Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\int |u|^p\,d\mu &= \int (|u||w|)^p \frac{1}{|w|^p}\,d\mu \\ &\leqslant \left(\int |u|^{ps}|w|^{ps}\,d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int |w|^{-pt}\,d\mu\right) \\ &= \left(\int |u||w|\,d\mu\right)^p \left(\int |w|^{p/(p-1)}\,d\mu\right)^{1-p}.\end{aligned}$$

Ziehen wir auf beiden Seite die p-te Wurzel, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\int |u|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left(\int |u||w|\,d\mu\right)\left(\int |w|^{p/(p-1)}\,d\mu\right)^{(1-p)/p} \\ &= \left(\int |uw|\,d\mu\right)\left(\int |w|^q\,d\mu\right)^{-\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Folglich,

$$\|uv\|_{L^1} \geqslant \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}. \tag{$\star$}$$

Die »inverse« Minkowski-Ungleichung ergibt sich aus der »inversen« Hölder-Ungleichung genau wie die Minkowski-Ungleichung aus der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned}\int (u+v)^p\,d\mu &= \int (u+v)(u+v)^{p-1}\,d\mu \\ &= \int u(u+v)^{p-1}\,d\mu + \int v(u+v)^{p-1}\,d\mu\end{aligned}$$

$$\overset{(\star)}{\geqslant} \|u\|_{L^p}\|(u+v)^{p-1}\|_{L^q} + \|v\|_{L^p}\|(u+v)^{p-1}\|_{L^q}.$$

Wegen $q = \frac{p}{p-1}$ und $(p-1)q = p$ zeigt das

$$\int (u+v)^p\,d\mu \geqslant \|u\|_{L^p}\|u+v\|_{L^p}^{p-1} + \|v\|_{L^p}\|u+v\|_{L^p}^{p-1}.$$

Indem wir beide Seiten durch $\|u+v\|_{L^p}^{p-1}$ dividieren, folgt die Behauptung.

Aufgabe 14.12. Lösung: Es sei $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ mit $\|g\|_{L^q} \leqslant 1$. Aus der Dreiecks-Ungleichung und Hölder-Ungleichung folgt

$$\left|\int f\cdot g\,d\mu\right| \leqslant \int |f\cdot g|\,d\mu \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}.$$

Folglich gilt

$$\|f\|_{L^p} \geqslant \sup\left\{\left|\int fg\,d\mu\right| : g\in\mathcal{L}^q(\mu),\ \|g\|_{L^q}\leqslant 1\right\}.$$

Um »$\leqslant$« zu sehen, genügt es eine Funktion $g \in L^q(\mu)$ mit $\|g\|_q \leqslant 1$ und $\int fg\,d\mu = \|f\|_{L^p}$ zu finden. Ist $\|f\|_{L^p} = 0$, dann erfüllt $g := 0$ offenbar diesen Zweck. Wir nehmen daher im Folgenden an, dass $\|f\|_{L^p} > 0$. Definiere zunächst $h := \operatorname{sgn}(f)\cdot|f|^{p-1}$. Dann ist wegen $q = \frac{p}{p-1}$

$$|h|^q = |f|^{(p-1)q} = |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

d.h. $h \in \mathcal{L}^q(\mu)$ und

$$\|h\|_q = \left(\int |h|^q\,d\mu\right)^{1/q} = \left(\int |f|^p\right)^{1/p\cdot p/q} = \|f\|_{L^p}^{p/q} > 0.$$

Für $g := h/\|h\|_{L^q} \in \mathcal{L}^q(\mu)$ gilt daher $\|g\|_{L^q} \leqslant 1$ und

$$\int fg\,d\mu = \frac{1}{\|h\|_{L^q}}\int |f|^p\,d\mu = \frac{1}{\|f\|_{L^p}^{p/q}}\|f\|_{L^p}^p = \|f\|_{L^p}^{p(1-1/q)} = \|f\|_{L^p}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder benutzt haben, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Das zeigt »$\leqslant$«.

Aufgabe 14.13. Lösung:

(a) Zu zeigen ist

$$\|u\|_{L^\infty} := \inf\overbrace{\{c : \mu(\{|u|\geqslant c\}) = 0\}}^{:=A} \stackrel{!}{=} \sup\overbrace{\{c : \mu(\{|u|\geqslant c\}) > 0\}}^{:=B}$$

d.h. wir müssen zwei Aussagen beweisen:

a) $\|u\|_{L^\infty}$ ist eine obere Schranke für B und

b) diese Schranke ist die kleinste obere Schranke a): Angenommen, $\exists c \in B : c > \|u\|_{L^\infty}$. Weil wir das Infimum als Folgengrenzwert einer Folge aus der Menge A realisieren können folgt: $\exists x : x \in (\|u\|_{L^\infty}, c] \cap A$, d.h. $x \leqslant c$, und daher $\{|u| \geqslant x\} \supset \{|u| \geqslant c\}$. Weil aber $x \in A$ und $c \in B$, folgt

$$0 = \mu(\{|u| \geqslant x\}) \geqslant \mu(\{|u| \geqslant c\}) > 0 \quad \text{Widerspruch!}$$

b): Wiederum ein indirekter Beweis. Angenommen, $\|u\|_{L^\infty}$ ist nicht die kleinste obere Schranke. Dann $\exists c < \|u\|_{L^\infty}$ mit einer oberen Schranke c für die Menge B. Somit $\exists x : c < x < \|u\|_{L^\infty}$, und entweder $x \in A$, was $\|u\|_{L^\infty}$ als unterer Schranke für A widerspricht, oder $x \in B$, was der Tatsache widerspricht, dass c eine obere Schranke für B ist. Somit muss $\|u\|_{L^\infty}$ die kleinste obere Schranke sein.

(b) Definiere $S = \|u\|_{L^\infty}$ und beachte, dass $\{u > S\} = u^{-1}((S, \infty]) = \bigcup_{k=1}^{\infty} u^{-1}((S + \frac{1}{k}, \infty])$ gilt. Wegen Teilaufgabe (a) wissen wir, dass für jedes $k \geqslant 1$, $\mu\left(u^{-1}((S + \frac{1}{k}, \infty])\right) = 0$. Mithin gilt $\mu(u > \|u\|_\infty) = 0$. Indem wir statt u die Funktion $-u$ betrachten, erhalten wir $\mu(u < -\|u\|_\infty) = 0$. Folglich gilt, $\mu(|u| > \|u\|_\infty) = 0$.

(c) Mit Hilfe von Teil (b) können wir eine Menge A konstruieren, so dass $\mu(A) = 0$ und $|u(x)| \leqslant \|u\|_{L^\infty}$, für alle $x \in E \setminus A$. Nun definieren wir $v = u \cdot \mathbf{1}_{A^c}$.

(d) **Norm:** Wir zeigen zunächst $\|\alpha u\|_{L^\infty} = |\alpha| \|u\|_{L^\infty}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *In der Tat* gilt

$$\begin{aligned}\|\alpha u\|_{L^\infty} = \sup\{c : \mu(\{|\alpha u| \geqslant c\}) > 0\} &= \sup\{|\alpha| c : \mu(\{|\alpha||u| \geqslant |\alpha| c\}) > 0\} \\ &= |\alpha| \sup\{c : \mu(\{|u| \geqslant c\}) > 0\}.\end{aligned}$$

Nun zeigen wir $\|u+v\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}$. Dazu seien $[u], [v] \in L^\infty(\mu)$. Insbesondere gibt es Mengen $A, B \subset E$, so dass $\mu(A) = \mu(B) = 0$ und $|u(x)| \leqslant \|u\|_{L^\infty}$, $x \in E \setminus A$ und $|v(x)| \leqslant \|v\|_{L^\infty}$, $x \in E \setminus B$. Folglich gilt $|u(x) + v(x)| \leqslant |u(x)| + |v(x)| \leqslant \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}$ für alle $x \in E \setminus (A \cup B)$. Wegen $\mu(A \cup B) = 0$ folgt die Behauptung.

Schließlich zeigen wir $\|u\|_{L^\infty} = 0 \iff u = 0$ f.ü. Wir nehmen $\|u\|_{L^\infty} = 0$ an. Wegen (b) hat die Menge $\{|u| > 0\} = \{|u| \neq 0\}$ Maß 0. Daher gilt $[u] = [0]$. Die Umkehrung ist offensichtlich.

Vollständigkeit: Wir müssen zeigen, dass jede $L^\infty(\mu)$-Cauchy-Folge konvergiert. Dazu sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\mu)$ eine Cauchy-Folge. Nach Definition gibt es zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein N, so dass für alle $m, n > N$ gilt: $\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \epsilon$. Wegen b) gibt es Mengen $A_{m,n}$ mit $\mu(A_{m,n}) = 0$ und $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\|_{L^\infty}$, $\forall x \in E \setminus A_{m,n}$. Wir setzen $A = \bigcup_{m,n} A_{m,n}$ und beachten

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon, \quad m, n > N,\ x \in E \setminus A. \tag{14.2}$$

Mit anderen Worten: Für alle $x \in A^c$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, die wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergiert. Wir schreiben $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für den Limes, der für $x \in A^c$ existiert. Daher existiert die Funktion $f = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A^c} f_n$, die offensichtlich messbar ist.

Wenn wir $n \to \infty$ in der Beziehung (14.2) bilden, folgt $|f_m(x) - f(x)| \leqslant \epsilon$ für alle $m > N$, $x \in A^c$. Damit ist $\|f_n - f\|_{L^\infty} \leqslant \epsilon$ für $m > N$, also $f_m \to f$ in $L^\infty(\mu)$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt dann auch $f \in L^\infty(\mu)$:

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant \|f_n\|_{L^\infty} + \|f_n - f\|_{L^\infty} \leqslant \|f_n\|_{L^\infty} + \epsilon < \infty.$$

■■

15 Produktmaße

Aufgabe 15.1. Lösung: Offenbar ist $A \times N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ in der Produkt-σ-Algebra enthalten. Damit folgt direkt aus der Definition des Produktmaßes auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, dass

$$(\mu \otimes \nu)(A \times N) = \mu(A)\nu(N) = 0.$$

■■

Aufgabe 15.2. Lösung: Nach Voraussetzung existiert eine Menge $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{A}$ und eine nicht-leere Nullmenge $N \in \mathcal{B}$. Aus Aufgabe 15.1 folgt $\mu \otimes \nu(E \times N) = 0$. Wegen $A \times N \subset E \times N$ ist $A \times N$ also Teilmenge einer $\mu \otimes \nu$-Nullmenge. Andererseits ist nach Theorem 15.5 $A \times N \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$: Wäre $A \times N \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, dann wäre auch die Abbildung

$$(E, \mathcal{A}) \ni x \mapsto \mathbb{1}_{A \times N}(x, y) \overset{y \in N}{=} \mathbb{1}_A(x) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

messbar. Dies ist aber nur möglich falls $A \in \mathcal{A}$.

■■

Aufgabe 15.3. Lösung: Offensichtlich reicht der Nachweis von $\mathcal{A}^\mu \times \mathcal{B}^\nu \subset (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{\mu \otimes \nu}$. Es sei $A' \in \mathcal{A}^\mu$ und $B' \in \mathcal{B}^\nu$. Dann ist $A' = A \cup M$, $B' = B \cup N$ mit Nullmengen $M \in \mathcal{A}^\mu$ und $N \in \mathcal{B}^\nu$ und $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$. Somit

$$A' \times B' = (A \cup M) \times (B \cup N) = (A \times B) \cup (A \times N) \cup (M \times B) \cup (M \times N).$$

Nun ist $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $(A \times N) \cup (M \times B) \cup (M \times N)$ eine Nullmenge für $\mu \otimes \nu$. Mithin ist $A' \times B' \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{\mu \otimes \nu}$.

■■

Aufgabe 15.4. Lösung:

(a) »$\Leftarrow$«: Da $B_n \times \{n\} \in \mathcal{B}[0, \infty) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist dies offensichtlich.

"$\Rightarrow$": Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$B_n := \{x \in [0, \infty); (x, n) \in B\}.$$

Wegen

$$(x, n) \in B \Leftrightarrow x \in B_n$$

folgt bereits die Behauptung.

(b) Aus Lemma 15.3 wissen wir, dass Mengen der Form $B \times N$, $B \in \mathcal{B}[0,\infty), N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ein Erzeuger der Produkt-σ-Algebra sind. Da aber für jedes Maß π auf $\mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\pi(B \times N) = \sum_{n \in N} \pi(B \times \{n\})$$

gilt, erhalten wir aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße deshalb sofort, dass jedes Maß auf $\mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eindeutig durch die Werte $\pi(B \times \{n\})$ bestimmt wird.

Zur Existenz: Definiere

$$\nu(N) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(M), \qquad N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Wir wissen bereits, dass ν ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definiert. Weiterhin

$$\begin{aligned}
\pi(B \times N) &:= \sum_{n \in N} \pi(B \times \{n\}) \\
&:= \sum_{n \in N} \int_B e^{-t} \frac{t^n}{n!}\, \mu(dt) \\
&= \int_N \left(\int_B e^{-t} \frac{t^n}{n!}\, \mu(dt) \right) d\nu(n) \\
&= \iint_{B \times N} e^{-t} \frac{t^n}{n!} (\mu \otimes \nu)(dt, dn),
\end{aligned}$$

d.h. das definierte π hat die gewünschten Eigenschaften. (Hier haben wir im letzten Schritt den Satz von Tonelli, Satz 16.1, verwendet; alternativ kann man sich auch elementar überlegen, dass es sich hierbei um ein Maß handelt.)

■■

Aufgabe 15.5. Lösung:

(a) Da μ ein σ-endliches Maß ist, existiert eine Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\mu(G_n) < \infty$ und $G_n \uparrow \mathbb{R}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$B_k^n := \left\{ x \in G_n ; \mu(\{x\}) > \frac{1}{k} \right\}$$

endlich. Das sehen wir so: Angenommen, es gäbe (mindestens) abzählbar viele $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset B_k^n$, $x_j \neq x_i$ für $i \neq j$. Aus der Disjunktheit der Mengen würde dann folgen, dass

$$\mu(G_n) \geqslant \mu\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \{x_j\} \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(\{x_j\}) = \infty.$$

Offenbar ist dies ein Widerspruch zu $\mu(G_n) < \infty$.

Folglich ist die Menge

$$B^n := \{ x \in G_n ; \mu(\{x\}) > 0 \} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ x \in G_n ; \mu(\{x\}) > \frac{1}{k} \right\}$$

abzählbar. Somit ist

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^n$$

als abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ebenfalls abzählbar.

(b) Für die Diagonale $\mathbb{1}_\Delta(x,y) = \mathbb{1}_{\{y\}}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y)$ erhalten wir aus der Identität in Satz 15.5:

$$\begin{aligned}\mu \otimes \nu(\Delta) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int \mathbb{1}_{\{y\}}(x)\,\mu(dx) \right) \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu(\{y\})\mathbb{1}_D(y)\,\nu(dy) \\ &= \sum_{y \in D} \mu(\{y\})\nu(\{y\}).\end{aligned}$$

(Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass D abzählbar ist.)

16 Der Satz von Fubini–Tonelli

Aufgabe 16.1. Lösung: Nach dem Satz von Fubini, Satz 16.2, genügt zu zeigen, dass

$$\int_{(0,\infty)}\int_{(0,\infty)} |e^{-xy}\sin x \sin y|\ \lambda(dx)\lambda(dy) < \infty.$$

Offenbar gilt

$$\int_{(0,\infty)} e^{-xy}|\sin(x)|\ \lambda(dx) \leqslant \int_{(0,\infty)} e^{-xy}\ \lambda(dx) = \frac{e^{-xy}}{-y}\Big|_0^\infty = \frac{1}{y}$$

und $\frac{\sin y}{y} \in \mathcal{L}^1((0,1])$, d.h. wir haben eine integrierbare Majorante für $y \leqslant 1$ gefunden. Wir brauchen noch eine entsprechende Majorante für $y > 1$. Wenden wir zweimal partielle Integration an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xy}\sin x\ dx &= \frac{e^{-xy}}{-y}\sin x\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{e^{-xy}}{-y}\cos x\ dx\\ &= \frac{e^{-xy}}{-y^2}\cos x\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{e^{-xy}}{-y^2}(-1)\sin x\ dx.\end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\frac{y^2+1}{y^2}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xy}\sin x\ dx = \frac{e^{-(k+1)\pi y}}{-y^2}(-1)^{k+1} - \frac{e^{-k\pi y}}{-y^2}(-1)^k = \frac{(-1)^k}{y^2}(e^{-(k+1)\pi y} + e^{-k\pi y}).$$

Folglich

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xy}\sin x\ dx = (-1)^k\frac{1}{y^2+1}(e^{-(k+1)\pi y} + e^{-k\pi y}).$$

Daraus erhalten wir nun die gewünschte integrierbare Majorante für $y \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} e^{-xy}|\sin(x)|dx &= \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xy}(\sin x)(-1)^k\ dx\\ &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k(-1)^k\frac{1}{y^2+1}\left(e^{-(k+1)\pi y} + e^{-k\pi y}\right)\\ &\leqslant \frac{2}{y^2+1}\sum_{k=0}^\infty (e^{-\pi y})^k\\ &\overset{y>1}{\leqslant} \frac{2}{y^2+1}\sum_{k=0}^\infty (e^{-\pi})^k \in \mathcal{L}^1((1,\infty))\end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt, dass

$$\int\limits_{(0,\infty)}\int\limits_{(0,\infty)} |e^{-xy}\sin x\sin y|\ \lambda(dx)\lambda(dy) \leqslant \int\limits_{(0,1]}\frac{\sin y}{y}\ \lambda(dy) + \int\limits_{(1,\infty)}\frac{2}{y^2+1}\ \lambda(dy)\sum_{k=0}^\infty (e^{-\pi})^k < \infty.$$

■■

Aufgabe 16.2. Lösung: Aus

$$\frac{d}{dy}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{$\star$}$$

folgt

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx = \int_{(0,1)} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Entsprechend erhalten wir (entweder mit einer analogen Rechnung oder durch die Symmetrie des Integrals)

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Somit kann das Doppelintegral nicht existieren, denn dann müssten die beiden berechneten Integrale den gleichen Wert haben (Satz von Fubini, Satz 16.2). Dass das Doppelintegral nicht existiert, kann man auch direkt zeigen:

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dy\,dx &\geqslant \int_0^1\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx\\ &\overset{(\star)}{=} \int_0^1 \frac{x}{x^2+x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty.\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 16.3. Lösung: Da der Integrand eine ungerade Funktion ist, gilt für alle $y \neq 0$:

$$\int_{(-1,1)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx = 0.$$

Die Menge $\{0\}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge und daher erhalten wir

$$\int_{(-1,1)}\left[\int_{(-1,1)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\lambda(dy)\right]\lambda(dx) = 0 = \int_{(-1,1)}\left[\int_{(-1,1)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\lambda(dx)\right]\lambda(dy).$$

Wir müssen noch zeigen, dass das Doppelintegral nicht existiert. Dazu führen wir die Substitution $x = \xi|y|$ durch:

$$\int_{(-1,1)} \left|\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right| dx = \frac{2}{|y|}\int_0^{1/|y|} \frac{\xi}{(\xi^2+1)^2}\,d\xi \geqslant \frac{2}{|y|}\underbrace{\int_0^1 \frac{\xi}{(\xi^2+1)^2}\,d\xi}_{=:C}.$$

Beachte, dass $C \in (0,\infty)$. Folglich,

$$\int_{(-1,1)}\int_{(-1,1)} \left|\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right| dx\,dy \geqslant C\int_{(-1,1)} \frac{2}{|y|}\,dy = \infty.$$

Gemäß dem Satz von Tonelli existiert daher das Doppelintegral nicht.

■■

Aufgabe 16.4. Lösung: Wir schreiben generisch $f(x,y)$ für die Integranden.

(a) Wir haben

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{|x-\frac{1}{2}|}{(x-\frac{1}{2})^3}$$

und diese Funktion ist in x nicht über $(0,1)$ integrierbar. Für $0 < y \leqslant \frac{1}{2}$ gilt

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}-y} (x-\frac{1}{2})^{-3}\,dx + \int_{\frac{1}{2}+y}^1 (x-\frac{1}{2})^{-3}\,dx = 0.$$

Für das Intervall $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$ hat dieses Integrall ebenfalls den Wert Null. Mithin

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = 0.$$

Schließlich gilt

$$\int_0^1 |f(x,y)|\,dy = |x-\tfrac{1}{2}|^{-2} \implies \int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|\,dx\,dy = \infty.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy\,dx &= \int_0^1 \left[\frac{1}{x}\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-1}\right] dx \\
&= \left[\ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}-1}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

Aus (Anti-)Symmetriegründen gilt aber

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy = -\ln 2.$$

Weiterhin:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \left|\frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^x \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{x}\frac{x-y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= (\sqrt{2}-1)\int_0^1 \frac{dx}{x} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

(c) Da es sich um eine positive Funktion handelt, sind nach dem Satz von Tonelli alle drei Integrale gleich. Zunächst sei $p \neq 1$. Dann

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-xy)^{-p}\,dy\,dy = \frac{1}{p-1}\int_0^1 \left((1-x)^{1-p}-1\right)\frac{dx}{x}.$$

Dieses Integral ist genau dann endlich, wenn $p < 2$. Für $p = 1$ ergibt sich

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-xy)^{-p}\,dy\,dy = -\int_0^1 \ln(1-x)\,\frac{dx}{x} < \infty.$$

Aufgabe 16.5. Lösung:

(a) Es gilt $[-n,n] \uparrow \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ und $\lambda([-n,n]) = 2n < \infty$. Also ist λ ein σ-endliches Maß. Wählen wir eine Abzählung $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{Q}$, so gilt für $A_n := \{q_1,\dots,q_n\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, dass $A_n \uparrow \mathbb{R}$ und $\zeta_{\mathbb{Q}}(A_n) = n < \infty$. Das zeigt, dass $\zeta_{\mathbb{Q}}$ σ-endlich ist.

Wir wollen nun zeigen, dass $\zeta_{\mathbb{R}}$ *nicht* σ-endlich ist: Angenommen $\zeta_{\mathbb{R}}$ wäre σ-endlich. Dann würde es eine Mengenfolge $A_n \uparrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, geben, mit $\zeta_{\mathbb{R}}(A_n) < \infty$. Da $\zeta_{\mathbb{R}}$ per Definition das Zählmaß ist, ist A_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar. Also wäre $\mathbb{R}$ die abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen und somit abzählbar. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

(b) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind eine λ-Nullmenge, also ist für festes y auch $\frac{1}{y}\mathbb{Q}$ eine λ-Nullmenge und somit gilt:

$$\int_{(0,1)} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x\cdot y)\ \lambda(dx) = 0 \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt offensichtlich

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x\cdot y)\,\lambda(dx)\,d\zeta_{\mathbb{R}}(y) = 0.$$

(c) Sei $x \in (0,1)$. Die Menge $(\frac{1}{x}\mathbb{Q}) \cap (0,1)$ enthält unendlich viele Werte, also gilt

$$\int_{(0,1)} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x\cdot y)\ \zeta_{\mathbb{R}}(dy) = \infty \text{ für alle } x.$$

Folglich hat auch das Doppelintegral den Wert ∞.

(d) Sei $x \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$. Dann ist $y\cdot x \notin \mathbb{Q}$ für alle $y \in \mathbb{Q}$, also

$$\int_{(0,1)} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x\cdot y)\ \zeta_{\mathbb{Q}}(dy) = 0 \text{ für alle } x \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}.$$

Andererseits: Ist $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, so ist $y\cdot x \in \mathbb{Q}$ für alle $y \in \mathbb{Q}$ und somit

$$\int_{(0,1)} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x\cdot y)\ \zeta_{\mathbb{Q}}(dy) = \infty \text{ für alle } x \in (0,1)\cap\mathbb{Q}.$$

Da $\mathbb{Q}$ eine λ-Nullmenge ist, erhalten wir daraus

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x\cdot y)\ \zeta_{\mathbb{Q}}(dy)\lambda(dx) = \int_{(0,1)} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\cdot\infty\ \lambda(dx) = 0.$$

(e) Die Ergebnisse in (c),(d) widersprichen nicht dem Satz von Fubini und Tonelli, da diese die σ-Endlichkeit der Maße voraussetzen (vgl. Teilaufgabe (a)).

Aufgabe 16.6. Lösung:

(a) Da der Integrand nicht-negativ ist, können wir den Satz von Tonelli anwenden und dürfen daher das Integral als iteriertes Integral ausrechnen:

$$\begin{aligned} I &:= \int_{[0,\infty)^2} \frac{dx\,dy}{(1+y)(1+x^2y)} \\ &= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+y} \left(\int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+x^2y}\,dx \right) dy \\ &= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+y} \frac{\arctan(x\sqrt{y})}{\sqrt{y}} \Big|_{x=0}^{\infty} dy \\ &= \frac{\pi}{2} \int [0,\infty) \frac{1}{1+y} \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy. \end{aligned}$$

(Hier haben wir verwendet, dass der Integrand stetig ist und wird deshalb auf kompakten Intervallen mit Riemann-Integralen rechnen dürfen. Beachte dazu, dass $\int_{[0,\infty)} \cdots = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,n)} \ldots$ gemäß dem Satz von der monotonen Konvergenz.) Substituieren wir nun $u = \sqrt{y}$, so erhalten wir

$$I = \frac{\pi}{2} \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+u^2}\,du = \pi \arctan(u) \Big|_{u=0}^{\infty} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(b) Wir führen in (a) eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{1+y}\frac{1}{1+x^2y} = \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2y}.$$

Damit

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,\infty)} \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1-x^2}\frac{1}{1+x^2y}\,dy \right) dx \\ &= \int_{[0,\infty)} \left(\lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{1-x^2} \ln(1+R) - \frac{x^2}{1-x^2} \frac{\ln(1+x^2R)}{x^2} \right] \right) dx \\ &= \int_{(0,\infty)} \frac{1}{1-x^2} \left(\lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{1+R}{1+x^2R} \right) \right) dx \\ &= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1-x^2} \ln(x^{-2})\,dx \\ &= 2 \int_{[0,\infty)} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx. \end{aligned}$$

Aus (a) folgt also $\int_{[0,\infty)} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{I}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

(c) Mit Hilfe der geometrischen Reihe sehen wir, dass

$$\frac{1}{x^2-1} = -\sum_{n\geqslant 0} (x^2)^n = -\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}, \qquad |x| < 1,$$

und

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{1-x^{-2}} = \frac{1}{x^2}\sum_{n\geqslant 0} (x^{-2})^n = \sum_{n\geqslant 0} x^{-2(n+1)}, \qquad |x| > 1.$$

Folglich ist

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = -\sum_{n\geqslant 0} \int_{(0,1)} x^{2n} \ln x\,dx + \sum_{n\geqslant 0} \int_{(1,\infty)} x^{-2(n+1)} \ln x\,dx. \qquad (\star)$$

(Dass wir Summation und Integration vertauschen dürfen folgt direkt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz.) Mittels partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} x^{2n} \ln x \, dx &= \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln x \bigg|_{x=0}^{1} - \frac{1}{2n+1} \int_{(0,1)} x^{2n} \, dx \\ &= -\frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

und, auf analoge Weise,

$$\begin{aligned}\int_{(1,\infty)} x^{-2(n+1)} \ln x \, dx &= \frac{x^{-2(n+1)+1}}{-2(n+1)+1} \ln x \bigg|_{x=1}^{\infty} - \frac{1}{-2(n+1)+1} \int_{(1,\infty)} x^{-2(n+1)} \, dx \\ &= \frac{1}{(-2(n+1)+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

Setzen wir diese Ergebnisse in $(\star)$ ein, so erhalten wir aus (b) die Behauptung.

Aufgabe 16.7. Lösung:

- (a) $\Rightarrow$ (b): Ist f $\mu_1 \otimes \mu_2$-vernachlässigbar, so folgt aus dem Satz von Tonelli, Satz 16.1, dass

  $$0 = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)| \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1).$$

  Aus Satz 10.2 erhalten wir nun

  $$\mu_1 \left(\int_{E_2} |f(\cdot, x_2)| \, d\mu_2(x_2) \neq 0 \right) 0.$$

  Das bedeutet gerade, dass $f(x_1, \cdot)$ für μ_1-fast alle x_1 μ_2-vernachlässigbar ist.

- (b) $\Rightarrow$ (a): Es sei

  $$N := \left\{ x_1 \in E_1 ; \int_{E_2} |f(x_1, x_2)| \, d\mu_2(x_2) \neq 0 \right\}.$$

  Nach Voraussetzung gilt $\mu_1(N) = 0$. Folglich,

  $$\begin{aligned}\int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)| \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) &= \int_{N} \left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)| \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &\quad + \int_{E_1 \setminus N} \left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)| \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1).\end{aligned}$$

  Das erste Integral auf der rechten Seite hat gemäß Satz 10.2 den Wert 0. Das zweite Integral ist ebenfalls 0, das folgt sofort aus der Definition von N. Aus dem Satz von Tonelli erhalten wir daher

  $$\int_{E_1 \times E_2} |f(x_1, x_2)| \, d\mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2) = 0.$$

- (a) $\Leftrightarrow$ (c): Nutze entweder Symmetrie oder eine analoge Argumentation wie in »(a) $\Leftrightarrow$ (b)«.

Aufgabe 16.8. Lösung: Wir verwenden den Variablenwechsel $y_i = (x_i/a_i)^{p_i}$. Damit ergibt sich folgender Integralausdruck

$$\frac{a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}}{p_1\cdots p_n}\int\cdots\int_{\sum_{i=1}^n y_i\leqslant 1,\, y_i\geqslant 0} y_1^{\alpha_1/p_1-1}\cdots y_n^{\alpha_n/p_n-1}\,dy_1\ldots dy_n.$$

Um den Integralausdruck zu berechnen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_i = 1$ annehmen. Wir gehen rekursiv vor und setzen für $1\leqslant m\leqslant n$ und $\lambda\geqslant 0$

$$I_m(\lambda) := \int\cdots\int_{\sum_{i=1}^m y_i\leqslant\lambda,\, y_i\geqslant 0} y_1^{\alpha_1-1}\cdots y_m^{\alpha_m-1}\,dy_1\ldots dy_m.$$

Offensichtlich gilt $I_m(\lambda) = \lambda^{\alpha_1+\dots+\alpha_m}I_m(1)$. Mithin (hier geht die Formel für die Eulersche Beta-Funktion ein)

$$\begin{aligned}
I_n(1) &= \int_{y_n=0}^1\int_{\sum_{i=1}^{n-1} y_i\leqslant 1-y_n,\, y_i\geqslant 0} y_1^{\alpha_1-1}\cdots y_n^{\alpha_n-1}\,dy_1\ldots dy_n\\
&= \int_{y_n=0}^1 I_{n-1}(1-y_n)y_n^{\alpha_n-1}\,dy_n\\
&= I_{n-1}(1)\int_0^1 y_n^{\alpha_n-1}(1-y_n)^{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}}\,dx_n\\
&= I_{n-1}\frac{\Gamma(\alpha_n)\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}+1)}{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_n+1)}.
\end{aligned}$$

Aus

$$I_1(1) = \int_0^1 y_1^{\alpha_1-1}\,dy_1 = \frac{1}{\alpha_1}$$

folgt somit

$$I_n(1) = \frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_n)\cdots\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_n+1)} = \frac{\Gamma(\alpha_n)\cdots\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_n+1)}.$$

Aufgabe 16.9. Lösung:

(a) Die Richtung »f messbar $\implies \Gamma_f$ messbar« hatten wir bereits im Beweis von Satz 16.7.

Alternative: Definiere $F: E\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ durch $F(x,t) := f(x)-t$. Da die Abbildungen $(t,x)\mapsto f(x)$ und $(t,x)\mapsto -t$ messbar sind, ist F als Differenz von messbaren Funktionen messbar (bzgl. $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Aus der Definition von F sieht man sofort, dass $\Gamma_f = F^{-1}([0,\infty))$. Aus der Messbarkeit von F folgt somit $\Gamma_f = F^{-1}([0,\infty))\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Umgekehrt sei nun Γ_f messbar. Der »x-Schnitt« bzw. »t-Schnitt« einer Menge ist

$$(\Gamma_f)_x = \{t : (x,t)\in\Gamma_f\}\quad\text{bzw.}\quad(\Gamma_f)_t = \{x : (x,t)\in\Gamma_f\}$$

und nach dem Satz von Fubini sind die Schnitte in $\mathcal{B}[0,\infty)$ bzw. $\mathcal{A}$ enthalten. Somit folgt mit dem Hinweis, dass

$$\{f > \lambda\} \times \{t > 0\} = \bigcup_n \{(x, \lambda + t/n) \in \Gamma_f\} \implies \{f > \lambda\} = \bigcup_n \big(\Gamma_f\big)_{\lambda + t/n} \in \mathcal{A}.$$

Alternative: Es sei $\lambda \geqslant 0$. Es gilt

$$\{f \geqslant \lambda\} = \{x \in E : f(x) \geqslant \lambda\} = \{x \in E : (f(x), \lambda) \in \Gamma_f\} = (\Gamma_f)_\lambda,$$

mit der oben eingeführten Notation für den t-Schnitt. Wie bereits im ersten Lösungsweg bemerkt wurde, folgt aus dem Satz von Tonelli, dass $(\Gamma_f)_\lambda \in \mathcal{A}$. Also ist $\{f \geqslant \lambda\} \in \mathcal{A}$ für alle $\lambda \geqslant 0$. Wegen $f \geqslant 0$ zeigt das bereits die Messbarkeit von f.

Bemerkung: Wenn μ das eindimensionale Lebesgue-Maß ist, dann könnten wir auch so argumentieren: Mit Fubini sehen wir, dass $x \mapsto (\Gamma_f)_x$ messbar ist. Andererseits ist

$$\mu((\Gamma_f)_x) = f(x).$$

(b) Setze $\Gamma'_f := \{(x,t) : 0 \leqslant t < f(x)\}$. Dann gilt $G_f = \Gamma_f \smallsetminus \Gamma'_f$. Nun gilt aber (vgl. den Beweis von Satz 16.7:

$$\int f\,d\mu = \mu \otimes \lambda^1(\Gamma_f)$$

und da $\lambda^1\{t\} = 0$ für jedes $t > 0$ gilt auch

$$\int f\,d\mu = \mu \otimes \lambda^1(\Gamma'_f).$$

Mithin ist dann für integrierbare Funktionen f $\mu\otimes\lambda^1(G_f) = \mu\otimes\lambda^1(\Gamma_f) - \mu\otimes\lambda^1(\Gamma'_f) = 0$. Wenn f nicht integrierbar ist, betrachte man $f_k := (f \wedge k)\mathbb{1}_{A_k}$ wo $A_k \uparrow E$, $\mu(A_k) < \infty$ und man mache sich klar, dass $\bigcup_k G_{f_k} = G_f$.

Alternative (mit Satz von Tonelli): Mit einer analogen Argumentation wie in Teil (a) sieht man, dass $\Gamma'_f := \{(x,t) : 0 \leqslant t < f(x)\}$ messbar ist und damit ist $G_f = \Gamma_f \smallsetminus \Gamma'_f$ messbar. Wegen $(x,t) \in G_f \iff t = f(x)$ und $\lambda^1(\{f(x)\}) = 0$ gilt

$$\int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{G_f}(x,t)\,\lambda^1(dt) = \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{\{f(x)\}}(t)\,\lambda^1(dt) = \lambda^1(\{f(x)\}) = 0$$

für alle $x \in E$. Mit dem Satz von Tonelli folgt nun

$$(\mu \otimes \lambda^1)(G_f) = \int_E \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{G_f}(x,t)\,\lambda^1(dt)\,\mu(dx) = 0.$$

■■

Aufgabe 16.10. Lösung: Ist $p = 1$, so ergibt sich die Behauptung sofort aus dem Satz von Tonelli, also genügt es $p > 1$ zu betrachten. Wir folgen dem Hinweis und setzen

$$U_k(x) := \left(\int_F |u(x,y)|\nu(dy) \wedge k\right) \mathbb{1}_{A_k}(x), \qquad x \in E, k \in \mathbb{N},$$

für eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_k \uparrow E$ und $\mu(A_k) < \infty$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $U_k(x) > 0$ auf einer Menge mit positiven (μ-)Maß (anderenfalls ist der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung gleich 0 und die Behauptung ist trivialerweise erfüllt). Für den konjugierten Index $q = \frac{p}{p-1}$ erhalten wir aus dem Satz von Tonelli und der Hölder-Ungleichung (Satz 14.3):

$$\begin{aligned}
\int_E U_k^p(x)\,\mu(dx) &\leqslant \int_E U_k^{p-1}(x)\left(\int_F |u(x,y)|\nu(dy)\right)\mu(dx)\\
&= \int_F \int_E U_k^{p-1}(x)|u(x,y)|\mu(dx)\,\nu(dy)\\
&\leqslant \int_F \left[\left(\int_E U_k^p(x)\mu(dx)\right)^{1-1/p}\left(\int_E |u(x,y)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p}\right]\nu(dy).
\end{aligned}$$

Teilen wir beide Seiten durch $\left(\int_E U_k^p(x)\,\mu(dx)\right)^{1-1/p}$, ergibt sich

$$\left(\int_E U_k^p(x)\,\mu(dx)\right)^{1/p} \leqslant \int_F \left(\int_E |u(x,y)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p} \nu(dy).$$

Für $k \to \infty$ folgt mit dem Satz von Beppo Levi die Behauptung.

■■

Aufgabe 16.11. Lösung: Weil ϕ monoton ist, sind alle Unstetigkeitsstellen Sprungstellen. O.E. sei ϕ rechtsstetig und wachsend. Zeichnen Sie den Graphen und stellen Sie sich eine Lichtquelle rechts des Graphen vor, die den Schatten des Graphen auf die y-Achse wirft. Dort, wo Sprünge sind, sehen wir ein beleuchtetes Intervall auf der y-Achse. Dieses Intervall hat die Gestalt $[f(t-), f(t)) \neq \emptyset$. Diese Intervalle sind disjunkt und enthalten mindestens eine rationale Zahl, d.h. es kann höchstens abzählbar viele solcher Intervalle geben.

■■

Aufgabe 16.12. Lösung:

(a) Wir haben $F_n \in \mathcal{A}$, weil f messbar ist. Ebenso ist klar, dass $F_n \uparrow F$, wobei $F = \{f > 0\}$. Wegen der Markov-Ungleichung gilt $\mu(F_n) = \mu\{f > 1/n\} \leqslant n\|f\|_{L^1} < \infty$. Die Folge $G_n := F_n \cup \{f = 0\}$ steigt gegen $F \cup \{f = 0\} = E$ auf und es gilt

$$(\mathbb{1}_{\{f>0\}} \cdot \mu)(G_n) = \mu(F_n) < \infty.$$

(b) Wende Satz 16.7 für das σ-endliche Maß ν an. Beachte noch $\mu\{u > t\} = \nu\{u > t\}$ und $\int u\,d\nu = \inf u\,d\mu$.

(c) Das geht nun mit Teil (b) genauso wie im bisherigen Beweis.

■■

17 Unendliche Produkte

Aufgabe 17.1. Lösung: Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ sei $d_k^n := k2^{-n}$. Behauptung:

$$\mathcal{B}([0,1]) = \sigma\Big(\{[d_k^n, d_{k+1}^n] : k, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\{d_k^n\}; k, n \in \mathbb{N}_0\}\Big) = \mathcal{B}. \qquad (\star)$$

Tatsächlich: Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}([0,1])$ wird von den abgeschlossenen Mengen erzeugt (vgl. Satz 2.7) und da sowohl $[d_k^n, d_{k+1}^n]$ als auch $\{d_k^n\}$, $k, n \in \mathbb{N}_0$, abgeschlossen sind, gilt »$\supset$«. Andererseits: Es sei $U \subset [0,1]$ offene Menge. Für jedes $x \in U$ existiert dann $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x) \cap [0,1] \subset U$. Da die dyadischen Zahlen dicht sind, können wir dann n hinreichend groß und k geeignet wählen, so dass $x \in [d_k^n, d_{k+1}^n] \subset U$. Somit ist

$$U = \bigcup_{\substack{k,n \in \mathbb{N}_0 \\ [d_k^n, d_{k+1}^n] \subset U}} [d_k^n, d_{k+1}^n] \in \mathcal{B}$$

Da es sich bei der Menge auf der rechten Seite in $(\star)$ um einen schnittstabilen Erzeuger handelt, genügt es gemäß dem Maß-Eindeutigkeitssatz, Satz 4.5, zu zeigen, dass die beiden Maße auf diesem übereinstimmen. Wir bemerken, dass wir für jedes feste $k, n \in \mathbb{N}_0$ eine Darstellung der Form

$$d_k^n = \sum_{j=0}^n y_j 2^{-j}$$

finden können wobei $y_j \in \{0,1\}$ von k, n abhängen.

- $A = \{d_n^k\}$: Nach Definition gilt

  $$f^{-1}(A) = \{y_1\} \times \cdots \times \{y_n\} \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$$

  für

  $$A_j = \{y_1\} \times \cdots \times \{y_n\} \underbrace{\times \{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{j \text{ mal}} \times \{0,1\} \times \ldots .$$

  Aus der Stetigkeit des Maßes folgt somit

  $$\mathbb{P} \circ f^{-1}(A) = \lim_{j \to \infty} \mathbb{P} \circ f^{-1}(A_j) = \lim_{j \to \infty} \underbrace{\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{n+j \text{ mal}} 1 \cdots = 0.$$

  Das zeigt $\lambda^1(A) = 0 = \mathbb{P} \circ f^{-1}(A)$.

- $A = [d_k^n, d_{k+1}^n]$: Es ist

  $$f^{-1}(A) = \{y_1\} \times \cdots \times \{y_n\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots ,$$

also

$$\mathbb{P} \circ f^{-1}(A) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{\text{n mal}} 1 \cdots = \frac{1}{2^n} = \lambda([d_k^n, d_{k+1}^n]).$$

Aufgabe 17.2. Lösung: Wir wissen bereits, dass $\emptyset, \Omega_I \in \mathcal{Z}_\cup^\square$. Weiter haben wir im Beweis des Lemmas gezeigt, dass $U \in \mathcal{Z}_\cup^\square \implies U^c \in \mathcal{Z}_\cup^\square$. Die Stabilität von $\mathcal{Z}_\cup^\square$ unter endlichen Vereinigungen ist, nach Definition, trivial. Schließlich gilt für $U, V \in \mathcal{Z}_\cup^\square$ mit $U = \bigcup_{n<\infty} X_n$, $V = \bigcup_{m<\infty} Y_m$ (endliche Vereinigungen von $\mathcal{Z}^\square$-Mengen) dass

$$U \cap V = \underbrace{\bigcup_{n<\infty} \bigcup_{m<\infty}}_{\text{endlich}} \overbrace{X_n \cap Y_m}^{\in \mathcal{Z}^\square} \in \mathcal{Z}_\cup^\square.$$

Weil $U \setminus V = U \cap V^c$ haben wir gezeigt, dass $\mathcal{Z}_\cup^\square$ unter allen endlichen Mengenoperationen stabil ist, d.h. eine Algebra ist.

Aufgabe 17.3. Lösung: Wir schreiben Σ für die Vereinigung auf der r.S. Weil $\mathcal{A}_I \supset \mathcal{Z}_K$ gilt, ist »$\supset$« klar.

Umgekehrt: $\mathcal{Z}_i = \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subset \Sigma$ für alle $i \in I$. Wenn wir zeigen, dass Σ eine σ-Algebra ist, dann folgt $\mathcal{A}_I \subset \Sigma$, da $\mathcal{A}_I = \sigma(\pi_i, \ i \in I)$.

Nun ist jedes $\mathcal{Z}_K$ eine σ-Algebra. Die Eigenschaften »$\emptyset \in \Sigma$« und »$S \in \Sigma \implies S^c \in \Sigma$« sind daher klar. Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine abzählbare Menge $K_n \subset I$ mit $S_n \in \mathcal{Z}_{K_n}$. Weil $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ immer noch abzählbar ist, folgt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_K$, also $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \in \mathcal{Z}_K \subset \Sigma$.

18 Der Kolmogorovsche Erweiterungssatz

Aufgabe 18.1. Lösung:

(a) Folgt direkt aus Bemerkung 2.2.a)–d), wobei wir 2.2.c) nur für endliche Schnitte haben.

(b) Nach Def. eines Halbrings gilt $S \setminus R \in \mathcal{S}_\cup$ für $R, S \in \mathcal{S}$. Wenn $E \in \mathcal{S}$ gilt also $S^c = E \setminus S \in \mathcal{S}_\cup$ für alle $S \in \mathcal{S}$. Wenn $S' = S_1 \cup \dots \cup S_n \in \mathcal{S}_\cup$ und $R \in \mathcal{S}$ ist offensichtlich

$$S' \setminus R = \bigcup_{i<\infty} \underbrace{(S_i \setminus R)}_{\text{endl. } \cup \text{ von } \mathcal{S}\text{-Mengen}} \in \mathcal{S}_\cup.$$

Mithin,

$$(S')^c = E \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_n) = E \cap (S_1^c \cap \dots \cap S_n^c) = E \setminus S_1 \setminus S_2 \dots \setminus S_n$$

und wir können durch Iteration $(S')^c \in \mathcal{S}_\cup$ sehen. Die Vereinigungsstabilität von $\mathcal{S}_\cup$ ist trivial. Damit greift Teil (a) und wir sehen, dass $\mathcal{S}_\cup$ eine Algebra ist. Weil die von $\mathcal{S}$ erzeugte Algebra $\mathcal{A}$ Vereinigungen von $\mathcal{S}$-Mengen enthält, gilt trivialerweise $\mathcal{S}_\cup \subset \mathcal{A}$ während $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_\cup$ wegen der Minimalität von $\mathcal{A}$ gilt.

(c) Es ist $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$ und wegen $0 \leqslant \mu(\emptyset) < \infty$ folgt $\mu(\emptyset) = 0$. Daher folgt die Subadditivität fast wörtlich aus Satz 3.3.

■■

Aufgabe 18.2. Lösung: Es gilt

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i \Big\backslash \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Y_k = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k^c = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i \cap Y_k^c \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k \cap Y_k^c = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k \setminus Y_k.$$

■■

Aufgabe 18.3. Lösung:

(a) Wir müssen (OM_1)–(OM_3) nachweisen.

(OM_1) $\mathbb{P}^*(\emptyset) = 0$ ist trivial.

(OM_2) Es seien $C \subset C'$ beliebig und $A' \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$A' \supset C' \implies A' \supset C \implies \mathbb{P}^*(C) \leqslant \mathbb{P}(A')$$

Nun bilden wir das Infimum über alle $A' \supset C'$, $A' \in \mathcal{A}$ und erhalten $\mathbb{P}^*(C) \leqslant \mathbb{P}^*(C')$.

(OM_3) Es seien C_n, $n \in \mathbb{N}$, beliebige Mengen und $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Nach Definition von $\mathbb{P}^*$ gilt

$$\forall \epsilon > 0,\ n \in \mathbb{N} \quad \exists A_n \in \mathcal{A},\ A_n \supset C_n\ :\ \mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}^*(C_n) + \epsilon 2^{-n}.$$

Wir summieren nun diese Ungleichungen und verwenden die σ-Subadditivität von $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^*(C_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^*(C_n) \leqslant \epsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = \epsilon.$$

Weil $\mathcal{A} \ni \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset C$, folgt

$$\mathbb{P}^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^*(C_n) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^*(C_n) \leqslant \epsilon$$

und weil $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\mathbb{P}^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^*(C_n)$.

(b) Da $\Omega' \cap \mathcal{A}$ die Spur-σ-Algebra ist, ist nichts zu zeigen. Wir müssen eigentlich nur die Wohldefiniertheit des Maßes $\mathbb{P}'$ zeigen. Sei also $A' \in \mathcal{A}'$ und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\Omega' \cap A = \Omega' \cap B \neq \emptyset$. Wir müssen $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ zeigen.

Wegen $\Omega' \cap A = \Omega' \cap B$ folgt $A \setminus B \subset (\Omega')^c$ und $B \setminus A \subset (\Omega')^c$. Mithin

$$\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \leqslant 2\mathbb{P}^*(\Omega \setminus \Omega') = 0$$

und wir schließen daraus, dass $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B \cup (A \setminus B)) = \mathbb{P}(B)$ bzw. $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A)$, also $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ gilt.

(c) Nach Def. gilt $\phi_n : \Omega_n \to \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, $\omega \to (\omega, \ldots, \omega)$. Es seien $A_i \in \Omega_i \cap \mathcal{A}$, also $A_i = \Omega_i \cap A_i'$ mit $A_i' \in \mathcal{A}$. Offenbar gilt, da die Mengen Ω_n absteigend sind,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{n+1} \circ \phi_{n+1}^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1}) &= \mathbb{P}_{(1,2,\ldots,n,n+1)}(A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}_{n+1}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap \Omega_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}_{n+1}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_1' \cap \cdots \cap A_n').
\end{aligned}$$

Mit derselben Rechnung sehen wir aber auch

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n \circ \phi_n^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_n) &= \mathbb{P}_n(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_1' \cap \cdots \cap A_n'),
\end{aligned}$$

und daraus folgt die Projektivität.

(d) Es gilt $\Delta_n = \{(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \times_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i \mid \omega_1 = \cdots = \omega_n\}$, d.h.

$$\Delta_n = \{\{\omega\} \times \cdots \times \{\omega\} \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \ldots \mid \omega \in \Omega_n\}.$$

Damit ist $\Delta_n \subset \Omega_n^n \times \Omega_{n+1} \times \cdots \subset \Omega_n \times \times_{i\geqslant 2} \Omega_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \emptyset$, weil $\Omega_n \downarrow \emptyset$.

Die Messbarkeit von Δ_n folgt aus $\Delta_n \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i \times \bigotimes_{k\geqslant n+1} \mathcal{A}_k$, wobei wir hier die Messbarkeit der Diagonalen verwenden:

$$\{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega^n \mid \omega_1 = \dots = \omega_n\} \in \mathcal{A}^{\otimes n}$$

und

$$\begin{aligned}
&\{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \mid \omega_1 = \dots = \omega_n\} \\
&= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega^n \mid \omega_1 = \dots = \omega_n\} \cap (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n) \\
&\in (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n) \cap \mathcal{A}^{\otimes n} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Der letzte Schritt in der gerade angestellten Rechnung ist intuitiv klar, aber Messbarkeit ist immer lästig. Daher sollte man sich zur Sicherheit schon noch formal überlegen, dass $(X \cap \mathcal{A}) \otimes (Y \cap \mathcal{B}) = (X \times Y) \cap (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Das geht so: Wenn $(X \cap A) \times (Y \cap B) \in (X \cap \mathcal{A}) \times (Y \cap \mathcal{B})$ dann gilt auch

$$\begin{aligned}
(X \cap A) \times (Y \cap B) = (X \times Y) \cap (A \times B) \in (X \times Y) \cap (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \\
\implies (X \cap \mathcal{A}) \otimes (Y \cap \mathcal{B}) \subset (X \times Y) \cap (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Umgekehrt können wir $\sigma(X \cap \mathcal{G}) = X \cap \sigma(\mathcal{G})$ verwenden (vgl. Aufgabe 2.5), um zu sehen, dass $(X \times Y) \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ ein Erzeuger von $(X \times Y) \cap (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ist. Nun ist

$$(X \times Y) \cap (A \times B) = (X \cap A) \times (Y \cap B) \in (X \cap \mathcal{A}) \otimes (Y \cap \mathcal{B})$$

und die andere Inklusion folgt.

(e) Sei nun μ ein W-maß auf dem unendlichen Produktraum mit $\pi_{(1,\dots,n)}(\mu) = \mathbb{P}_{(1,\dots,n)}$. Dann ist $\mu(\Delta_n) = \mathbb{P}_{(1,\dots,n)}(E_n)$ mit $E_n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n)\ \omega_1 = \dots = \omega_n \in \Omega_n\}$. Aber nun gilt

$$\mathbb{P}_{(1,\dots,n)}(E_n) = \mathbb{P}_n(\phi_n^{-1}(E_n)) = \mathbb{P}_n(\Omega_n) = 1.$$

■■

19 Bildintegrale und Faltung

Aufgabe 19.1. Lösung:

(a) Nach dem Satz von Weierstraß sind stetige Funktionen über kompakten Mengen beschränkt. Da u einen kompakten Träger $K := \operatorname{supp} u$ besitzt, ist daher $\|u\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u(x)| < \infty$. (Beachte, dass $u(x) = 0$ für alle $x \notin \operatorname{supp} u$.) Aus der Kompaktheit von K folgt, dass ein $R > 0$ existiert mit $K \subset B_R(0)$. Damit

$$\int |u(x)|\,dx = \int_K \underbrace{|u(x)|}_{\leqslant \|u\|_\infty}\,dx \leqslant \|u\|_\infty\, \lambda^d(K) \leqslant \|u\|_\infty\, \lambda^d(B_R(0)) = \|u\|_\infty\, R^d < \infty.$$

(b) Um $\int u(Ax)\,dx$ zu berechnen, wenden wir zunächst den Transformationssatz, Korollar 19.2, mit $T(x) := Ax$ an:

$$\int u(Ax)\,\lambda(dx) = \int u(y)\,A(\lambda)(dy).$$

Aus Satz 3.7c) folgt nun

$$\int u(Ax)\,\lambda(dx) = \int u(y)\,A(\lambda)(dy) \overset{3.7}{=} |\det A|^{-1} \int u(y)\,\lambda(dy).$$

Diese Identität können wir benutzen, um $\int u(nx)\,dx$ zu bestimmen. Dazu beobachte man, dass $u(nx) = u(Ax)$ für $A := nE_d$ wobei E_d die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^d$ bezeichne. Wegen $\det A = n^d$ folgt damit sofort

$$\int u(nx)\,\lambda(dx) = \frac{1}{n^d} \int u(y)\,d\lambda(y).$$

■■

Aufgabe 19.2. Lösung: Aus der Definition der Faltung (Definition 19.5) und dem Satz von Tonelli folgt

$$\begin{aligned}
\delta_x * \delta_y(B) &= \iint \mathbb{1}_B(u+v)\,\delta_x(du)\,\delta_y(dv) \\
&= \int \left(\int \mathbb{1}_B(u+v)\,\delta_x(du) \right) \delta_y(dv) \\
&= \int \mathbb{1}_B(x+v)\,\delta_y(dv) \\
&= \mathbb{1}_B(x+y) = \delta_{x+y}(B)
\end{aligned}$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Das zeigt $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$. Analog erhält man

$$\delta_x * \mu(B) = \iint \mathbb{1}_B(u+v)\,\delta_x(du)\,\mu(dv)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left(\int \mathbb{1}_B(u+v)\,\delta_x(du) \right) \mu(dv) \\
&= \int \mathbb{1}_B(x+v)\,\mu(dv) \\
&= \int \mathbb{1}_B(\tau_{-x}(v))\,\mu(dv)
\end{aligned}
$$

wobei $\tau_{-x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto v + x$ die Translation um x bezeichnet. Der Transformationssatz, Korollar 19.2, zeigt

$$
\delta_x * \mu(B) = \int \mathbb{1}_B(v) \tau_{-x}(\mu)(dv) = \tau_{-x}(\mu)(B).
$$

Aufgabe 19.3. Lösung: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) &= \mathbb{1}_{[-x,-x+1]}(-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) \\
&= \mathbb{1}_{[x-1,x]}(y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) \\
&= \begin{cases} 0, & x < 0 \,\text{oder}\, x > 2, \\ \mathbb{1}_{[0,x]}(y), & x \in [0,1], \\ \mathbb{1}_{[x-1,1]}, & x \in [1,2]. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

Folglich

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]})(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dy \\
&= \begin{cases} 0, & x < 0 \,\text{oder}\, x > 2, \\ \int_0^x dy = x, & x \in [0,1], \\ \int_{x-1}^1 dy = 2-x, & x \in [1,2], \end{cases} \\
&= x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x).
\end{aligned}
$$

Die Linearität und Kommutativität der Faltung impliziert nun

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]})(x) &= \big(\mathbb{1}_{[0,1]} * (\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]})\big)(x) \\
&= \int \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)(y\mathbb{1}_{[0,1]}(y) + (2-y)\mathbb{1}_{[1,2]}(y))\,dy \\
&= \int y\mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dy + \int (2-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\mathbb{1}_{[1,2]}(y)\,dy \\
&=: I_1(x) + I_2(x).
\end{aligned}
$$

Wir berechnen die beiden Integralausdrücke getrennt. Für das erste Integral folgt aus $(*)$:

$$
\begin{aligned}
I_1(x) &= \begin{cases} 0, & x > 0 \,\text{oder}\, x > 2, \\ \int_0^x y = \frac{x^2}{2}, & x \in [0,1], \\ \int_{1-x}^1 y\,dy = \frac{1}{2}(1-(1-x)^2), & x \in [1,2]. \end{cases} \\
&= \frac{x^2}{2}\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{2}(1-(1-x)^2)\mathbb{1}_{[1,2]}(x).
\end{aligned}
$$

Für den zweiten Integralausdruck führen wir eine ähnliche Rechnung wie in $(*)$ durch:

$$\mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\mathbb{1}_{[1,2]}(y) = \mathbb{1}_{[x-1,x]}(y)\mathbb{1}_{[1,2]}(y) = \begin{cases} 0, & x < 1 \,\text{oder}\, x > 3, \\ \mathbb{1}_{[1,x]}(y), & x \in [1,2], \\ \mathbb{1}_{[x-1,2]}(y), & x \in [2,3]. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \begin{cases} 0, & x < 1 \,\text{oder}\, x > 3, \\ \int_1^x (2-y)\,dy = 2(x-1) - \frac{1}{2}(x^2-1), & x \in [1,2], \\ \int_{x-1}^2 (2-y)\,dy = 2(3-x) - \frac{1}{2}(4-(1-x)^2), & x \in [2,3] \end{cases} \\ &= \left(2(x-1) - \frac{1}{2}(x^2-1)\right)\mathbb{1}_{[1,2]}(x) + \left(2(1+x) - \frac{1}{2}(4-(1-x)^2)\right)\mathbb{1}_{[2,3]}(x). \end{aligned}$$

Schließlich

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]})(x) = \frac{x^2}{2}\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \left(-x^2 + 3x - \frac{3}{2}\right)\mathbb{1}_{[1,2]}(x) + \\ \left(2(3-x) - \frac{1}{2}(4-(1-x)^2)\right)\mathbb{1}_{[2,3]}(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 19.4. Lösung: Man beachte, dass diese Aussage äquivalent zu

$$(\overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} w})^c \subset (\operatorname{supp}(u * w))^c$$

ist. Sei also $x_0 \in (\overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} w})^c$. Da die Menge offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset (\overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} w})^c$. Wähle $x \in B_r(x_0)$ beliebig. Für alle $y \in \operatorname{supp} w$ gilt dann $x - y \notin \operatorname{supp} u$. Insbesondere ist

$$u(x-y)\cdot w(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in \operatorname{supp} w.$$

Andererseits gilt (nach Definition des Trägers)

$$u(x-y)\cdot w(y) = 0 \quad \text{für alle } y \notin \operatorname{supp} w.$$

Damit folgt, dass $u(x-y)w(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Aus der Definition der Faltung ist nun sofort ersichtlich, dass $(u * w)(x) = 0$. Da dies für beliebige $x \in B_r(x_0)$ gilt, folgt $x_0 \notin \operatorname{supp}(u * w)$.

Aufgabe 19.5. Lösung:

(a) Da u, w messbar sind, ist auch $(x,y) \mapsto u(xy^{-1})w(y)$ messbar. Aus dem Satz von Tonelli, Satz 16.1, folgt daher die Messbarkeit von $x \mapsto u \circledast w(x)$. Um die Kommutativität zu zeigen, wenden wir den Transformationssatz, Satz 21.4, mit $z := \Phi(y) := xy^{-1}$ an:

$$u \circledast w(x) = \int_{(0,\infty)} u(xy^{-1})w(y)\frac{dy}{y}$$

$$= \int_{(0,\infty)} u(z)w(xz^{-1})\frac{dz}{z}$$
$$= w \circledast u(x).$$

Um die verbleibende Aussage zu beweisen, wenden wir zunächst den Satz von Tonelli, Satz 16.1, an:

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} u \circledast w(x)\,\mu(dx) &= \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} u(xy^{-1})w(y)\frac{dy}{y}\right)\frac{dx}{x}\\ &= \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} u(xy^{-1})\,\frac{dx}{x}\right)w(y)\,\frac{dy}{y}. \qquad (\star)\end{aligned}$$

Für festes $y \in (0,\infty)$ definieren wir $\theta_y := y^{-1}x$. Aus Satz 3.7 wissen wir, dass das Bildmaß $\theta_y(\lambda)(dz)$ des Lebesgue-Maßes λ unter θ_y durch $y\lambda(dz)$ gegeben ist (vgl. auch Aufgabe 4.9). Aus Korollar 19.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} u(xy^{-1})\,\frac{dx}{x} &= y^{-1}\int_{(0,\infty)} u(xy^{-1})\frac{dx}{xy^{-1}}\\ &= y^{-1}\int_{(0,\infty)} u(z)\frac{\theta_y(\lambda)(dz)}{z}\\ &= \int_{(0,\infty)} u(z)\frac{dz}{z}. \qquad (\star\star)\end{aligned}$$

(Alternativ kann man wieder mit dem Transformationssatz, Satz 21.4, argumentieren.) Setzen wir dieses Ergebnis in $(\star)$ ein, so folgt

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} u \circledast w(x)\,\mu(dx) &= \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} u(z)\frac{dz}{z}\right)w(y)\frac{dy}{y}\\ &= \int_{(0,\infty)} u\,d\mu \int_{(0,\infty)} w\,d\mu.\end{aligned}$$

(b) Wir betrachten zunächst den Fall $p = \infty$: Aus $|u(xy^{-1})| \leqslant \|u\|_{L^\infty(\mu)}$ für μ-fast alle $y \in (0,\infty)$ folgt

$$|u \circledast w(x)| \leqslant \int |u(xy^{-1})w(y)|\,\mu(dy) \leqslant \|u\|_{L^\infty}\int |w(y)|\,\mu(dy) = \|u\|_{L^\infty}\|w\|_{L^1}.$$

Das zeigt $\|u \circledast w\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^\infty}\|w\|_{L^1}$. Es sei nun $p \in [1,\infty)$. Wir bemerken, dass

$$\nu(dy) := \frac{1}{\|w\|_{L^1}}|w(y)|\,\mu(dy)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert. Aus der Jensenschen Ungleichung (angewendet mit $V(x) = x^p$) erhalten wir daher

$$\begin{aligned}|u \circledast w(x)|^p &\leqslant \left(\int_{(0,\infty)} |u(xy^{-1})||w(y)|\,\mu(dy)\right)^p\\ &= \|w\|_{L^1}^p\left(\int_{(0,\infty)} |u(xy^{-1})|\,\nu(dy)\right)^p\\ &\leqslant \|w\|_{L^1}^p\int_{(0,\infty)} |u(xy^{-1})|^p\,\nu(dy)\\ &= \|w\|_{L^1}^{p-1}\int_{(0,\infty)} |u(xy^{-1})|^p|w(y)|\,\mu(dy).\end{aligned}$$

Aus dem Satz von Tonelli, Satz 16.1, folgt somit

$$\begin{aligned}\int |u \circledast w(x)|^p \, d\mu(x) &\leqslant \|w\|_{L^1}^{p-1} \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} |u(xy^{-1})|^p |w(y)| \, \mu(dy) \right) \mu(dx) \\ &= \|w\|_{L^1}^{p-1} \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} |u(xy^{-1})|^p \, \mu(dx) \right) |w(y)| \, \mu(dy).\end{aligned}$$

Genau wie in $(\star\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} |u(xy^{-1})|^p \, \mu(dx) &\overset{\text{def}}{=} \int_{(0,\infty)} |u(xy^{-1})|^p \, \frac{dx}{x} = \int_{(0,\infty)} |u(z)|^p \, \frac{dz}{z} \\ &\overset{\text{def}}{=} \int_{(0,\infty)} |u(z)|^p \, \mu(dz).\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in die vorherige Ungleichungskette ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int |u \circledast w(x)|^p \, d\mu(x) &\leqslant \|w\|_{L^1}^{p-1} \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,\infty)} |u(z)|^p \, \mu(dz) \right) |w(y)| \, \mu(dy) \\ &= \|w\|_{L^1}^{p-1} \int |u|^p \, d\mu \int |w| \, d\mu \\ &= \|w\|_{L^1} \|u\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

Ziehen der p-ten Wurzel auf beiden Seiten gibt

$$\|u \circledast w\|_{L^p} \leqslant \|w\|_{L^1} \|u\|_{L^p}.$$

■■

Aufgabe 19.6. Lösung: Die Messbarkeit von $u * w$ folgt wie im Beweis von Satz 19.7. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r},$$

also

$$\frac{1}{r} + \underbrace{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)}_{=1-q^{-1}\in[0,1)} + \underbrace{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)}_{=1-p^{-1}\in[0,1)} = 1. \tag{$\star$}$$

Wir schreiben

$$|u(x-y)w(y)| = \left(|u(x-y)|^{p/r}|w(y)|^{q/r}\right)\left(|u(x-y)|^{1-p/r}\right)\left(|w(y)|^{1-q/r}\right)$$

und wenden die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung (siehe Problem 14.3) mit den Exponenten aus $(\star)$ an:

$$\begin{aligned}|u * w(x)| &\leqslant \int |u(x-y)w(y)| \, dy \\ &\leqslant \left(\int |u(x-y)|^p |w(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int |u(x-y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int |w(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Bilden wir auf beiden Seiten die r-te Potenz, so folgt auf Grund der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$|u * w(x)|^r \leqslant \left(\int |u(x-y)|^p |w(y)|^q \, dy \right) \|u\|_p^{r-p} \|w\|_q^{r-q}$$

$$= |u|^p * |w|^q(x) \|u\|_p^{r-p} \|w\|_q^{r-q}. \tag{$\star\star$}$$

Nun können wir beide Seiten (über x) integrieren und Satz 19.7 anwenden:

$$\begin{aligned}
\|u * w\|_r^r &\overset{\text{def}}{=} \int |u * w(x)|^r \, dx \\
&\overset{(\star\star)}{\leqslant} \|u\|_p^{r-p} \|w\|_q^{r-q} \int |u|^p * |w|^q(x) \, dx \\
&= \|u\|_p^{r-p} \|w\|_q^{r-q} \||u|^p * |w|^q\|_1 \\
&\overset{19.7}{\leqslant} \|u\|_p^{r-p} \|w\|_q^{r-q} \|u\|_p^p \|w\|_q^q \\
&= \|u\|_p^r \|w\|_q^r.
\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 19.7. Lösung:

(a) $\phi \in C^\infty$: Da ϕ rotationsinvariant ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\psi(r) := \exp\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right) \mathbb{1}_{(-1,1)}(r)$$

beliebig oft differenzierbar ist. Der Beweis ist Standard und daher geben wir nur eine Beweisskizze.

Für $r \neq 1$ ist dies Differenzierbarkeit von ψ offensichtlich, wir beschränken uns daher auf die Diskussion für $r = \pm 1$. Nach Definition ist $\psi(\pm 1) = 0 = e^{-1/0} = e^{-\infty}$ und somit ist ψ stetig in $r = \pm 1$. Die Differenzierbarkeit zeigt man per Indukion: Es gilt

$$\psi'(r) = \frac{2r}{1 - r^2} \exp\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right) \mathbb{1}_{(-1,1)}(r).$$

Ist $\psi^{(k)}$ von der Form $\psi^{(k)}(r) = f_k(r) e^{\frac{1}{r^2-1}} \mathbb{1}_{(-1,1)}(r)$, so gilt

$$\psi^{(k+1)}(r) = f_k'(r) \exp\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right) \mathbb{1}_{(-1,1)}(r) + f_k(r) \frac{2r}{1 - r^2} \exp\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right) \mathbb{1}_{(-1,1)}(r).$$

Ist also f_k eine gebrochen rationale Funktion deren Wachstum für $t \to \pm 1$ nicht so stark ist wie der Abfall von $e^{\frac{1}{r^2-1}}$ für $t \to \pm 1$, so gilt dies auch für f_{k+1}. Per Induktion erhalten wir somit, dass ψ beliebig oft differenzierbar in $r \pm 1$ ist und $\psi^{(k)}(\pm 1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die Eigenschaften $\operatorname{supp} \phi = \overline{B_1(0)}$ und $\phi \geqslant 0$ sind klar aus der Definition. Damit $\int \phi \, d\lambda^n = 1$ gilt, müssen wir

$$\kappa^{-1} = \int_{B_1(0)} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) dx$$

wählen.

(b) $\phi_\epsilon \in C^\infty$ folgt sofort aus der Kettenregel. Aus

$$\phi_\epsilon(x) = 0 \Leftrightarrow \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{\epsilon}\right| \geqslant 1 \Leftrightarrow |x| \geqslant \epsilon$$

sehen wir $\operatorname{supp}\phi_\epsilon = \overline{B_\epsilon(0)}$. Wir müssen noch zeigen, dass $\|\phi_\epsilon\|_1 = 1$. Dazu bemerken wir zunächst, dass

$$\frac{x}{\epsilon} = Mx \quad \text{für } M := \begin{pmatrix} \epsilon^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt $\det M = \epsilon^{-n}$. Aus Satz 3.7 erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^n}\int \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx &= \frac{1}{\epsilon^n}\int \phi(Mx)\,dx \\ &\overset{19.2}{=} \frac{1}{\epsilon^n}\int \phi(y)\,(M\lambda^n)(dy) \\ &\overset{3.7}{=} \frac{1}{\epsilon^n}\int \phi(y)(\epsilon^n)\,dy \\ &= \int \phi(y)\,dy = 1. \end{aligned}$$

(c) Wir zeigen allgemeiner, dass

$$\operatorname{supp} u * w \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} w \tag{$\star$}$$

sofern die Faltung $u * w$ Sinn ergibt und entweder $\operatorname{supp} u$ oder $\operatorname{supp} w$ kompakt ist.

Es sei $x_0 \notin \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} w$. Da $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} w$ abgeschlossen ist, existiert $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x_0) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} w$. Dann gilt $x - y \notin \operatorname{supp} u$ für alle $y \in \operatorname{supp} w$, $x \in B_\epsilon(x_0)$ und daher

$$u(x-y)w(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in \operatorname{supp} w.$$

Da $w(y) = 0$ für alle $y \notin \operatorname{supp} w$, gilt die letzte Gleichheit trivialerweise auch für $y \notin \operatorname{supp} w$. Folglich ist

$$\int u(x-y)w(y)\,dy = 0 \quad \text{für alle } x \in B_\epsilon(x_0).$$

Wir haben damit gezeigt, dass $x_0 \notin \operatorname{supp} u * w$; also

$$(\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} w)^c \subset (\operatorname{supp} u * w)^c.$$

Bemerkung: Beachte, dass die Summe $A + B$ zweier abgeschlossener Mengen A und B im Allgemeinen nicht abgeschlossen ist. Ist A jedoch zusätzlich kompakt, so ist $A + B$ abgeschlossen. Daher nehmen wir hier an, dass entweder $\operatorname{supp} u$ oder $\operatorname{supp} w$ kompakt ist; vgl. auch Aufgabe 19.4.

(d) Es folgt direkt aus Satz 19.7, dass

$$\|\phi_\epsilon * u\|_p \leqslant \|\phi_\epsilon\|_1 \cdot \|u\|_p = \|u\|_p. \tag{$\star\star$}$$

Weiterhin impliziert $\phi_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ offensichtlich $\partial^\alpha \phi_\epsilon \in C_c^\infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Insbesondere ist $u * (\partial^\alpha \phi_\epsilon)$ wohldefiniert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir im Folgenden den Fall $\epsilon = 1$.

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \leqslant R$ für $R > 0$. Wegen

$$y \notin \overline{B_R(0)} \implies y \notin \overline{B_1(x)} \implies \phi(x-y) = 0$$

gilt

$$\phi * u(x) = \int_{\overline{B_{R+1}(0)}} \phi(x-y)u(y)\,dy.$$

Weiterhin ist

$$|\partial_x^\alpha(\phi(x-y)u(y)| = |\partial_x^\alpha\phi(x-y)||u(y)| \leqslant \|\partial_x^\alpha\phi\|_\infty |u(y)| \in \mathcal{L}^1(\overline{B_{R+1}(0)}).$$

(Beachte: $\mathcal{L}^1(\overline{B_{R+1}(0)})$ ist ein endlicher Maßraum. Aus $u \in \mathcal{L}^p(\overline{B_{R+1}(0)}) \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ folgt daher $u \in \mathcal{L}^1(\overline{B_{R+1}(0)})$, vgl. Aufgabe 14.1.) Folglich dürfen wir das Differenzierbarkeitslemma, Satz 12.2, anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha(\phi * u)(x) &= \partial_x^\alpha \int \phi(x-y)u(y)\,dy\\ &= \int \partial_x^\alpha\phi(x-y)u(y)\,dy\\ &= (\partial_x^\alpha\phi) * u(x).\end{aligned}$$

Das zeigt, dass $\phi * u$ beliebig oft in x differenzierbar ist. Da $R > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

(e) Da $\int \phi_\epsilon(y)\,dy = 1$ folgt aus der Minkowski-Ungleichung für Integrale, Aufgabe 16.10,

$$\begin{aligned}\|u - u * \phi_\epsilon\|_p &= \left(\int\left|\int \big(u(x) - u(x-y)\big)\phi_\epsilon(y)\,dy\right|^p dx\right)^{1/p}\\ &\leqslant \int \|u(\cdot) - u(\cdot - y)\|_p\,\phi_\epsilon(y)\,dy\\ &= \left\{\int_{|y|\leqslant h} + \int_{|y|>h}\right\}\|u(\cdot) - u(\cdot - y)\|_p\,\phi_\epsilon(y)\,dy.\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Abbildung $y \mapsto \|u(\cdot) - u(\cdot - y)\|_p$, vgl. Satz **??**, dass für jedes $\delta > 0$ ein $h = h(\delta) > 0$ existiert, so dass

$$\|u(\cdot) - u(\cdot - y)\|_p \leqslant \delta \quad \text{für alle } |y| \leqslant h.$$

Benutzen wir diese Abschätzung im ersten Term und die Dreiecksungleichung (in L^p) und die Translationsinvarianz für den zweiten Term, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\|u - u \star \phi_\epsilon\|_p &\leqslant \int_{|y|\leqslant h} \delta\,\phi_\epsilon(y)\,dy + \int_{|y|>h} 2\|u\|_p\,\phi_\epsilon(y)\,dy\\ &\leqslant \delta\int \phi_\epsilon(y)\,dy + 2\|u\|_p \int_{|y|>h} \phi_\epsilon(y)\,dy\\ &\leqslant \delta + 2\|u\|_p \int_{|y|>h} \phi_\epsilon(y)\,dy.\end{aligned}$$

Lassen wir nun erst $\epsilon \to 0$ (beachte, dass $\operatorname{supp}\phi_\epsilon = \overline{B_\epsilon(0)}$!) und dann $\delta \to 0$, so erhalten wir

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \|u - u \star \phi_\epsilon\|_p \leqslant \delta \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Aufgabe 19.8. Lösung:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $u_n := (u \wedge n)\mathbb{1}_{B_n(0)}$ und $w_n := (w \wedge n)\mathbb{1}_{B_n(0)}$. Die Funktionen u_n, w_n sind messbar und steigen gegen u, w auf. Daher folgt mit Beppo Levi

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \,:\, u_n * w_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_n(x-y)w_n(y)\,dy \uparrow \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)w(y)\,dy = u * w(x).$$

Mit Hilfe von Satz 19.9 sehen wir, dass $u_n * w_n \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Daher ist für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{u_n * w_n > a\}$ offen und ebenso $\{u * w > a\} = \bigcup_n \{u_n * w_n > a\}$.

(b) **Achtung Druckfehler:** Es muß $\{u \neq 0\} + \{w \neq 0\} := \{x + y \mid x \in \{u \neq 0\}, y \in \{w \neq 0\}\} = \{x + y \mid u(x) \neq 0, w(y) \neq 0\}$ heißen, nicht »$\cup$«.

Offensichtlich gilt

$$|u * w|(x) \leqslant |u| * |w|(x) = \int |u(x-y)||w(y)|\,dy.$$

Folglich: Wenn $x \in \{u * w \neq 0\} = \{|u * w| > 0\}$ ist, also wenn $u * w(x) \neq 0$ gilt, dann muss es ein y geben, so dass $w(y) \neq 0$ (also $|w(y)| > 0$) und $u(x-y) \neq 0$ (also $|u(x-y)| > 0$) gilt. Das heißt aber, dass $x \in \{w \neq 0\} + \{u \neq 0\}$ gilt, und es folgt

$$\begin{aligned}\{u * w \neq 0\} = \{|u * w| \neq 0\} = \{|u * w| > 0\} \subset \{|u| * |w| > 0\}\\ \subset \{|u| > 0\} + \{|w| > 0\} = \{u \neq 0\} + \{w \neq 0\}.\end{aligned}$$

(c) Bus Teil (a) wissen wir, dass die Funktion $f_B := \mathbb{1}_{-B} * \mathbb{1}_B$ unterhalbstetig ist. Weil $f_B \geqslant 0$ ist, ist die Menge $\{f_B > 0\} = \{f_B \neq 0\}$ offen. Wir behaupten, dass $0 \in \{f_B \neq 0\}$. Das folgt so:

$$f_B(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{-B}(0-y)\mathbb{1}_B(y)\,dy = \lambda^d(B) > 0.$$

Nach Teil (b) gilt aber auch

$$\{f_B \neq 0\} \subset \{\mathbb{1}_B \neq 0\} + \{\mathbb{1}_{-B} \neq 0\} = B + (-B) = B - B$$

und daraus folgt die Behauptung.

---

20 Der Satz von Radon–Nikodým

Aufgabe 20.1. Lösung:

(a) $\Rightarrow$: Ist ν ein endliches Maß, so gilt per Definition

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu < \infty.$$

Da $f \geqslant 0$ zeigt dies $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

$\Leftarrow$: Wiederum folgt wegen $f \geqslant 0$, dass

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu = \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} < \infty.$$

(b) $\Rightarrow$: Da μ und ν σ-endliche Maße sind, existieren Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_k \uparrow E$ und $\mu(A_k) < \infty$ sowie $B_k \uparrow E$ und $\nu(B_k) < \infty$. Setzen wir $C_k := A_k \cap B_k$, so gilt immernoch $C_k \uparrow \infty$ und $\mu(C_k) < \infty$, $\nu(C_k) < \infty$. Wegen

$$\mu(\{f = \infty\}) = \lim_{k\to\infty} \mu(\{f = \infty\} \cap C_k)$$

genügt es zu zeigen, dass $\mu(\{f = \infty\} \cap C_k) = 0$. Dazu bemerken wir, dass aus der Markov-Ungleichung folgt, dass

$$\mu(\{f \geqslant R\} \cap C_k) \leqslant \frac{1}{R} \int_{C_k} f\,d\mu = \frac{1}{R}\nu(C_k).$$

Aus $\nu(C_k) < \infty$ folgt daher

$$0 \leqslant \mu(\{f = \infty\} \cap C_k) = \lim_{R\to\infty} \mu(\{f \geqslant R\} \cap C_k) \leqslant \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{R}\nu(C_k)\right) = 0.$$

Alternativlösung: Wir wählen $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ wie oben und k_0 hinreichend groß, so dass $\mu(C_{k_0}) > 0$. Angenommen, $\mu(\{f = \infty\}) > 0$. Aus

$$\{f = \infty\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{f = \infty\} \cap C_k \supset \{f = \infty\} \cap C_{k_0}$$

folgt dann

$$\nu(C_{k_0}) \geqslant \int_{C_{k_0} \cap \{f=\infty\}} f\,d\mu = \infty.$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch zur Annahme, dass $\nu(C_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$: Da μ ein σ-endliches Maß ist, existiert $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{A}$ mit $A_k \uparrow E$ und $\mu(A_k) < \infty$. Setze $C_k := A_k \cap \{0 \leqslant f \leqslant k\}$. Dann gilt $A_k \uparrow E$ wegen $f \geqslant 0$ und

$$\nu(C_k) = \int_{A_k \cap \{0 \leqslant f \leqslant k\}} f\,d\mu \leqslant k \int_{A_k} d\mu = k\mu(A_k) < \infty.$$

Aufgabe 20.2. Lösung: »$\Leftarrow$«: Angenommen, μ und ν erfüllen das »ϵ-δ-Kriterium«. Sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ sei entsprechend obiger Bedingung gewählt. Ist $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$, dann gilt $\mu(A) = 0 < \delta$ und folglich $\nu(A) < \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\nu(A) = 0$. Also gilt $\nu \ll \mu$.

»$\Rightarrow$«: Wir zeigen diese Richtung durch einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, das ϵ-δ-Kriterium gilt nicht. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Folge von Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\mu(A_k) < 2^{-k}$ und $\nu(A_k) \geqslant \epsilon$. Definiere $F_n := \bigcup_{k\geqslant n} A_k$ und $F := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Wegen

$$\mu(F_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2 \cdot 2^{-n}$$

folgt, dass

$$\mu(F) \leqslant \mu(F_n) \leqslant 2 \cdot 2^{-n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit $\mu(F) = 0$. Andererseits folgt wegen $F_n \downarrow F$ und der Stetigkeit des Maßes ν, dass

$$\nu(F) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n) \geqslant \epsilon.$$

Folglich haben wir gezeigt, dass $\nu(F) \geqslant \epsilon > 0$ und $\mu(F) = 0$, d.h. ν ist nicht absolutstetig bzgl. μ.

Aufgabe 20.2. Lösung: Da nach Voraussetzung $\nu_i \ll \mu_i$ für $i = 1, 2$ existiert gemäß dem Satz von Radon–Nikodým die Radon–Nikodým Dichte $f_i := \frac{d\nu_i}{d\mu_i}$, d.h.

$$\nu_i(A) = \int_A f_i \, d\mu_i, \qquad A \in \mathcal{A}_i,\ i = 1, 2.$$

Setze $f(x,y) := f_1(x) f_2(y)$. Sind $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$, so gilt nach dem Satz von Tonelli, dass

$$\begin{aligned}(\nu_1 \otimes \nu_2)(A_1 \times A_2) = \nu_1(A_1)\nu_2(A_2) &= \left(\int_{A_1} f_1 \, d\mu_1\right)\left(\int_{A_2} f_2 \, d\mu_2\right) \\ &= \int\int \mathbb{1}_{A_1}(x)\mathbb{1}_{A_2}(y) f_1(x) f_2(y) \, d\mu_1(x) \, d\mu_2(y) \\ &= \int \mathbb{1}_{A_1 \times A_2}(x,y) f(x,y) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y).\end{aligned}$$

Wir wollen nun daraus folgern, dass die Gleichheit

$$(\nu_1 \otimes \nu_2)(A) = \int_{E_1 \times E_2} \mathbb{1}_A(x,y) f(x,y) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) \tag{20.1}$$

für *alle* $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt. Dazu wenden wir den Maßeindeutigkeitssatz an. Sei

$$\varrho(A) := \int_{E_1 \times E_2} \mathbb{1}_A(x,y) f(x,y) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y), \qquad A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

Wir wissen: $\mathcal{G} := \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ist ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und die Maße ϱ und $\nu_1 \otimes \nu_2$ stimmen auf diesem Erzeuger überein.

Da ν_1, ν_2 nach Voraussetzung σ-endlich sind, existieren Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_1$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_2$ mit $A_k \uparrow E_1$, $B_k \uparrow E_2$, sowie $\mu_1(A_k) < \infty$ und $\nu_2(B_k) < \infty$. Folglich erfüllt $G_k := A_k \times B_k \in \mathcal{G}$ die Eigenschaften $G_k \uparrow E_1 \times E_2$, sowie

$$\varrho(G_k) = (\nu_1 \times \nu_2)(G_k) = \nu_1(A_k)\nu_2(B_k) < \infty.$$

Damit sind alle Voraussetzungen aus dem Maßeindeutigkeitssatz erfüllt und es folgt, dass $\varrho(A) = (\nu_1 \otimes \nu_2)(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, d.h. es gilt (20.1). Aus (20.1) ist ersichtlich, dass $\nu_1 \otimes \nu_2$ die Dichte f bzgl. $\mu_1 \otimes \mu_2$ besitzt. Aus dem Satz von Radon–Nikodým folgt damit auch, dass $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$.

Aufgabe 20.4. Lösung:

(a) Es sei $A \in \mathcal{A}$ eine $(\mu + \nu)$-Nullmenge, d.h. $(\mu + \nu)(A) = 0$. Dann folgt wegen

$$0 = (\nu + \mu)(A) = \nu(A) + \mu(A) \geqslant \nu(A),$$

dass A auch eine ν-Nullmenge ist. Folglich gilt $\nu \ll \nu + \mu$. Können wir zeigen, dass $(\mu + \nu)$ ein σ-endliches Maß ist, so folgt aus dem Satz von Radon-Nikodým, Korollar20.4, dass $f = d\nu/d(\nu + \mu)$ existiert:

$$\nu = f\,(\mu + \nu) = f\mu + f\nu. \tag{$\star$}$$

Dass $(\mu + \nu)$ σ-endlich ist, sieht man so: Nach Voraussetzung existieren Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow E$, $B_n \uparrow E$ und $\mu(A_n) < \infty$, $\nu(B_n) < \infty$. Setzen wir nun $C_n := A_n \cap B_n \in \mathcal{A}$, dann gilt $C_n \uparrow E$ und

$$(\mu + \nu)(C_n) = \mu(C_n) + \nu(C_n) \leqslant \mu(A_n) + \nu(B_n) < \infty.$$

Somit ist $(\mu + \nu)$ ein σ-endliches Maß auf $(E, \mathcal{A})$.

(b) Aus Korollar 20.4 wissen wir, dass $f \geqslant 0$. Um zu zeigen, dass $f \leqslant 1$ gilt, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned}\nu(\{f \geqslant 1 + \epsilon\}) &= \int_{\{f \geqslant 1+\epsilon\}} f\,d(\nu + \mu)\\ &\geqslant (1+\epsilon)\nu(\{f \geqslant 1 + \epsilon\}) + (1+\epsilon)\mu(\{f \geqslant 1+\epsilon\})\\ &\geqslant \nu(\{f \geqslant 1 + \epsilon\})\end{aligned}$$

für alle $\epsilon > 0$. Folglich muss überall »=« gelten und damit folgt insbesondere

$$\mu(\{f \geqslant 1 + \epsilon\}) = 0 = \nu(\{f \geqslant 1 + \epsilon\}).$$

Das impliziert

$$\mu(\{f > 1\}) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f \geqslant 1 + 1/n\}\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{f \geqslant 1 + 1/n\}) = 0$$

und (analog) $\nu(\{f>1\})=0$. Das bedeutet, dass $\{f>1\}$ eine $(\mu+\nu)$-Nullmenge ist, und daher können wir annehmen, dass $0\leqslant f\leqslant 1$. Aus $(\star)$ erhalten wir dann

$$(1-f)\,\nu = f\,\mu. \qquad (\star\star)$$

(c) Für $N:=\{f=1\}\in\mathcal{A}$ gilt

$$\mu(N)=\int_{\{f=1\}} d\mu = \int_{\{f=1\}} f\,d\mu \overset{(\star\star)}{=} \int_{\{f=1\}} (1-f)\,d\nu = 0.$$

Andererseits ist

$$\nu^{\perp}(N^c)=\nu^{\perp}(\{0\leqslant f<1\}) \overset{\text{def}}{=} \nu(\{0\leqslant f<1\}\cap\{f=1\})=0.$$

Das zeigt $\nu^{\perp}\perp\mu$. Weiterhin folgt aus $(\star\star)$

$$\nu^{\circ}(A)=\nu(A\cap\{f<1\})=\int_{A\cap\{f<1\}} d\nu \overset{(\star\star)}{=} \int_{A\cap\{f<1\}} \frac{f}{1-f}\,d\mu$$

für alle $A\in\mathcal{A}$, d.h. $\nu^{\circ}\ll\mu$ und $d\nu^{\circ}/d\mu = f/(1-f)\mathbb{1}_{\{f<1\}}$.

(d) Es sei $\nu=\tilde{\nu}^{\circ}+\tilde{\nu}^{\perp}$ eine weitere Zerlegung. Es seien $\tilde{N},N\in\mathcal{A}$ mit $\tilde{\nu}^{\perp}(\tilde{N}^c)=\nu(N^c)=0$ und $\mu(\tilde{N})=\mu(N)=0$. Für $M:=N\cup\tilde{N}\in\mathcal{A}$ gilt dann $\mu(M)=0$ und $\tilde{\nu}^{\perp}(M^c)=\nu^{\perp}(M^c)=0$ wegen ($M^c\supset N^c$ und $M^c\supset\tilde{N}^c$). Somit ist

$$\begin{aligned}\nu^{\perp}(A) &= \nu^{\perp}(A\cap M)+\underbrace{\nu^{\perp}(A\cap M^c)}_{0} = \nu(A\cap M)-\underbrace{\nu^{\circ}(A\cap M)}_{0} = \nu(A\cap M)-\underbrace{\tilde{\nu}^{\circ}(A\cap M)}_{0}\\ &= \tilde{\nu}^{\perp}(A\cap M)+\underbrace{\tilde{\nu}^{\perp}(A\cap M^c)}_{0} = \tilde{\nu}^{\perp}(A)\end{aligned}$$

für alle $A\in\mathcal{A}$. Analog folgt $\nu^{\circ}(A)=\nu(A\cap M^c)=\tilde{\nu}^{\circ}(A)$ für $A\in\mathcal{A}$.

■■

Aufgabe 20.5. Lösung:

(a) Offensichtlich, da sich die σ-Additivität durch Linearität von μ und ν auf ρ vererbt.

(b) Verwende dominierte Konvergenz, um die σ-Additivität zu zeigen.

(c) $|\rho|(\emptyset)=0$ ist offensichtlich. Es sei $(A_n)_n\subset\mathcal{A}$ eine Folge disjunkter Mengen und $\epsilon>0$. Dann gilt auf Grund der Definition von $|\rho|$ (o. E. können wir $|\rho|(A_n)<\infty$ annehmen, da sonst alles klar ist)

$$\forall n\quad \exists (A_n^i)_i\subset\mathcal{A},\quad \dot{\bigcup_i} A_n^i = A_n,\quad \sum_i |\rho(A_n^i)|\geqslant |\rho|(A_n)-\epsilon 2^{-n}$$

und da $\dot{\bigcup}_{i,n} A_n^i = A$ gilt auch

$$|\rho|(A)\geqslant \sum_n\sum_i |\rho(A_n^i)|\geqslant \sum_n \left(|\rho|(A_n)-\epsilon 2^{-n}\right)\geqslant \sum_n |\rho|(A_n)-\epsilon.$$

Mit $\epsilon\to 0$ ergibt sich dann

$$|\rho|(A)\geqslant \sum_n |\rho|(A_n).$$

Nun sei $(B_k)_k \subset \mathcal{A}$ eine weitere Zerlegung $\dot\bigcup_k B_k = A$. Dann gilt

$$\forall k \quad \dot\bigcup_n (A_n \cap B_k) = A_n$$

und somit

$$\sum_k |\rho(B_k)| = \sum_k \left|\sum_n \rho(A_n \cap B_k)\right| \leqslant \sum_k \sum_n |\rho(A_n \cap B_k)| = \sum_n \sum_k |\rho(A_n \cap B_k)| \leqslant \sum_n |\rho|(A_n).$$

Wir gehen nun zum Infimum über die Zerlegungen $(B_k)_k$ über und finden daher

$$|\rho|(A) \leqslant \sum_n |\rho|(A_n);$$

damit ist die σ-Additivität gezeigt.

(d) Wir nehmen nun $|\rho|(A) = \infty$ an und zeigen

$$\exists C \subset A,\ C \in \mathcal{A} : |\rho(C)| \geqslant 1 \quad \text{und} \quad |\rho|(A \setminus C) = \infty.$$

Nun ist $|\rho(A)| < \infty$ und auf Grund der Definition von $|\rho|$ gibt es eine Folge $(A_i)_i \subset \mathcal{A}$ disjunkter Teilmengen von A mit

$$\sum_{i=1}^{n} |\rho(A_i)| > 2(1 + |\rho(A)|).$$

O.B.d.A. sei $\sum_{i=1}^{n} \rho(A_i) \geqslant 0$ (der andere Fall geht analog) und wir setzen $B = \bigcup\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant n,\ \rho(A_i) \geqslant 0\}$. Damit gilt dann

$$|\rho(B)| \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}|\rho(A_i)| \geqslant 1 + |\rho(A)| \geqslant 1;$$

$$|\rho(A \setminus B)| \geqslant |\rho(B)| - |\rho(A)| \geqslant 1 + |\rho(A)| - |\rho(A)| = 1.$$

Andererseits gilt ja $|\rho|(A) = |\rho|(B) + |\rho|(A \setminus B)$, d.h. mindestens einer der beiden Ausdrücke auf der r. S. ist unendlich. Damit können wir C entweder als B oder als $A \setminus B$ wählen.

(e) Wir wählen in der vorangehenden Teilaufgabe $A = E$ und finden C_1 mit $|\rho(C_1)| \geqslant 1$ und $|\rho|(E \setminus C_1) = \infty$. Erneute Anwendung mit $A = E \setminus C_1$ liefert ein C_2 mit $|\rho(C_2)| \geqslant 1$ usw. Nach Konstruktion sind die $(C_n)_n$ disjunkt. Nun ist aber, wegen der σ-Additivität

$$\mathbb{R} \ni \rho\left(\bigcup_n C_n\right) = \sum_n \rho_n(A_n)$$

d.h. die Reihe auf der r. S. muss konvergieren — das kann sie aber nicht, da die Reihenglieder nicht nach Null konvergieren. Somit muss $|\rho|(E) < \infty$ sein.

(f) Die Mengenfunktionen $\rho^{\pm}$ sind wegen $|\rho(A)| \leqslant |\rho|(A)$ (betrachte die triviale Überdeckung $(A, \varnothing, \dots)$ von A!) offensichtlich positiv und σ-additiv. Ausserdem gilt $|\rho|(\varnothing) = \rho(\varnothing) = 0$.

(g) Wegen $|\rho(A)| \leqslant |\rho|(A)$ gilt $\rho \ll |\rho|$ und ebenso $\rho^\pm \ll \rho$. Nach dem Satz von Radon-Nikodým gibt es also Dichten $h_\pm$ so dass $\rho^\pm = h_\pm|\rho|$. Weiter ist

$$\rho^\pm\{h_\pm > 1\} = \int_{\{h_\pm>1\}} h_\pm \, d|\rho| > |\rho|\{h_\pm > 1\}$$

was nur möglich ist, wenn $\{h_\pm > 1\}$ eine Nullmenge ist. Damit ist $h_\pm \leqslant 1$ fast sicher.

Nun sei $E_{r\pm} = \{h_\pm \leqslant r\}$ mit $r < 1$. Dann

$$\rho^\pm(E_{r\pm}) = \int_{E_{r\pm}} h_\pm \, d|\rho| \leqslant r|\rho|(E_{r\pm})$$

was nicht möglich ist, es sei denn $E_{r\pm}$ ist eine Nullmenge.

Somit gibt es Mengen $E^\pm = \{h_\pm = 1\}$ die, nach Abänderung auf einer Nullmenge, disjunkt sind und $E = E^+ \cup E^-$. Insbesondere haben wir

$$\rho^\pm(A) = |\rho(E^\pm \cap A)| = |\rho|(E^\pm \cap A).$$

Daraus folgt sogleich $\rho^+ \perp \rho^-$.

(h) Es sei $\rho = \rho_1 - \rho_2 = \rho^+ - \rho^-$ eine weitere Zerlegung in positive Maße. Dann gilt, da $\rho \leqslant \rho_1$

$$\rho^+(A) = \rho(A \cap E^+) \leqslant \rho_1(A \cap E^+) \leqslant \rho_1(A)$$

und ρ^- geht analog.

(i) Wir zeigen hier nur, dass $\rho \wedge \sigma$ das größte Maß ist, das kleiner als ρ und σ ist; die anderen Behauptung beweist man analog. Wählen wir $B = A$ bzw. $B = \emptyset$, so folgt $\rho \wedge \sigma(A) \leqslant \min\{\rho(A), \sigma(A)\}$, d.h. es gilt $\rho \wedge \sigma \leqslant \rho$ und $\rho \wedge \sigma \leqslant \sigma$. Wir zeigen als nächstes, dass $\rho \wedge \sigma$ ein Maß definiert.

(M_1) Offensichtlich gilt $\rho \wedge A(\emptyset) = 0$.

(M_2) Es sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Weiterhin seien $B_j \in \mathcal{A}$, $B_j \subset A_j$ beliebig. Dann gilt $B := \dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \subset \dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j =: A$ und aus der Definition von $\rho \wedge \sigma$ sowie der σ-Additivität von ρ und σ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\rho \wedge \sigma\left(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) &\leqslant \rho\left(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) + \sigma\left(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \setminus \dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) \\
&= \rho\left(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) + \sigma\left(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_j \setminus B_j)\right) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho(B_j) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sigma(A_j \setminus B_j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} (\rho(B_j) + \sigma(A_j \setminus B_j)).
\end{aligned}$$

Für jedes $\epsilon > 0$ können wir $B_j = B_j^\epsilon$ so wählen, dass

$$\leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\rho \wedge \sigma(A_j) + \epsilon 2^{-j}\right)$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho \wedge \sigma(A_j) + \epsilon$$

Es folgt mit $\epsilon \to 0$

$$\rho \wedge \sigma \left(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j \right) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho \wedge \sigma(A_j).$$

Die andere Ungleichung zeigt man analog: Ist $B \subset A$, dann ist $B_j := A \cap A_j \in \mathcal{A}$, $B_j \subset A_j$. Folglich,

$$\rho \wedge \sigma(A_j) \leqslant \rho(B_j) + \sigma(A_j \setminus B_j)$$

und indem wir über alle $j \in \mathbb{N}$ summieren, zeigt eine ähnliche Rechnung wie eben, dass

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \rho \wedge \sigma(A_j) \leqslant \rho(B) + \sigma(A \setminus B).$$

Nehmen wir nun wieder das Infimum über alle zulässigen Mengen $B \in \mathcal{A}$, so folgt $\rho \wedge \sigma \left(\dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) \geqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho \wedge \sigma(A_j)$.

Ist ν ein weiteres Maß, das von ρ und σ dominiert wird, so ist

$$\nu(A) = \nu(B) + \nu(A \setminus B) \leqslant \rho(B) + \sigma(A \setminus B)$$

für alle $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$. Bilden wir auf der rechten Seite das Infimum über B, dann ergibt sich $\nu \leqslant \rho \wedge \sigma$.

(j) Es sei $A \in \mathcal{A}$. Wählen wir in der Definition von $|\rho|$ die Überdeckung $A_1 = A$, $A_2 = A^c$, $A_3 = \cdots = \emptyset$, dann

$$\begin{aligned} |\mu - \nu|(E) &\geqslant |\mu(A) - \nu(A)| + |\mu(A^c) - \nu(A^c)| \\ &= |\mu(A) - \nu(A)| + |(1 - \mu(A)) - (1 - \nu(A))| \\ &= 2|\mu(A) - \nu(A)|. \end{aligned}$$

Damit gilt $2\sup\{\mu(A) - \nu(A); A \in \mathcal{A}\} \leqslant |\mu - \nu|(E)$. Um »$\geqslant$« zu zeigen, sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine beliebige paarweise disjunkte Überdeckung von E. Wir setzen

$$I := \{n \in \mathbb{N}; \mu(A_n) \geqslant \nu(A_n)\} \qquad J =: \mathbb{N} \setminus I$$

sowie $A := \bigcup_{n\in I} A_n \in \mathcal{A}$ und $B := \bigcup_{n\in J} A_n^c \in \mathcal{A}$. Dann

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n) - \nu(A_n)| &= \sum_{n\in I} (\mu(A_n) - \nu(A_n)) + \sum_{n\in J} (\nu(A_n^c) - \mu(A_n^c)) \\ &= (\mu(A) - \nu(A)) + (\nu(B) - \mu(B)) \\ &\leqslant 2\sup\{\mu(C) - \nu(C); C \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

Das beweist die erste Identität. Um die zweite Gleichheit zu zeigen, rufen wir uns zunächst die Lebesgue-Zerlegung von ν in Erinnerung (vgl. Aufgabe 20.4):

$$\nu = \nu^\circ + \nu^\perp, \qquad \nu^\circ \ll \mu,$$

und es existiert $N \in \mathcal{A}$ mit $\nu^\perp(N) = 1$, $\mu(N) = 0$. Wir bezeichnen mit $f := \frac{d\nu^\circ}{d\mu}$ die Radon–Nikdodým-Dichte. Es gilt dann

$$\int (1-f)^+ \, d\mu = \int_{N^c} (1-f)^+ \, d\mu = \int_{N^c \cap \{f<1\}} (1-f) \, d\mu = \mu(A) - \nu(A)$$

für $A := \{f < 1\} \cap N^c \in \mathcal{A}$. Folglich ist

$$\sup\{\mu(A) - \nu(A); A \in \mathcal{A}\} \geqslant \int (1-f)^+ \, d\mu.$$

Andererseits: Wegen $\nu^\perp(A) \geqslant 0$ folgt sofort

$$\begin{aligned}\mu(A) - \nu(A) &= \mu(A) - \nu^\circ(A) - \nu^\perp(A) \leqslant \mu(A) - \nu^\circ(A) = \int_A (1-f) \, d\mu \\ &\leqslant \int_A (1-f)^+ \, d\mu \leqslant \int (1-f)^+ \, d\mu.\end{aligned}$$

(k) Es sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Dann ist f gleichmäßig stetig, d.h. für $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon \quad \text{für alle } |x-y| \leqslant \delta.$$

Wir überdecken $\mathbb{R}^d$ mit disjunkten Würfeln $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit Diagonalen der Länge δ und setzen

$$g(x) := \sum_{j\in\mathbb{N}} f(x_j) \mathbb{1}_{Q_j}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $x_j \in Q_j$ beliebig ist. Wegen $|\int (f-g) \, d\rho| \leqslant \int |f-g| \, d|\rho|$ (das folgt sofort aus (f)) und $\|f\|_\infty \leqslant 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\int f \, d\rho\right| &\leqslant \left|\int (f-g) \, d\rho\right| + \left|\int g \, d\rho\right| \\ &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} \underbrace{|f-g|}_{\leqslant \epsilon} \, d|\rho| + \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} f(x_j) \rho(Q_j)\right| \\ &\leqslant \epsilon|\rho|(E) + \sum_{j\in\mathbb{N}} |\rho(Q_j)| \\ &\leqslant \epsilon|\rho|(E) + |\rho(E)|.\end{aligned}$$

Beachte, dass $|\rho|(E) < \infty$ (siehe Teil (e)); da $\epsilon > 0$ beliebig ist, zeigt das also

$$\sup\left\{\int f \, d\rho; f \in C_c(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty \leqslant 1\right\} \leqslant |\rho|(E).$$

Nun sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine beliebige paarweise disjunkte Überdeckung von E. Für $g := \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{sgn}(\rho(A_n)) \mathbb{1}_{A_n}$ gilt dann

$$\int |g| \, d|\rho| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\rho|(A_n) = |\rho|(E) < \infty,$$

d.h. $g \in L^1(|\rho|)$. Gemäß Satz 24.8 existiert daher $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f - g\|_{L^1(|\rho|)} < \epsilon$. Damit ist

$$\left|\int (g-f) \, d\rho\right| \leqslant \int |g-f| d|\rho| \leqslant \epsilon$$

und somit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\rho(A_n)| = \int g\, d\rho = \int (g-f)\, d\rho + \int f\, d\rho \leqslant \epsilon + \int f\, d\rho.$$

Da $\epsilon > 0$ ist, folgt die Behauptung.

21 Der allgemeine Transformationssatz

Aufgabe 21.1. Lösung:

(a) Für $x, y \in (0,1)$ gilt

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{n \geqslant 0} (xy)^n,$$

(geometrische Reihe). Aus dem Satz von Beppo Levi folgt daher

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{1-xy}\, dx = \sum_{n \geqslant 0} \int_{(0,1)} (xy)^n\, dx = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n+1} y^n.$$

Unter Anwendung des Satzes von Tonelli und Beppo Levi erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^2} (1-xy)^{-1}\, d(x,y) &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \frac{1}{1-xy}\, dx\, dy \\
&= \int_{(0,1)} \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n+1} y^n \right) dy \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n+1} \int_{(0,1)} y^n\, dy \\
&= \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

(b) Wir führen zunächst die Transformation

$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$$

durch; das entspricht gerade der Drehung des Integrationsgebietes um 45 Grad. Das neue Integrationsgebiet ist somit ein Quadrat Q mit Eckpunkten

$$(0,0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (\sqrt{2}, 0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Gemäß dem Transformationssatz, Satz 21.4, ist also

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\, d(x,y) = \int_Q \frac{2}{2-u^2+v^2}\, d(u,v).$$

Auf Grund der Symmetrie des Integranden gilt

$$\begin{aligned}
I &:= \int_Q \frac{2}{2-u^2+v^2}\, d(u,v) \\
&= 2 \int_{Q \cap \{v \geqslant 0\}} \frac{2}{2-u^2+v^2}\, d(u,v).
\end{aligned}$$

Wir splitten das Integral nun auf (Bild malen!)

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2}\,du + 4\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}-u}\frac{dv}{2-u^2+v^2}\,du \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Integrale I_1 und I_2 getrennt. Aus

$$\int_0^x \frac{1}{a^2+t^2}\,dt = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \tag{$\star$}$$

folgt zunächst

$$I_1 = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}. \tag{$\star\star$}$$

Setzen wir $u = \sqrt{2}\sin\theta$, dann ist $du = \sqrt{2}\cos\theta = \sqrt{2-u^2}\,d\theta$ und

$$\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{u}{\sqrt{2(1-\sin\theta^2)}} = \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} = \tan\theta$$

wegen $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$. Führen wir in $(\star\star)$ die Transformation durch, so erhalten wir

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\theta\,d\theta = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

In analoger Weise berechnen wir I_2: Aus $(\star)$ und der Definition von I_2 folgt

$$I_2 = 4\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)\frac{du}{\sqrt{2-u^2}}.$$

Für $u := \sqrt{2}\cos(2\theta)$ gilt

$$du = -2\sqrt{2}\sin(2\theta)\,d\theta = -2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2(2\theta)}\,d\theta = -2\sqrt{1}\sqrt{1-u^2/2}\,d\theta = -2\sqrt{2-u^2}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} &= \frac{\sqrt{2}(1-\cos(2\theta))}{\sqrt{2-2\cos^2(2\theta)}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}} \\ &= \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}} \\ &= \tan\theta. \end{aligned}$$

Aus dem Transformationssatz ergibt sich nun

$$I_2 = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\theta\,d\theta = 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

Schließlich,

$$I = I_1 + I_2 = 6\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 21.2. Lösung:

(a) Führen wir in
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$
die Substitution $u^2 = t$ durch, so erhalten wir
$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1}\, du.$$
Aus dem Satz von Tonelli, Satz 16.1, ergibt sich somit
$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\left(\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1}\, du\right)\left(\int_0^\infty e^{-v^2} v^{2y-1}\, dv\right)\\ &= 4\int_{(0,\infty)^2} e^{-u^2-v^2} u^{2x-1} v^{2y-1}\, d(u,v).\end{aligned}$$

(b) Offensichtlich ist die Behauptung äquivalent zu $B(x,y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$. Wir führen in (a) Polarkoordinaten ein:
$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_{r=0}^\infty \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{-r^2} r^{2x+2y-1} (\cos\phi)^{2x-1}(\sin\phi)^{2y-1}\, d\phi\, dr\\ &= 4\left(\int_{r=0}^\infty e^{-r^2} r^{2x+2y-1}\, dr\right)\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2} (\cos\phi)^{2x-1}(\sin\phi)^{2y-1}\, d\phi\right). \qquad (\star)\end{aligned}$$
Mit $s := r^2$ folgt leicht, dass
$$\int_{r=0}^\infty e^{-r^2} r^{2x+2y-1}\, dr = \frac{1}{2}\int_{s=0}^\infty e^{-s} s^{(x+y)-1}\, ds = \frac{1}{2}\Gamma(x+y).$$
Im zweiten Integral in $(\star)$ substituieren wir $t = \cos^2\phi$ und benutzen $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$:
$$\int_{\phi=0}^{\pi/2} (\cos\phi)^{2x-1}(\sin\phi)^{2y-1}\, d\phi = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{2x-1}(1-t)^{2y-1}\, dt = \frac{1}{2}B(x,y).$$

Aufgabe 21.3. Lösung: Wir führen Polarkoordinaten ein,
$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi\\ r\sin\phi\end{pmatrix},$$
und wenden den Transformationssatz an:
$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2\leqslant 1} x^n y^m\, d(x,y) &= \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} r^{n+m+1} (\cos\phi)^n (\sin\phi)^m\, d\phi\, dr\\ &= \frac{1}{n+m+1}\int_{\phi=0}^{2\pi} (\cos\phi)^n(\sin\phi)^m\, d\phi.\end{aligned}$$
Um das verbleibende Integral zu berechnen, splitten wir das Integral auf ...
$$\begin{aligned}\int_{\phi=0}^{2\pi} (\cos\phi)^n(\sin\phi)^m\, d\phi &= \int_{\phi=0}^{\pi} (\cos\phi)^n(\sin\phi)^m\, d\phi + \int_{\phi=\pi}^{2\pi} (\cos\phi)^n(\sin\phi)^m\, d\phi\\ &=: I_1 + I_2\end{aligned}$$

und berechnen zunächst I_1. Dazu substituieren wir $u = \cos\phi$ und erhalten unter Verwendung der Identität $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^{1} u^n \sqrt{1-u^2}^{m-1}\,du \\ &= \int_{-1}^{0} u^n \sqrt{1-u^2}^{m-1}\,du + \int_0^1 u^n \sqrt{1-u^2}^{m-1}\,du \\ &\overset{v:=-u}{=} (-1)^n \int_0^1 v^n \sqrt{1-v^2}\,dv + \int_0^1 u^n \sqrt{1-u^2}^{m-1}\,du \\ &= (1+(-1)^n) \int_0^1 \int_0^1 u^n \sqrt{1-u^2}^{m-1}\,du. \end{aligned}$$

Substituieren wir nun $r := u^2$, sehen wir, dass

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(1+(-1)^n)}{2} \int_0^1 r^{(n-1)/2}(1-r)^{(m-1)/2}\,dr \\ &= \frac{(1+(-1)^n)}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+m+2}{2})}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Eulersche Formel verwendet, vgl. Aufgabe 21.2. In analoger Weise lässt sich I_2 berechnen:

$$\begin{aligned} I_2 &= (-1)^m \int_{-1}^{1} u^n \sqrt{1-u^2}^{m-1}\,du \\ &= ((-1)^m + (-1)^{m+n}) \int_0^1 u^n \sqrt{1-u^2}^{m-1}\,du \\ &= \frac{((-1)^m + (-1)^{m+n})}{2} \int_0^1 r^{(n-1)/2}(1-r)^{(m-1)/2}\,dr \\ &= \frac{((-1)^m + (-1)^{m+n})}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+m+2}{2})}. \end{aligned}$$

Folglich,

$$\int_{x^2+y^2\leqslant 1} x^n y^m\,d(x,y) = \frac{1}{n+m+1} \frac{1+(-1)^n+(-1)^m+(-1)^{m+n}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+m+2}{2})}$$

∎∎

Aufgabe 21.4. Lösung: Da $x \mapsto f(|x|)\sin(x)$ eine ungerade Funktion ist, gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(|x|)\,e^{ix\xi}\,dx &= \int_{\mathbb{R}} f(|x|)\cos(x\xi)\,dx + i\int_{\mathbb{R}} f(|x|)\sin(x\xi)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(|x|)\cos(x\xi)\,dx. \end{aligned}$$

Aus $\cos(x) = \cos(-x)$ folgt somit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(|x|)\,e^{ix\xi}\,dx &= \int_{(-\infty,0)} f(|x|)\cos(x\xi)\,dx + \int_{(0,\infty)} f(|x|)\cos(x\xi)\,dx \\ &= \int_{(0,\infty)} f(|-x|)\cos(-x\xi)\,dx + \int_{(0,\infty)} f(|x|)\cos(x\xi)\,dx \\ &= 2\int_{(0,\infty)} f(x)\cos(x|\xi|)\,dx. \end{aligned}$$

∎∎

Aufgabe 21.5. Lösung:

(a) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \ni x \mapsto (x, f(x))$ ist bijektiv; die Umkehrabbildung ist durch $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \ni (x, f(x)) \mapsto x$ gegeben. Offensichtlich ist Φ differenzierbar und $D\phi(x) = (1, f'(x))$. Folglich, $|D\Phi(x)|^2 = 1 + f'(x)^2$.

(b) Da $|D\Phi(x)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ gemäß (a) nicht-negativ und messbar ist, definiert $\mu(dx) := |D\Phi(x)|\, dx$ ein Maß. Nach Satz 6.6 ist $\sigma = \Phi(\mu)$ als Bildmaß von μ unter Φ ein Maß auf G_f.

(c) Das ist gerade die Aussage von Korollar 19.2.

(d) Die Einheitsnormale $n(x)$ ist per Definition orthogonal zum Gradienten $D\phi(x)$ und $|n(x)| = 1$. Die Orthogonalität folgt aus

$$n(x) \cdot D\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Aus

$$\tilde{\Phi}(x, r) = \begin{pmatrix} x - \frac{r f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \\ f(x) + \frac{r}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$D\tilde{\Phi}(x, r) = \begin{pmatrix} 1 - r \frac{\partial}{\partial x} \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} & f'(x) + r \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \\ -\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \end{pmatrix}$$

Wir benutzen nun die Kurzschreibweise f, f', f'' für $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. Dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} &= \frac{f'' \sqrt{1 + f'^2} - f' \frac{f' f''}{\sqrt{1+f'^2}}}{1 + f'^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} &= -\frac{1}{1 + f'^2} \frac{f' f''}{\sqrt{1 + f'^2}}. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich die Determinante $\det \tilde{\Phi}(x, r)$ als

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1 + [f']^2}} \left(1 - \frac{r f'' \sqrt{1 + [f']^2} - \frac{r [f']^2 f''}{\sqrt{1+[f']^2}}}{1 + [f']^2} \right) \\ &\qquad + \frac{f'}{\sqrt{1 + [f']^2}} \left(f' - \frac{\frac{r f' f''}{\sqrt{1+[f']^2}}}{1 + [f']^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + [f']^2}} - \frac{r f'' - \frac{r [f']^2 f''}{1+[f']^2}}{1 + [f']^2} + \frac{[f']^2}{\sqrt{1 + [f']^2}} - \frac{\frac{r [f']^2 f''}{1+[f']^2}}{1 + [f']^2} \\ &= \frac{1 + [f']^2}{\sqrt{1 + [f']^2}} - \frac{r f''}{1 + [f']^2} \\ &= \sqrt{1 + [f']^2} - \frac{r f''}{1 + [f']^2} \end{aligned}$$

Ist $x \in [c,d]$, so kann auf Grund der Stetigkeit von f, f', f'' ein $\epsilon > 0$ gewählt werden, so dass

$$\det \tilde{\Phi}(x,r) > 0 \quad \text{für alle } |r| < \epsilon,\ x \in [c,d].$$

Das zeigt, dass $\tilde{\Phi}$ ein lokaler C^1-Diffeomorphismus ist (vgl. Satz 21.3).

(e) Offenbar gilt $\Phi^{-1}(C) \times (-r,r) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da $\tilde{\Phi}$ ein lokaler C^1-Diffeomorphismus ist, also insbesondere $\tilde{\Phi}^{-1}$ messbar, folgt daraus die Behauptung.

(f) Es sei $x \in (c,d)$ und $\epsilon > 0$ wie in (d). Aus der konkreten Darstellung in (d) ist ersichtlich, dass die Abbildung $[-\epsilon,\epsilon] \ni r \mapsto \det D\tilde{\Phi}(x,r)$ stetig ist. Da $[-\epsilon,\epsilon]$ eine kompakte Menge ist, ist sie sogar gleichmäßig stetig. Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2r}\int_{(-r,r)} \det D\tilde{\Phi}(x,s)\lambda^1(ds) - \det D\tilde{\Phi}(x,0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2r}\int_{(-r,r)} (\det D\tilde{\Phi}(x,s) - \det D\tilde{\Phi}(x,0))\lambda^1(ds)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2r}\int_{(-r,r)} |\det D\tilde{\Phi}(x,s) - \det D\tilde{\Phi}(x,0)|\lambda^1(ds) \\
&\leqslant \sup_{s\in(-r,r)} |\det D\tilde{\Phi}(x,s) - \det D\tilde{\Phi}(x,0)|\frac{1}{2r}(2r) \xrightarrow{r\to 0} 0.
\end{aligned}$$

(g) Aus der Definition von $C(r)$ und dem Transformationssatz, Satz 21.4, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{C(r)}(x,y)\,\lambda^2(dx,dy) &= \frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\tilde{\Phi}(\Phi^{-1}(C)\times(-r,r))}(x,y)\lambda^2(dx,dy) \\
&= \frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\Phi^{-1}(C)\times(-r,r)}(u,v)|\det D\tilde{\Phi}(u,v)|\,\lambda^2(du,dv).
\end{aligned}$$

Wenden wir den Satz von Tonelli, Satz 16.1, an, so erhalten wir

$$\frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{C(r)}(x,y)\,\lambda^2(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\Phi^{-1}(C)}(u)\underbrace{\left(\frac{1}{2r}\int_{(-r,r)} |\det D\tilde{\Phi}(u,v)|\,\lambda(dv)\right)}_{\xrightarrow{r\to 0}|\det D\tilde{\Phi}(u,0)|}\lambda(du).$$

Da $\Phi^{-1}(C)$ eine beschränkte Menge ist, können wir den Satz von der dominierten Konvergenz anwenden und es folgt die Behauptung.

(h) Die Menge $C(r)$ ist ein »Schlauch« um den Graphen G_f; der Radius des »Schlauches« ist r. In (g) haben wir gesehen, dass die gewichtete Fläche $\frac{1}{2r}\lambda^2(C(r))$ gegen

$$\int_{\Phi^{-1}} |\det D\tilde{\Phi}(u,0)|\,\lambda(du) = \int_{\Phi^{-1}(C)} \sqrt{1+f'(u)^2}\,\lambda(du)$$

konvergiert.

■■

Aufgabe 21.6. Lösung:

(a) $|\det D\phi(x)|$ ist nicht-negativ und messbar und daher definiert $|\det D\Phi|\,\lambda^d$ gemäß Lemma 9.8 ein Maß. $\mu = \Phi(|\det D\Phi|\,\lambda^d)$ ist somit das Bildmaß von $|\det D\Phi|\,\lambda^d$ unter Φ, vgl. Definition 6.7. Aus Korollar 19.2 folgt nun

$$\int_M u\,d\mu = \int \mathbb{1}_M(x)\,\Phi(|\det D\Phi|\,\lambda^d)(dx) = \int \mathbb{1}_{\Phi^{-1}(M)}(x)(u\circ\Phi)(x)\,|\det D\Phi(x)|\,d\lambda^d(x).$$

(b) Die Formel folgt sofort aus (a) mit $\Phi := \theta_r$.

(c) Die Identität

$$\int u\,d\lambda^n = \int_{(0,\infty)} \int_{\|x\|=1} u(rx) r^{n-1}\,\sigma(dx)\,\lambda(dr)$$

folgt aus Korollar 21.13. Wegen (b) gilt zudem

$$\int_{(0,\infty)} \int_{\|x\|=r} u(x)\,\sigma(dx)\,\lambda(dr) = \int_{(0,\infty)} \int_{\|x\|=1} u(rx) r^{n-1}\,\sigma(dx)\,\lambda(dr).$$

■■

22 Maßbestimmende Familien

Aufgabe 22.1. Lösung: Per Definition gilt

$$\phi_n(x) = 0 \iff \phi(nx) = 0 \iff |nx| \geqslant 1 \iff |x| \geqslant \frac{1}{n},$$

also $\operatorname{supp}\phi_n = \overline{B_{1/n}(0)}$. Weiterhin folgt aus dem Transformationssatz (oder, alternativ, aus Satz 3.7):

$$\int \phi_n(x)\,dx = \frac{1}{n^d}\int \phi(nx)\,dx \overset{y:=nx}{=} \frac{n^d}{n^d}\int \phi(y)\,dy = 1.$$

Aufgabe 22.2. Lösung:

(a) Zunächst bemerken wir, dass es genügt zu zeigen, dass die Polynome dicht in $C[-1,1]$ sind. (Tatsächlich: Funktionen aus $C[0,1]$ können mittels der affinen Transformation $a+t(b-a)$, $t \in [0,1]$, für beliebige $a < b$ nach $C[a,b]$ abgebildet werden und vica versa.) Es sei $u \in C[-1,1]$ fest gewählt. Wir definieren eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen durch

$$p_n(x) := \frac{1}{c_n}\left(\frac{x^2}{16} - 1\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit $c_n := \int_{-4}^{4}(x^2/16 - 1)^n\,dx$. Da $u \in C[-1,1]$ können wir $\tilde{u} \in C(\mathbb{R})$ finden, so dass $\tilde{u}(x) = 0$ für $|x| > 2$ und $\tilde{u}(x) = u(x)$ für $x \in [-1,1]$. Weiterhin setzen wir $\tilde{p}_n(x) := p_n(x)\mathbb{1}_{[-4,4]}(x)$. Für

$$u_n(x) := \tilde{u} * \tilde{p}_n(x) = \int \tilde{u}(x-y)\tilde{p}_n(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gilt dann

$$u_n(x) = \int \tilde{u}(x-y)p_n(y)\,dy \quad \text{für alle } x \in [-2,2],$$

denn

$$|x| \leqslant 2 \implies \tilde{u}(x-y) = 0 \text{ für alle } |y| > 2.$$

Wegen

$$u_n(x) = \int \tilde{u}(y)p_n(x-y)\,dy, \qquad x \in [-2,2]$$

ist $u_n|_{[-2,2]}$ offensichtlich ein Polynom. Wir wollen nun zeigen, dass $u_n \to \tilde{u}$ gleichmäßig (wegen $\tilde{u}|_{[-1,1]} = u$ folgt dann die Behauptung). Aus $\tilde{p}_n \geqslant 0$ und $\int \tilde{p}_n\,dx = 1$ folgt

$$|u_n(x) - \tilde{u}(x)| = \left|\int (\tilde{u}(x-y) - \tilde{u}(x))\tilde{p}_n(y)\,dy\right|$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \int_{[-\frac{1}{R},\frac{1}{R}]} |\tilde{u}(x-y)-\tilde{u}(x)|\tilde{p}_n(y)\,dy\\&\quad+\int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{R},\frac{1}{R}]} |\tilde{u}(x-y)-\tilde{u}(x)|\tilde{p}_n(y)\,dy\\&=: I_1(x)+I_2(x)\end{aligned}$$

für alle $R > 0$. Wir schätzen I_1 und I_2 einzeln ab. Da $\tilde{u}(x) = 0$ für $|x| > 2$ ist $\tilde{u}$ gleichmäßig stetig ist und somit gilt

$$\begin{aligned}I_1(x) &\leqslant \sup_{y\in[-\frac{1}{R},\frac{1}{R}]} |\tilde{u}(x-y)-\tilde{u}(x)| \int_{[-\frac{1}{R},\frac{1}{R}]} \tilde{p}_n(y)\,dy\\&\leqslant \sup_{y\in[-\frac{1}{R},\frac{1}{R}]} |\tilde{u}(x-y)-\tilde{u}(x)|\\&\xrightarrow{R\to\infty} 0\end{aligned}$$

gleichmäßig in x. Weiterhin ergibt sich aus der Beschränktheit von $\tilde{u}$, dass

$$I_2(x) \leqslant 2\|\tilde{u}\|_\infty \int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{R},\frac{1}{R}]} \tilde{p}_n(y)\,dy.$$

Wegen $\tilde{p}_n(y) \downarrow 0$ für alle $y \neq 0$ erhalten wir aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $I_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gleichmäßig in x. Damit folgt die Behauptung.

(b) Es sei $u \in C_c[0,\infty)$. Da u einen kompakten Träger hat, gilt $u(x) = 0$ für x hinreichend groß. Insbesondere ist damit $u\circ(-\log)(x) = 0$ für x hinreichend klein. Damit definiert

$$\begin{cases} u\circ(-\log)(x), & x \in (0,1]\\ 0, & x = 0,\end{cases}$$

eine stetige Funktion auf $[0,1]$. Nach Teil (a) existiert daher eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, so dass $p_n \to u\circ(-\log)$ gleichmäßig.

(c) Für $p(x) := x^n$ gilt offensichtlich $p(e^{-t}) = e^{-nt} = \epsilon_n(t)$ und somit nach Voraussetzung

$$\int p(e^{-t})\,\mu(dt) = \int \epsilon_n(t)\,\mu(dt) = \int \epsilon_n(t)\,\nu(dt) = \int p(e^{-t})\,\nu(dt). \qquad (\star)$$

Aus der Linearität des Integrals folgt sofort, dass die Gleichheit für beliebige Polynome p gilt. Es sei nun $u \in C_c[0,\infty)$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in (b). Da p_n gleichmäßig gegen $u\circ(-\log)$ konvergiert, dürfen wir Integration & Grenzwert vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}\int u\,d\mu &= \int (u\circ(-\log))(e^{-t})\,d\mu(t)\\&= \lim_{n\to\infty}\int p_n(e^{-t})\,d\mu(t)\\&\overset{(\star)}{=} \lim_{n\to\infty}\int p_n(e^{-t})\,d\nu(t)\\&= \int (u\circ(-\log))(e^{-t})\,d\nu(t)\\&= \int u\,d\nu.\end{aligned}$$

Aufgabe 22.3. Lösung: **Lösung 1 (mit dem Hinweis):** Aus der Annahme folgt, dass $\int_a^b p(x)f(x)\,dx = 0$ für alle Polynome p. Es sei nun $g \in C[a,b]$ eine stetige Funktion und $\epsilon > 0$. Gemäß dem Satz von Weierstraß existiert dann ein Polynom p mit $\|g-p\|_\infty \leqslant \epsilon$. Damit

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (g(x)-p(x))f(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b p(x)f(x)\,dx}_{0}\right| \\ &\leqslant \int_a^b \underbrace{|p(x)-g(x)|}_{\leqslant\epsilon}|f(x)|\,dx \\ &\leqslant \epsilon\int_a^b |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = 0 \quad \text{für alle } g \in C[a,b].$$

Definiert man ein Maß μ durch $\mu(dx) := \mathbb{1}_{[a,b]}(x)f(x)\,dx$, dann gilt also $\int g\,d\mu = 0$ für alle $g \in C[a,b]$. Nach Satz 24.3 ist $C[a,b]$ dicht in $L^1(\mu)$ und deshalb folgt $\int g\,d\mu$ für alle $g \in L^1(\mu)$. Daraus folgt offenbar $\mu = 0$ und somit $f = 0$ (Lebesgue-)fast überall.

Lösung 2 (mit Eindeutigkeit der Fouriertransformation): Wir wollen zeigen, dass $\int_a^b e^{-ix\xi}f(x)\,dx = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Dazu wählen wir ein festes $\xi \in \mathbb{R}$ und definieren

$$u_n(x) := f(x)\sum_{k=0}^n \frac{(-ix\xi)^k}{k!}.$$

Offenbar gilt dann $u_n(x) \to f(x)e^{-ix\xi}$ und

$$\begin{aligned}|u_n(x)| &\leqslant |f(x)|\sum_{k=0}^n \frac{|x\xi|^k}{k!} \\ &\leqslant |f(x)|\sum_{k=0}^\infty \frac{|x\xi|^k}{k!} \\ &= |f(x)|e^{|x\xi|} \leqslant e^{b|\xi|} \in L^1([a,b]).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\int_a^b e^{-ix\xi}f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \frac{\xi^n}{k!}\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0.$$

Aus der Eindeutigkeit der Fouriertransformation (Korollar 23.8), dass $f = 0$ fast überall.

Aufgabe 22.4. Lösung: Es sei $\langle u,w\rangle_{L^2} := \int_0^1 u(s)w(s)\,ds$. Wir zeigen, dass jedes $f \in L^2([0,1],ds)$ mit $\langle f,H_n\rangle_{L^2} = \int_0^1 f(s)H_n(s)\,ds = 0$ $(\forall n \geqslant 0)$ Lebesgue f. ü. null ist, d.h. $f = 0$ in $L^2([0,1],ds)$.

Wenn $\langle f, H_n \rangle_{L^2} = 0$ für alle $n \geqslant 0$ gilt, dann sieht man mit Induktion, dass

$$\int_{k/2^i}^{(k+1)/2^i} f(s)\,ds = 0, \quad \forall k = 0,1,\dots,2^i-1,\ i \geqslant 0. \tag{*}$$

Wir überprüfen den Induktionsschritt. Es gelte (*) für ein i; wähle $k \in \{0,1,\dots 2^i-1\}$. Der Abschluss des Intervalls $I = \left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right)$ ist der Träger von H_{2^i+k}. Auf der halboffenen linken Hälfte, $I_1 = \left[\frac{k}{2^i}, \frac{2k+1}{2^{i+1}}\right)$ hat die Funktion den Wert $2^{i/2}$, auf der halboffenen rechten Hälfte $I_2 = \left[\frac{2k+1}{2^{i+1}}, \frac{k+1}{2^i}\right)$ hat die Funktion den Wert $-2^{i/2}$. Nach Voraussetzung gilt

$$\langle f, H_{2^i+k} \rangle_{L^2} = 0 \implies \int_{I_1} f(s)\,ds = \int_{I_2} f(s)\,ds.$$

Die Induktionsannahme (*) besagt, dass

$$\int_{I_1 \cup I_2} f(s)\,ds = 0 \implies \int_{I_1} f(s)\,ds = -\int_{I_2} f(s)\,ds.$$

Beide Aussagen sind nur dann möglich, wenn $\int_{I_1} f(s)\,ds = \int_{I_2} f(s)\,ds = 0$. Weil I_1, I_2 generische Intervalle der nächsten Verfeinerungsstufe $i \rightsquigarrow i+1$ sind, ist damit der Induktionsschritt beendet.

Wenn wir (*) geeignet aufsummieren, sehen wir, dass die Stammfunktion $F(t) := \int_0^t f(s)\,ds$ an allen dyadischen Punkten $t = k2^{-i}$, $i \geqslant 0$, $k = 0,1,\dots,2^i$ verschwindet; weil die dyadischen Zahlen in $[0,1]$ dicht sind und weil $F(t)$ stetig ist, folgt $F(t) \equiv 0$, also $f = 0$ fast überall.

■■

23 Die Fouriertransformation

Aufgabe 23.1. Lösung:

(a) Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)e^{-ix\xi}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\right]_{x=-1}^{1}\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i\xi}\left(e^{i\xi}-e^{-i\xi}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}\end{aligned}$$

für $\xi \neq 0$. Hier haben wir verwendet, dass $\sin\xi = \operatorname{Im} e^{i\xi} = \frac{1}{2i}(e^{i\xi} - e^{-i\xi})$. Für $\xi = 0$ hat man

$$\widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(0) = \frac{1}{2\pi}\int \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,dx = \frac{1}{\pi}.$$

(Beachte, dass $\frac{\sin\xi}{\xi} \to 1$ für $\xi \to 0$, d.h. - wie erwartet - ist die Fouriertransformation stetig in $\xi = 0$.)

(b) Im Faltungssatz 23.11 wurde gezeigt, dass $\widehat{f * g} = (2\pi)\hat{f}\cdot\hat{g}$. Aus Teil (a) folgt deshalb

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]} * \mathbb{1}_{[-1,1]})(\xi) = (2\pi)\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}.$$

(c) Direkt aus der Definition erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-\cdot}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(\cdot))(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-x}e^{-ix\xi}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-x(1+i\xi)}\,dx\\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+i\xi}\left[e^{-x(1+i\xi)}\right]_{x=0}^{\infty}\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+i\xi}.\end{aligned}$$

(d) Offenbar gilt

$$\begin{aligned}\int e^{-ix\xi}e^{-|x|} &= \int_{(-\infty,0)} e^{-ix\xi}e^{x}\,dx + \int_{(0,\infty)} e^{-ix\xi}e^{-x}\,dx\\ &= \int_{(0,\infty)} e^{iy\xi}e^{-y}\,dy + \int_{(0,\infty)} e^{-ix\xi}e^{-x}\,dx.\end{aligned}$$

Folglich

$$\mathcal{F}(e^{-|\cdot|})(\xi) = \mathcal{F}(e^{-\cdot}\mathbb{1}_{[0,\infty)})(-\xi) + \mathcal{F}(e^{-\cdot}\mathbb{1}_{[0,\infty)})(\xi)$$

$$\overset{(c)}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-i\,\xi} + \frac{1}{1+i\,\xi}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2}.$$

(e) Aus Teilaufgabe (d) und der Tatsache, dass $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}u(x) = (2\pi)^{-1}u(-x)$ (vgl. Korollar 23.25b) für alle u wo die entsprechenden Ausdrücke definiert sind, folgt

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) \overset{(d)}{=} \pi\cdot\mathcal{F}\circ\mathcal{F}(e^{-|\cdot|})(\xi) = \frac{1}{2}e^{-|-\xi|} = \frac{1}{2}e^{-|\xi|}.$$

(f) Wir splitten das Integral geschickt auf:

$$\begin{aligned}\int_{[-1,1]}(1-|x|)e^{-i\,x\xi}\,dx &= \int_{[-1,1]} e^{-i\,x\xi}\,dx + \int_{[-1,0]} xe^{-i\,x\xi}\,dx - \int_{[0,1]} xe^{-i\,x\xi}\,dx\\ &= \int_{[-1,1]} e^{-i\,x\xi}\,dx + \int_{[0,1]}(-y)e^{i\,y\xi}\,dy - \int_{[0,1]} xe^{-i\,x\xi}\\ &= \int_{[-1,1]} e^{-i\,x\xi}\,dx - \int_{[0,1]} x\,\underbrace{(e^{i\,x\xi}+e^{-i\,x\xi})}_{2\cos(x\xi)}\,dx.\end{aligned}$$

Das erste Integral haben wir bereits in Teilaufgabe (a) berechnet. Für das zweite Integral verwenden wir partielle Integation:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\cos(x\xi)\,dx &= \left[x\frac{\sin(x\xi)}{\xi}\right]_{x=0}^1 - \frac{1}{\xi}\int_0^1 \sin(x\xi)\,dx\\ &= \frac{\sin(\xi)}{\xi} - \frac{1}{\xi}\left[\frac{\cos(x\xi)}{\xi}\right]_{x=0}^1\\ &= \frac{\sin(\xi)}{\xi} - \frac{\cos(\xi)}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^2}.\end{aligned}$$

Setzen wir alles zusammen, bekommen wir

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]}(1-|\cdot|))(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\xi}{\xi} - \frac{\cos\xi}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^2}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos\xi}{\xi^2}.$$

(g) Nach Definition gilt

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}e^{-t}\delta_k\right)(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\,x\xi}\sum_{k=0}^\infty\frac{t^k}{k!}e^{-t}\delta_k(dx) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^\infty\frac{t^k}{k!}e^{-t}e^{-i\,k\xi}.$$

(vgl. Beispiel 9.6 b)). Da $e^{-i\,k\xi} = (e^{-i\,\xi})^k$ folgt

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}e^{-t}\delta_k\right)(\xi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^\infty\frac{(te^{-i\,\xi})^k}{k!}e^{-t} = \frac{1}{2\pi}e^{-t}e^{te^{-i\,\xi}} = \frac{1}{2\pi}e^{t(e^{-i\,\xi}-1)}.$$

(h) Die Rechnung funktioniert analog zu (g):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\delta_k\right)(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\,x\xi}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\delta_k(dx)\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}p^kq^{n-k}e^{-i\,\xi k}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^{-i\xi})^k q^{n-k}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(pe^{-i\xi}+q\right)^n.$$

Im letzten Schritt haben wir den Binomialsatz angewendet.

Aufgabe 23.2. Lösung: Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass eine symmetrische positiv definite Matrix eine Wurzel besitzt, d.h. es existiert $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit mit $B\cdot B = A$. Wegen $\det(B\cdot B) = (\det B)^2$ gilt dann insbesondere $\det B = \sqrt{\det A} > 0$. Mit Hilfe der Transformation $y := Bx$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}e^{-\langle x,Ax\rangle}\,dx &= \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}e^{-\langle Bx,Bx\rangle}\,dx\\ &= \frac{1}{\det B}\int e^{-i\langle B^{-1}y,\xi\rangle}e^{-|y|^2}\,dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int e^{-i\langle y,B^{-1}\xi\rangle}e^{-|y|^2}\,dy.\end{aligned}$$

Setzt man

$$g_{1/2}(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}}\exp\left(-|x|^2\right),$$

vgl. Beispiel 23.2c), dann zeigt die obige Rechnung

$$\mathcal{F}(e^{-\langle\cdot,A\cdot\rangle})(\xi) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\mathcal{F}(g_{1/2})\left(B^{-1}\xi\right).$$

Aus Beispiel 23.2c) folgt nun

$$\mathcal{F}(e^{-\langle\cdot,A\cdot\rangle})(\xi) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\frac{1}{(2\pi)^n}\exp\left(-\frac{|B^{-1}\xi|^2}{4}\right).$$

Schließlich gilt wegen $B^{-1} = (B^{-1})^T$

$$|B^{-1}\xi|^2 = \langle B^{-1}\xi, B^{-1}\xi\rangle = \langle \xi, \underbrace{(B^{-1}B^{-1})}_{A^{-1}}\xi\rangle,$$

dass

$$\mathcal{F}(e^{-\langle\cdot,A\cdot\rangle})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\frac{1}{2^{n/2}}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{\langle\xi,A^{-1}\xi\rangle}{4}\right).$$

Aufgabe 23.3. Lösung: Wir folgen dem Hinweis und finden mit Fubini

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{R}{2}\right)^d\int_{-1/R}^{1/R}\cdots\int_{-1/R}^{1/R}\int_{\mathbb{R}^d}(1-e^{i\langle x,\xi\rangle})\,\mu(dx)\,d\xi_1\ldots d\xi_d\\ &= 2\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{R}{2}\right)^d\int_{-1/R}^{1/R}\cdots\int_{-1/R}^{1/R}(1-e^{i\langle x,\xi\rangle})\,d\xi_1\ldots d\xi_d\,\mu(dx)\\ &= 2\int_{\mathbb{R}^d}\frac{R}{2}\int_{-1/R}^{1/R}\ldots\frac{R}{2}\int_{-1/R}^{1/R}(1-e^{i\langle x,\xi\rangle})\,d\xi_1\ldots d\xi_d\,\mu(dx)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_{\mathbb{R}^d}\left(1-\frac{R}{2}\int_{-1/R}^{1/R}\cdots\frac{R}{2}\int_{-1/R}^{1/R} e^{i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi_1\ldots d\xi_d\right)\mu(dx)\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^d}\left(1-\prod_{n=1}^d\frac{R}{2}\int_{-1/R}^{1/R} e^{ix_n\xi_n}\,d\xi_n\right)\mu(dx)\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^d}\left(1-\prod_{n=1}^d\frac{R}{2}\left[\frac{e^{ix_n\xi_n}}{ix_n}\right]_{\xi_n=-1/R}^{\xi_n=1/R}\right)\mu(dx)\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^d}\left(1-\prod_{n=1}^d\frac{e^{ix_n/R}-e^{-ix_n/R}}{2ix_n/R}\right)\mu(dx)\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^d}\left(1-\prod_{n=1}^d\frac{\sin(x_n/R)}{x_n/R}\right)\mu(dx)\\
&\geqslant 2\int_{\mathbb{R}^d\smallsetminus[-2R,2R]^d}\left(1-\prod_{n=1}^d\frac{\sin(x_n/R)}{x_n/R}\right)\mu(dx).
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt beachte man, dass der Integrand wegen $|\sin y/y|\leqslant 1$ positiv ist. Nun ist aber

$$x\in\mathbb{R}^d\smallsetminus[-2R,2R]^d \iff \exists n=1,\ldots,n\,:\,|x_n|>2R$$

und somit ist

$$\prod_{n=1}^d\frac{\sin(x_n/R)}{x_n/R}\leqslant\frac{1}{2}$$

also

$$
\begin{aligned}
2\left(\frac{R}{2}\right)^d\int_{-1/R}^{1/R}\!\!\cdots\int_{-1/R}^{1/R}\int_{\mathbb{R}^d}&(1-e^{i\langle x,\xi\rangle})\,\mu(dx)\,d\xi_1\ldots d\xi_d\\
&\geqslant 2\int_{\mathbb{R}^d\smallsetminus[-2R,2R]^d}\left(1-\prod_{n=1}^d\frac{\sin(x_n/R)}{x_n/R}\right)\mu(dx)\\
&\geqslant 2\int_{\mathbb{R}^d\smallsetminus[-2R,2R]^d}\left(1-\frac{1}{2}\right)\mu(dx)\\
&\geqslant \int_{\mathbb{R}^d\smallsetminus[-2R,2R]^d}\mu(dx).
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Wir können die Ungleichung auch mit Hilfe der FT (an Stelle der inversen FT) formulieren. Dann ist

$$\mu\left(\mathbb{R}^d\smallsetminus[-2R,2R]^d\right)\leqslant 2(\pi R)^d\int_{[-1/R,1/R]^d}(\widehat{\mu}(0)-\operatorname{Re}\widehat{\mu}(\xi))\,d\xi.$$

■■

Aufgabe 23.4. Lösung:

(a) Es seien $\xi_1,\ldots,\xi_n\in\mathbb{R}^d$ und $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$. Aus der Definition der Fourier-Transformation folgt

$$\sum_{i,k=1}^n\phi(\xi_i-\xi_k)\lambda_i\overline{\lambda}_k=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{i,k=1}^n\lambda_i\overline{\lambda}_k\int e^{-ix(\xi_i-\xi_k)}\,d\mu(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda}_k \int e^{-i\,x\xi_i} \overline{e^{-i\,x\xi_k}}\, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-i\,x\xi_i} \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{-i\,x\xi_k} \right)} d\mu(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-i\,x\xi_i} \right|^2 d\mu(x) \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

(b) Wir möchten das Differenzierbarkeitslemma für parametrisierte Integral anwenden. Dazu definieren wir

$$
u(\xi, x) := \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-i\,x\xi}.
$$

Da μ ein endliches Maß ist und $|u(x,\xi)| \leqslant (2\pi)^{-d}$ gilt offenbar $u(\xi,\cdot) \in L^1(\mu)$. Weiterhin ist

$$
\begin{aligned}
|\partial_{\xi_j} u(\xi,x)| &= (2\pi)^{-d} |x_j| \leqslant (2\pi)^{-d} |x| \\
&\leqslant (2\pi)^{-d} \left(\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) + |x|^m \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}(x) \right) =: w(x) \in L^1(\mu)
\end{aligned}
$$

eine integrierbare Majorante. Aus Satz 12.2 folgt somit

$$
\partial\xi_j \phi(\xi) = \partial_{\xi_j} \int u(\xi,x)\, \mu(dx) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int (-ix_j) e^{-i\,x\xi} \mu(dx).
$$

Durch Iteration erhalten wir schließlich, dass $\partial^\alpha \phi$ für beliebige Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leqslant m$ existiert.

(c) Wir folgen dem Hinweis und betrachten zunächst den Fall $d = 1$ und $n = 1$. Schreiben wir den Ausdruck $\phi(2h) - 2\phi(0) + \phi(-2h)$ mit Hilfe der Fourier-Transformation um, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\phi(2h) - 2\phi(0) + \phi(-2h) &= \frac{1}{2\pi} \int (e^{-i\,2hx} - 2 + e^{i\,2hx})\, \mu(dx) \\
&= \frac{1}{\pi} \int (\cos(2hx) - 1) \mu(dx).
\end{aligned}
$$

Der Satz von Hôpital zeigt zudem

$$
\frac{1 - \cos(2y)}{4y^2} \xrightarrow{y \to 0} \frac{1}{2}.
$$

Somit folgt aus Fatous Lemma

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \frac{1}{2}\, \mu(dx) &= \int x^2 \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(2hx)}{4(hx)^2}\, \mu(dx) \\
&\leqslant \liminf_{h\to 0} \frac{1}{4h^2} \int (1 - \cos(2hx))\, \mu(dx) \\
&= -\pi \liminf_{h\to 0} \frac{1}{4h^2} \big(\phi(2h) - 2\phi(0) + \phi(-2h) \big) \\
&= -\pi \phi''(0) < \infty.
\end{aligned}
$$

Fall $n \geqslant 1$: Man zeigt die Aussage per Induktion. Angenommen, $\phi \in C^{2n}(\mathbb{R})$ und die Aussage sei bereits für $n-1$ bewiesen. Wegen $\phi \in C^{2n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi \in C^{2(n-1)}$ gilt dann nach

Induktionsvoraussetzung $\int |x|^{2(n-1)}\,d\mu(x) < \infty$. Somit definiert $\nu(dx) := x^{2(n-1)}\mu(dx)$ ein Maß und

$$\begin{aligned}\widehat{\nu}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int x^{2(n-1)}e^{-ix\xi}\,d\mu(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(-i)^{2(n-1)}}\frac{d^{2(n-1)}}{d\xi^{2(n-1)}}\int e^{-ix\xi}\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Folglich ist $\hat{\nu} \in C^2(\mathbb{R})$. Aus dem ersten Teil des Beweises ($n = 1$) sehen wir

$$\int |x|^{2n}\,d\mu(x) = \int |x|^2\,d\nu(x) < \infty.$$

Fall $d \geqslant 1$: Sei $\pi_j(x) := x_j$, $x \in \mathbb{R}^d$, $j \in \{1,\dots,d\}$. Wende den Fall $d = 1$ auf die Maße $\pi_j(\mu)$ an.

(d) Sei $z \in \mathbb{C}^d$. Ist $K := \operatorname{supp}\mu$ kompakt, dann gilt gemäß dem Satz vom Maximum $M := \sup_{x\in K}|e^{-izx}| < \infty$. Aus

$$\int u\,d\mu = \int_{\operatorname{supp}\mu} u\,d\mu \quad \text{für beliebige } u \geqslant 0$$

folgt deshalb

$$\int |e^{-izx}|\,d\mu(x) \leqslant M\mu(\mathbb{R}^d) < \infty,$$

d.h.

$$\phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{-izx}\,d\mu(x)$$

ist wohldefiniert. Setzen wir

$$u_n(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-izx)^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

dann

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{n}\frac{|zx|^k}{k!} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}e^{|zx|} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\sup_{x\in K}e^{|zx|} < \infty.$$

Da μ ein endliches Maß ist erhalten wir somit aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \int \lim_{n\to\infty} u_n(x)\,\mu(dx)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int u_n(x)\,d\mu(x)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int (zx)^k\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass ϕ holomorph ist.

■■

Aufgabe 23.5. Lösung: Offenbar gilt $e^{ix/n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Andererseits folgt aus $\int_B e^{ix/n}\,dx = 0$ insbesondere, dass $\mathbb{1}_B e^{i\cdot/n} \in \mathcal{L}^1(dx)$. Wegen $|e^{ix/n}| = 1$ erhalten wir somit $\lambda^1(B) < \infty$. Der Satz von der dominierten Konvergenz zeigt nun

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_B e^{ix/n}\,dx = \int_B \underbrace{\lim_{n\to\infty} e^{ix/n}}_{1}\,dx = \lambda^1(B).$$

Alternativlösung: Für $f(x) := \mathbb{1}_B(x)$ folgt aus der Annahme, dass $\hat{f}(1/n) = 0$. Da die Fourier-Transformation stetig ist, vgl. Korollar 23.4, gilt

$$\hat{f}(0) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Andererseits ist aber $\hat{f}(0) = (2\pi)^{-1}\lambda^1(B)$.

Aufgabe 23.6. Lösung:

(a) $\Leftarrow$: Da $\mu(\mathbb{R} \setminus \frac{2\pi}{\xi}\mathbb{Z}) = 0$ gilt

$$\mu = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_j \delta_{\frac{2\pi}{\xi}\mathbb{Z}}$$

für $p_j := \mu(\frac{2\pi}{\xi}j)$. Aus der Definition der Fourier-Transformation erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(\eta) &= \frac{1}{2\pi}\int e^{-ix\eta}\mu(dx)\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}} p_j \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\xi}j\right)\eta\right]\end{aligned}$$

für alle $\eta \in \mathbb{R}$. Speziell für $\eta = \xi$ gilt

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}} p_j \underbrace{\exp(-i2\pi j)}_{1}\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}} p_j \exp(-i\,0) = \hat{\mu}(0).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Aus $\hat{\mu}(\xi) = \hat{\mu}(0)$ folgt

$$2\pi(\hat{\mu}(0) - \hat{\mu}(\xi)) = \int (1 - e^{-ix\xi})\,\mu(dx) = 0.$$

Insbesondere $\int (1 - e^{-ix\xi})\,\mu(dx) \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\int (1 - e^{-ix\xi})\,\mu(dx) = \mathrm{Re}\int (1 - e^{-ix\xi})\,\mu(dx) = \int (1 - \cos(x\xi))\,\mu(dx) = 0.$$

Wegen $1 - \cos(x\xi) \geqslant 0$ impliziert dies

$$\mu\{x \in \mathbb{R}; 1 - \cos(x\xi) > 0\} = 0.$$

Folglich,

$$0 = \mu\{x \in \mathbb{R}; \cos(x\xi) \neq 1\} = \mu\left(\mathbb{R} \setminus \frac{2\pi}{\xi}\mathbb{Z}\right).$$

(b) Wegen $|\widehat{\mu}(\xi_1)| = \widehat{\mu}(0)$ existiert ein $z_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$\widehat{\mu}(\xi_1) = \widehat{\mu}(0)e^{iz_1\xi_1}.$$

Somit

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\xi_1(x+z_1)}\,\mu(dx) = \hat{\mu}(0).$$

Beachte, dass die linke Seite gerade die Fourier-Transformation des Maßes $\nu(B) := \mu(B - z_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ist, d.h.

$$\hat{\nu}(\xi_1) = \hat{\mu}(0) = \hat{\nu}(0).$$

Aus Teilaufgabe (a) folgt deshalb, dass $\nu(\mathbb{R} \setminus \frac{2\pi}{\xi_1}\mathbb{Z}) = 0$. Dies ist äquivalent zu

$$\mu\left\{\mathbb{R} \setminus \left(z_1 + \frac{2\pi}{\xi_1}\mathbb{Z}\right)\right\} = 0.$$

Mit der gleichen Argumentation finden wir $z_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\mu\left\{\mathbb{R} \setminus \left(z_2 + \frac{2\pi}{\xi_2}\mathbb{Z}\right)\right\} = 0.$$

Setzen wir

$$A := \left(z_1 + \frac{2\pi}{\xi_1}\mathbb{Z}\right) \cap \left(z_2 + \frac{2\pi}{\xi_2}\mathbb{Z}\right)$$

gilt also gerade $\mu(\mathbb{R} \setminus A) = 0$. Wir zeigen nun, dass A höchstens ein Element enthält. Tatsächlich: Angenommen, es existieren zwei Punkte in A, dann existieren $n, n' \in \mathbb{Z}$ und $m, m' \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} z_1 + \frac{2\pi}{\xi_1}n &= z_2 + \frac{2\pi}{\xi_2}n', \\ z_1 + \frac{2\pi}{\xi_1}m &= z_2 + \frac{2\pi}{\xi_2}m'. \end{aligned}$$

Subtrahieren der beiden Gleichungen gibt

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\xi_1}(n - m) &= \frac{2\pi}{\xi_2}(n' - m') \\ \Rightarrow \frac{\xi_2}{\xi_1} &= \frac{n' - m'}{n - m} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Offenbar ist dies ein Widerspruch zu der Annahme, dass $\frac{\xi_1}{\xi_2} \notin \mathbb{Q}$.

24 Dichte Teilmengen in L^p $(1 \leqslant p < \infty)$

Aufgabe 24.1. Lösung: Sei $f \in L^p(\mu)$ und $\epsilon > 0$. Es genügt zu zeigen, dass $h \in \mathcal{C}$ existiert mit $\|f - h\|_p \leqslant \epsilon$. Da nach Voraussetzung $\mathcal{D}$ dicht in $L^p(\mu)$ ist, gibt es $g \in \mathcal{D}$ mit $\|f - g\|_p \leqslant \epsilon/2$. Andererseits ist $\mathcal{C}$ dicht in $\mathcal{D}$, d.h. es existiert $h \in \mathcal{D}$ mit $\|g - h\|_p \leqslant \epsilon/2$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\|f - h\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - h\|_p \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

■■

Aufgabe 24.2. Lösung:

(a) Es ist zu zeigen, dass $\|\tau_h(f)\|_p^p = \|f\|_p$ für alle $p \in \mathcal{L}^p(dx)$. Dies folgt direkt aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes:

$$\|\tau_h(f)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x-h)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p \, dy = \|f\|_p^p.$$

(b) Wir zeigen die Behauptung zunächst für $f \in C_c(\mathbb{R})$. Für $f \in C_c(\mathbb{R})$ ist $K := \operatorname{supp} f$ kompakt. Wähle $R > 0$, so dass $K + B_0(1) \subset \overline{B_R(0)}$. Aus $|f(x-h) - f(x)| \to 0$ für $h \to 0$ und

$$|f(x-h) - f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\overline{B_R(0)}}(x) \in \mathcal{L}^p(dx)$$

für alle $h < 1$ folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\|\tau_h(f) - f\|_p^p = \int |f(x-h) - f(x)|^p \, dx \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Nun sei $f \in \mathcal{L}^p(dx)$. Da $C_c(\mathbb{R})$ dicht in $L^p(dx)$ ist, vgl. Satz 24.8, existiert eine Teilfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$ mit $\|f_n - f\|_p \to 0$. Mit Teilaufgabe (a) folgt nun

$$\begin{aligned}\|\tau_h(f) - f\|_p &\leqslant \underbrace{\|\tau_h(f - f_n)\|_p}_{\leqslant \|f_n - f\|_p} + \|\tau_h(f_n) - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \\ &\xrightarrow{h \to 0} 2\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \to \infty} 0.\end{aligned}$$

Das beweist die erste Aussage. Für die zweite Aussage gehen wir analog vor: Es sei zunächst wieder $f \in C_c(\mathbb{R})$ und $K := \operatorname{supp} f$. Da K kompakt ist, können wir $R > 0$ wählen, so dass $(h + K) \cap K = \varnothing$ für alle $h > R$ $(h + K := \{h + x; x \in K\})$. Für $h > R$ gilt dann

$$|f(x-h) - f(x)|^p = |f(x-h)|^p \mathbb{1}_K(x+h) + |f(x)|^p \mathbb{1}_K(x)$$

und somit

$$\begin{aligned}\|\tau_h(f) - f\|_p^p &= \int_{K+h} |f(x-h)|^p\,dx + \int_K |f(x)|^p\,dx\\ &= \int_K |f(y)|^p\,dy + \int_K |f(x)|^p\,dx\\ &= 2\|f\|_p^p,\end{aligned}$$

d.h. die behauptete Gleichheit gilt für alle $f \in C_c(\mathbb{R})$. Wie im ersten Teil dieser Teilaufgabe folgt nun die Behauptung für alle $f \in \mathcal{L}^p(dx)$.

■■

Aufgabe 24.3. Lösung:

(a) Die Stetigkeit folgt direkt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz: Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Aus $\mathbb{1}_{[x_n-h,x_n+h]} \to \mathbb{1}_{[x-h,x+h]}$ fast überall ergibt sich wegen $f \in \mathcal{L}^1(dx)$, dass $M_hf(x_n) \to M_hf(x)$ für $n \to \infty$.

Die Kontraktivität von M_h sieht man so:

$$\begin{aligned}\int |M_hf(x)|\,dx &= \frac{1}{2h}\int \left|\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt\right| dx\\ &\leqslant \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \underbrace{\int |f(x+t)|\,dx}_{\int |f(y)|\,dy = \|f\|_1}\,dt \leqslant \|f\|_1.\end{aligned}$$

(Die Vertauschung der Integrale kann mit dem Satz von Tonelli gerechtfertigt werden.)

(b) Es sei zunächst $f \in C_c(\mathbb{R})$. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$|M_hf(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x)|\,dx \leqslant \sup_{t\in[-h,h]} |f(x+t) - f(x)| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da der Träger $K := \operatorname{supp} f$ kompakt ist, können wir $R > 0$ wählen mit $K + B_0(1) \subset \overline{B_0(R)}$. Für $h < 1$ ist dann $M_hf(x) = 0 = f(x)$ für $x \notin \overline{B_0(R)}$. Wegen $|M_hf(x)| \leqslant |f(x)|$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$|M_hf(x) - f(x)| = |M_hf(x) - f(x)|\mathbb{1}_{\overline{B_0(R)}}(x) \leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\overline{B_0(R)}}(x) \in \mathcal{L}^1(dx).$$

Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir somit

$$\|M_hf - f\|_1 = \int |M_hf(x) - f(x)|\,dx \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

d.h. die Behauptung gilt für alle $f \in C_c(\mathbb{R})$. Nun sei $f \in \mathcal{L}^1(dx)$. Nach Satz 24.9 existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$ mit $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Folglich

$$\begin{aligned}\|M_hf - f\| &\leqslant \underbrace{\|M_h(f - f_n)\|_1}_{\|f_n - f\|_1} + \|M_hf_n - f_n\|_1 + \|f_n - f\|_1\\ &\xrightarrow{h\to 0} 2\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

■■

Aufgabe 24.4. Lösung:

(a) Es sei $A \in \mathcal{A}$ mit $f := \mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann gilt $\mu(A) < \infty$ und da μ von außen regulär ist, existiert $U \subset E$ offen mit $A \subset U$ und $\mu(U) < \infty$. Wie im Beweis von Lemma 24.2 folgt deshalb, dass $\phi_\epsilon \in C_{\text{Lip}}(E) \cap \mathcal{L}^p(\mu)$ existiert mit $\|f - \phi_\epsilon\|_p \leqslant \epsilon$ (ersetze im Beweis $C_b(E)$ durch $C_{\text{Lip}}(E)$).

(b) Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, dann existiert nach dem Sombrero-Lemma (Satz 7.11) eine Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \leqslant f_n \leqslant f$, $f_n \uparrow f$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt $\int (f - f_n)^p \, d\mu \downarrow 0$. Insbesondere können wir also $n \in \mathbb{N}$ wählen mit $\|f_n - f\|_p \leqslant \epsilon$. Aus Teil (a) folgt (wegen Linearität), dass $\phi_\epsilon \in C_{\text{Lip}}(E)$ existiert mit $\|f_n - \phi_\epsilon\|_p \leqslant \epsilon$. Folglich,

$$\|f - \phi_\epsilon\|_p \leqslant \|f - f_n\|_p + \|f_n - \phi_\epsilon\|_p \leqslant 2\epsilon.$$

(c) Zerlege $f = f^+ - f^-$. Da $f^+, f^- \in \mathcal{L}^p(\mu)$ finden wir mit Teil (b) Funktionen $\phi, \psi \in C_{\text{Lip}}(E) \cap \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\|f^+ - \phi\|_p \leqslant \epsilon$ und $\|f^- - \psi\|_p \leqslant \epsilon$. Damit

$$\|f - (\phi - \psi)\|_p \leqslant \|f^+ - \phi\|_p + \|f^- - \psi\|_p \leqslant 2\epsilon.$$

■■

Aufgabe 24.5. Lösung:

(a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzälbare dichte Teilmenge in E. Für jedes x_n existiert nach Voraussetzung eine relativ-kompakte offene Umgebung V_n von x_n. Wegen $B_{1/k}(x_n) \subset V_n$ für $k \geqslant k_0(x_n)$ hinreichend groß, ist $B_{1/k}(x_n)$ für $k \geqslant k_0(x_n)$ auch relativ kompakt. Somit definiert

$$\{B_{1/k}(x_n); n \in \mathbb{N}, k \geqslant k_0(x_n)\} =: \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$$

eine Folge von offenen relativ-kompakten Mengen. Für eine beliebige offene Menge $U \subset E$ gilt nun

$$U = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ U_n \subset U}} U_n.$$

(Die Relation »$\supset$« ist klar. Für »$\subset$« argumentiert man so: Für jedes $x \in U$ existiert $r > 0$ mit $B_r(x) \subset U$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicht ist, können wir $n \in \mathbb{N}$ und $k \geqslant k_0(x_n)$ wählen mit $B_{1/k}(x_n) \subset B_r(x) \subset U$.)

(b) Es sei $U \subset E$ offen mit $\mu(U) < \infty$ und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge aus (a). Gemäß Teil (a) existiert dann eine Teilfolge $(U_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $U = \bigcup_k U_{n(k)}$. Für $W_n := \bigcup_{k=1}^n U_{n(k)}$ gilt dann $W_n \in \mathcal{D}$. Da $W_n \uparrow U$ folgt aus dem Satz von Beppo Levi zudem

$$\|\mathbb{1}_{W_n} - \mathbb{1}_U\|_{L^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Folglich ist $\mathbb{1}_U \in \overline{\mathcal{D}}$.

(c) Wir zeigen zunächst, dass μ von außen regulär ist. Dazu definieren wir

$$G_n := \bigcup_{k=1}^{n} U_k.$$

Offenbar ist G_n offen, $G_n \uparrow E$ und $\mu(G_n) < \infty$ (da U_k relativ-kompakt ist und μ auf kompakten Mengen endlich ist). Damit sind die Voraussetzungen von Satz A.12b) erfüllt und es folgt, dass μ von außen regulär ist.

Es sei nun $B \in \mathcal{B}(E)$ mit $\mu(B) < \infty$ und $\epsilon > 0$. Da μ von außen regulär ist, existiert dann eine Folge von offenen Menge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $U_n \supset B$ und $\mu(U_n) < \infty$. Aua dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt $\|\mathbb{1}_{U_n} - \mathbb{1}_B\|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|\mathbb{1}_{U_n} - \mathbb{1}_B\|_p \leqslant \epsilon$. Wegen (b) existiert $D \in \mathcal{D}$ mit $\|\mathbb{1}_{U_n} - \mathbb{1}_D\|_p \leqslant \epsilon$. Folglich

$$\|\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_D\|_p \leqslant \|I_B - \mathbb{1}_{U_n}\|_p + \|\mathbb{1}_{U_n} - \mathbb{1}_D\|_p \leqslant 2\epsilon.$$

(d) Per Definition gilt $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$, d.h. es genügt zu zeigen, dass wir für alle $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\epsilon > 0$ ein $D \in \mathcal{D}$ finden können mit $\|f - \mathbb{1}_D\|_p \leqslant \epsilon$. Aus dem Sombrero-Lemma (Korollar 7.12) und dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ von einfachen Funktionen existiert mit $\|f - f_n\|_p \to 0$. Wähle n hinreichend groß, so dass $\|f - f_n\|_p \leqslant \epsilon$. Da f_n eine Darstellung der Form

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbb{1}_{B_j}(x)$$

mit $c_j \in \mathbb{R}$, $B_j \in \mathcal{B}(E)$, $j = 1, \dots, N$, existiert nach Teilaufgabe (c) $D \in \mathcal{D}$ mit $\|f_n - \mathbb{1}_D\|_p \leqslant \epsilon$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir $\|f - \mathbb{1}_D\|_p \leqslant 2\epsilon$. Die Separabilität von $\mathcal{L}^p(\mu)$ folgt schließlich aus der Tatsache, dass $\mathcal{D}$ abzählbar ist.

■■

Aufgabe 24.6. Lösung:

(a) Wir betrachten zunächst den Fall, dass A offen ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A \neq \varnothing$. Es sei $\epsilon > 0$. Wegen

$$\left\{x \in A; d(x, A^c) < \frac{1}{n}\right\} \downarrow \varnothing \quad \text{für } n \to \infty$$

können wir auf Grund der Stetigkeit des Maßes von oben $N \in \mathbb{N}$ wählen, so dass

$$\mu\left(d(\cdot, A^c) < \frac{1}{n}\right) < \epsilon \quad \text{für alle } n \geqslant N.$$

Wir definieren $\phi_n(x) := \min\{nd(x, A^c), 1\}$. Offensichtlich ist $\phi_n \in C_b(E)$ und $\|\phi_\epsilon\|_\infty \leqslant 1 = \|\mathbb{1}_A\|_\infty$. Wegen $0 \leqslant \phi_n \leqslant \mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^p$ ist zudem $\phi_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Weiterhin gilt

$$\{\mathbb{1}_A \neq \phi_n\} \subset \left\{d(\cdot, A^c) < \frac{1}{n}\right\};$$

folglich $\mu(\mathbb{1}_A \neq \phi_n) \leqslant \epsilon$ für alle $n \geqslant N$. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz sehen wir außerdem, dass $\|\mathbb{1}_A - \phi_n\|_{L^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Wählen wir $n \geqslant N$ hinreichend groß, gilt also $\|\mathbb{1}_A - \phi_n\|_{L^p} \leqslant \epsilon$. Für dieses n erfüllt dann ϕ_n sämtliche gewünschte Eigenschaften.

Um die Behauptung auf beliebige Borelmengen $A \in \mathcal{B}(E)$ zu verallgemeinern, geht man wie in Lemma 24.2 vor: Es sei $U \subset E$ mit $\mu(U) < \infty$. Definiere

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{B}(U); \forall \epsilon > 0 \exists \phi_\epsilon \in C_b(E) \cap \mathcal{L}^p(\mu) : (\textbf{??})\,\text{gilt}\}.$$

Genau wie im Beweis von Lemma 24.2 folgt, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist. Gemäß unseren Überlegungen sind zudem die offenen Mengen in $\mathcal{D}$ enthalten und damit erhalten wir $\mathcal{B}(U) \subset \mathcal{D}$.

Ist nun $A \in \mathcal{B}(E)$ eine beliebige Menge mit $\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^p(\mu)$, so gilt $\mu(A) < \infty$. Da μ von außen regulär ist, existiert $U \subset E$ offen mit $A \subset U$ und $\mu(U) < \infty$. Wegen $A \in \mathcal{B}(U) \subset \mathcal{D}$ folgt dann die Behauptung.

(b) Es sei $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $0 \leqslant f \leqslant 1$ und $\epsilon > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\|f\|_{L^\infty} = 1$ (sonst: betrachte $f/\|f\|_{L^\infty}$). Aus dem (Beweis vom) Sombrero-Lemma, Satz 7.11, wissen wir, dass

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leqslant f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\mathbb{1}_{\{f>n\}} \overset{0\leqslant f\leqslant 1}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leqslant f < \frac{k+1}{2^n}\}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

monoton gegen f konvergiert. Setzen wir $f_0 := 0$, so folgt

$$f = \lim_{n\to\infty}(f_n - f_0) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(f_j - f_{j-1}) = \sum_{j\geqslant 1}(f_j - f_{j-1}) = \sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{2^j}\phi_j$$

für $\phi_j := 2^j(f_j - f_{j-1})$. Wir behaupten nun, dass

$$\phi_j(x) \in \{0,1\} \quad \text{für alle } x \in \left\{f_{j-1} = \frac{k}{2^{j-1}}\right\}. \tag{$\star\star$}$$

Tatsächlich: Per Definition kann f_j auf der Menge $\left\{f_{j-1} = \frac{k}{2^{j-1}}\right\} = \left\{\frac{k}{2^{j-1}} \leqslant f < \frac{k+1}{2^{j-1}}\right\}$ nur die Werte $\frac{2k}{2^j}$ und $\frac{2k+1}{2^j}$ annehmen. Im ersten Fall ist $\phi_j = 0$, im zweiten dagegen $\phi_j = 1$. $\phi_j(x) = 1$ tritt also genau dann auf, wenn

$$x \in \left\{f_j = \frac{2k+1}{2^j}\right\} = \left\{\frac{2k+1}{2^j} \leqslant f < \frac{2k+2}{2^j}\right\}.$$

Wir können $A_j := \{\phi_j = 1\}$ daher schreiben als

$$A_j = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left\{\frac{2k+1}{2^j} \leqslant f < \frac{2k+2}{2^j}\right\}.$$

Wegen $\phi_j = \mathbb{1}_{A_j}$ erhalten wir somit die Darstellung

$$f = \sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{2^j}\mathbb{1}_{A_j}.$$

Bemerke, dass $\mathbb{1}_{A_j} \leqslant 2^j f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Gemäß Teil (a) existiert somit für jedes $j \geqslant 1$ eine Funktion $\phi_{j,\epsilon} \in C_b(E) \cap \mathcal{L}^p(\mu)$, so dass

$$\|\phi_{j,\epsilon} - \phi_j\|_{L^p} \leqslant \frac{\epsilon}{2^j}, \mu(\phi_{j,\epsilon} \neq \phi_j) \leqslant \frac{\epsilon}{2^j} \quad \text{und} \quad \|\phi_{j,\epsilon}\|_\infty \leqslant \|\phi_j\|_{L^\infty} \leqslant 1.$$

Die Funktion $\phi_\epsilon := \sum_{j\geqslant 1}\frac{\phi_{j,\epsilon}}{2^j}$ hat alle geforderten Eigenschaften:

- ϕ_ϵ ist stetig, denn die Funktion ist ein gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen:
$$\left\| \phi_\epsilon - \sum_{j=1}^{n} \frac{\phi_{j,\epsilon}}{2^j} \right\|_\infty \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \|\phi_{j,\epsilon}\|_\infty \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
- $\|\phi_\epsilon\|_\infty \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \frac{\|\phi_{j,\epsilon}\|_\infty}{2^j} \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{2^j} = 1 = \|f\|_{L^\infty}$.
- $\|\phi_\epsilon - f\|_{L^p} \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{2^j} \|\phi_{j,\epsilon} - \phi_j\|_{L^p} \leqslant \epsilon \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{2^j} \leqslant \epsilon$. Insbesondere: $\phi_\epsilon \in \mathcal{L}^p(\mu)$.
- $\mu(\phi_\epsilon \neq f) \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \mu(\phi_{j,\epsilon} \neq \phi_j) \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \epsilon 2^{-j} = \epsilon$.

(c) Wir bemerken zunächst, dass (**??**) für alle $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $0 \leqslant g \leqslant \|g\|_{L^\infty(dx)} < \infty$ gilt; wende dazu Teil (b) auf $g/\|g\|_{L^\infty(dx)}$ an. Weiterhin beobachten wir, dass wir für solche g ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass $\phi_\epsilon \geqslant 0$ gilt; anderenfalls betrachten wir $\tilde{\phi}_\epsilon := \phi_\epsilon \vee 0$.

Es sei nun $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\|f\|_{L^\infty(dx)} < \infty$. Wir schreiben $f = f^+ - f^-$ und indem wir die eben gemachte Bemerkung verwenden, finden wir $\phi_\epsilon, \psi_\epsilon \in C_b(E) \cap \mathcal{L}^p(\mu)$, $\phi_\epsilon \geqslant 0$, $\psi_\epsilon \geqslant 0$, so dass
$$\|\phi_\epsilon\|_\infty \leqslant \|f^+\|_{L^\infty} \quad \mu\{f^+ \neq \phi_\epsilon\} \leqslant \epsilon \quad \text{und} \quad \|f^+ - \phi_\epsilon\|_{L^p} \leqslant \epsilon$$
und
$$\|\psi_\epsilon\|_\infty \leqslant \|f^-\|_{L^\infty} \quad \mu\{f^- \neq \psi_\epsilon\} \leqslant \epsilon \quad \text{und} \quad \|f^- - \psi_\epsilon\|_{L^p} \leqslant \epsilon.$$
Für $\Phi_\epsilon := \phi_\epsilon - \psi_\epsilon \in C_b(E) \cap \mathcal{L}^p(\mu)$ gilt dann
$$\mu(\Phi_\epsilon \neq f) \leqslant \mu(\phi_\epsilon \neq f^+) + \mu(\psi_\epsilon \neq f^-) \leqslant 2\epsilon$$
sowie
$$\|\Phi_\epsilon\|_{L^\infty} \leqslant \max\{\|f^+\|_{L^\infty}, \|f^-\|_{L^\infty}\} = \|f\|_{L^\infty}$$
(hier benötigen wir, dass $\phi_\epsilon \geqslant 0$ und $\psi_\epsilon \geqslant 0$). Aus der Dreiecksungleichung folgt außerdem
$$\|f - \Phi_\epsilon\|_{L^p} \leqslant \|f^+ - \phi_\epsilon\|_{L^p} + \|f^- - \psi_\epsilon\|_{L^p} \leqslant 2\epsilon.$$
Folglich erfüllt Φ_ϵ die Bedingungen (**??**) für f.

(d) Es sei $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\epsilon > 0$. Aus der Markov-Ungleichung (vgl. Aufgabe 10.4) folgt
$$\mu(|f| \geqslant R) \leqslant \frac{1}{R^p} \int |f|^p \, d\mu.$$
Insbesondere können wir $R > 0$ hinreichend groß wählen so, dass $\mu(|f| \geqslant R) \leqslant \epsilon$. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz sehen wir zudem, dass
$$\int_{\{|f|>R\}} |f|^p \, d\mu < \epsilon$$
für $R > 0$ hinreichend groß. Für $f_R := (-R) \vee f \wedge R$ existiert nach (c) eine Funktion $\phi_\epsilon \in C_b(E) \cap \mathcal{L}^p(\mu)$ mit
$$\|\phi_\epsilon\|_\infty \leqslant \|f_R\|_{L^\infty} \quad \mu\{f_R \neq \phi_\epsilon\} \leqslant \frac{\epsilon}{R^p} \quad \text{und} \quad \|f_R - \phi_\epsilon\|_{L^p} \leqslant \epsilon.$$

Offensichtlich gilt dann auch $\|\phi_\epsilon\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^\infty}$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
&\|\phi_\epsilon - f\|_{L^p}^p \\
&\quad = \int_{\{|f|\leqslant R\}} |\phi_\epsilon - f|^p \, d\mu + \underbrace{\int_{\{|f|>R\}\cap\{\phi_\epsilon = f_R\}} |\phi_\epsilon - f|^p \, d\mu}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{\{|f|>R\}\cap\{\phi_\epsilon \neq f_R\}} |\phi_\epsilon - f|^p \, d\mu}_{=:I_2} \\
&\quad \leqslant \|\phi_\epsilon - f_R\|_{L^p}^p + I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Wir schätzen I_1 und I_2 getrennt ab. Wegen $f_R|_{\{|f|>R\}} = R$ gilt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\{f>R\}\cap\{\phi_\epsilon = f_R\}} (f-R)^p \, d\mu + \int_{\{f<-R\}\cap\{\phi_\epsilon = f_R\}} (-R-f)^p \, d\mu \\
&\leqslant \int_{\{f>R\}\cap\{\phi_\epsilon = f_R\}} \underbrace{f^p}_{|f|^p} \, d\mu + \int_{\{f<-R\}\cap\{\phi_\epsilon = f_R\}} \underbrace{(-f)^p}_{|f|^p} \, d\mu \\
&\leqslant \int_{\{|f|>R\}} |f|^p \, d\mu < \epsilon.
\end{aligned}$$

Aus der Ungleichung

$$|a+b|^p \leqslant C(p)(a^p + b^p) \quad \text{für alle } a, b \geqslant 0,\ p \geqslant 1 \tag{$\sharp$}$$

(die Konstante $C(p)$ hängt nicht von a, b ab) erhalten wir zudem

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqslant C(p) \int_{\{|f|>R\}\cap\{\phi_\epsilon \neq f_R\}} |\phi_\epsilon|^p \, d\mu + C(p) \int_{\{|f|>R\}\cap\{\phi_\epsilon \neq f_R\}} |f|^p \, d\mu \\
&\leqslant C(p) \|\phi_\epsilon\|_\infty^p \mu(\phi_\epsilon \neq f_R) + C(p) \int_{\{|f|>R\}} |f|^p \, d\mu \\
&\leqslant C(p) R^p \frac{\epsilon}{R^p} + C(p)\epsilon.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\|\phi_\epsilon - f\|_{L^p}^p \leqslant \epsilon^p + \epsilon + 2C(p)\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, können wir also $\|\phi_\epsilon - f\|_{L^p}$ beliebig klein machen. Schließlich bemerken wir noch, dass

$$\mu(f \neq \phi_\epsilon) \leqslant \mu(f_R \neq \phi_\epsilon) + \mu(|f| \geqslant R) \leqslant 2\epsilon.$$

Das zeigt, dass ϕ_ϵ alle gewünschten Eigenschaften besitzt.

Bemerkung: ($\sharp$) folgt aus der Hölder-Ungleichung:

$$\left|\sum_{j=1}^d x_j \cdot y_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^d |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ wobei $p + q = 1$ konjugierte Indizes bezeichnen. Wählen wir speziell $d = 2$, $x = (a, b)$, $y = (1, 1)$, dann

$$|a \cdot 1 + b \cdot 1| \leqslant (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{1}{q}}.$$

Bilden wir von beiden Seiten die p-te Potenz, erhalten wir die gewünschte Ungleichung.

■■

25 Der Fortsetzungssatz von Daniell

Aufgabe 25.1. Lösung:

(a) Vereinigungsstabilität ist trivial.

Schnittstabilität: Betrachte $S_1, \dots, S_n, R_1, \dots, R_m \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$(R_1 \cup \dots \cup R_m) \cap (S_1 \cup \dots \cup S_n) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{n} R_i \cap S_k \in \mathcal{S}_\cup.$$

Differenz-Stabilität: Wir benötigen eine Vorbereitung: $S, S_1, \dots, S_n, R_1, R_2, \dots, R_m \in \mathcal{S}$. Dann gilt nach Definition eines Halbrings, dass $S \setminus R$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{S}$ ist. Insbesondere also

$$S \setminus R \in \mathcal{S}_\cup,$$

und es folgt

$$(S_1 \cup \dots \cup S_n) \setminus R = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(S_i \setminus R)}_{\in \mathcal{S}_\cup} \in \mathcal{S}_\cup.$$

Schließlich sieht man durch wiederholte Anwendung der obigen Regeln, dass

$$(S_1 \cup \dots \cup S_n) \setminus (R_1 \cup \dots \cup R_m) = (S_1 \cup \dots \cup S_n) \setminus R_1 \setminus R_2 \setminus \dots \setminus R_m$$

in $\mathcal{S}_\cup$ ist.

(b) Die Inklusion $\mathcal{S}_{\dot\cup} \subset \mathcal{S}_\cup$ ist klar. Sei nun $S = S_1 \cup \dots \cup S_n \in \mathcal{S}_\cup$. Dann gilt

$$S = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} \left(S_i \cap \bigcap_{k \neq i} S_k^c \right).$$

Weiter gilt

$$S_i \cap \bigcap_{k \neq i} S_k^c = S_i \underbrace{\setminus S_1 \setminus S_2 \setminus \dots \setminus S_n}_{S_i \text{ kommt nicht vor}}.$$

Nun ist $S_i \setminus S_1 \in \mathcal{S}_{\dot\cup}$ (nach Def. Halbring), daher ist $(S_i \setminus S_1) \setminus S_2 \in \mathcal{S}_{\dot\cup}$ usw., d.h.

$$S_i \cap \bigcap_{k \neq i} S_k^c \in \mathcal{S}_{\dot\cup} \implies S = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} \left(S_i \cap \bigcap_{k \neq i} S_k^c \right) \in \mathcal{S}_{\dot\cup}.$$

Es folgt also $\mathcal{S}_\cup \subset \mathcal{S}_{\dot\cup}$.

(c) Trivialerweise gilt $\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \mathcal{V}(\mathcal{S}_{\dot\cup})$, beachte hierbei, dass $\mathbb{1}_{S \dot\cup R} = \mathbb{1}_R + \mathbb{1}_S$. Weil aber $\mathcal{S}_\cup = \mathcal{S}_{\dot\cup}$, folgt $\mathcal{V}(\mathcal{S}_\cup) = \mathcal{V}(\mathcal{S}_{\dot\cup})$ und wir erhalten $\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \mathcal{V}(\mathcal{S}_\cup)$.

■■

Aufgabe 25.2. Lösung:

(a) Wenn $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ eine gegen $h \in \mathcal{V}$ aufsteigende Folge ist, dann gilt $I(h) = \sup_n I(h_n)$. Das folgt aus der Daniell-Stetigkeit, denn

$$h - h_n \downarrow 0 \implies I(h) - I(h_n) = I(h - h_n) \downarrow 0 \implies \sup_n I(h_n) = I(h).$$

(b) Wenn wir $h_n = \phi_m \wedge \psi_n$ und $h = \phi_m$ betrachten, dann gilt $h_n \uparrow \phi_m$ (hier verwenden wir $\sup_n \phi_n \leqslant \sup_n \psi_n$) und

$$I(\phi_m) = \sup_n I(\phi_m \wedge \psi_n) \leqslant \sup_n I(\psi_n).$$

Die Behauptung folgt, indem wir auf der linken Seite $\sup_m$ bilden.

■■

Aufgabe 25.3. Lösung: Definitionsgemäß haben wir

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{B}^* &\iff \mathbb{1}_B \in \mathcal{L}_{\mathcal{V}} \qquad \text{(Def. im Beweis von Korollar 25.8)} \\ &\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists u_\epsilon \in -\mathcal{U}, v_\epsilon \in \mathcal{U} : u_\epsilon \leqslant \mathbb{1}_B \leqslant v_\epsilon, \quad I(v_\epsilon) - I(u_\epsilon) \leqslant \epsilon \quad \text{(Def. von } \mathcal{L}_{\mathcal{V}}) \\ &\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \phi_\epsilon \in \mathcal{V}, \psi_\epsilon \in \mathcal{V} : \phi_\epsilon \leqslant \mathbb{1}_B \leqslant \psi_\epsilon, \quad I(\psi_\epsilon) - I(\phi_\epsilon) \leqslant \epsilon \quad \text{(Def. von } \pm\mathcal{U}) \end{aligned}$$

(In der letzten Äquivalenz verwenden wir, dass $\mathcal{U}$ aus aufsteigenden Limiten von Treppenfunktionen von $\mathcal{V}$ besteht und dass $I(v_\epsilon) < \infty$ ist.)

Nun sind $\phi_\epsilon, \psi_\epsilon$ Treppenfunktionen mit Stufen in $\mathcal{A}$. Wir haben also

$$\sum_{i=1}^m a_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x) \leqslant \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{C_i}(x), \quad A_i, C_i \in \mathcal{A}.$$

Weil $\mathcal{A}$ eine Algebra ist können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Mengen $A_1, \dots, A_m$ bzw. $C_1, \dots, C_n$ disjunkt sind (sonst machen wir sie disjunkt!). Weiter können wir auch annehmen, dass $B \cap C_i \neq \emptyset$, sonst könnten wir die entsprechenden C_i's auf der r.S. weglassen, ohne die Ungleichung zu ändern. Daher gilt auch

$$A := A_1 \cup \dots \cup A_m \subset B \subset C_1 \cup \dots \cup C_n =: C, \quad a_i \leqslant 1, \quad c_i \geqslant 1$$

und folglich

$$I(\psi_\epsilon) - I(\phi_\epsilon) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(C_i) - \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) \leqslant \epsilon.$$

Offensichtlich ist aber auch

$$\mu(C) - \mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i) - \sum_{i=1}^m \mu(A_i) \leqslant \sum_{i=1}^n c_i \mu(C_i) - \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) \leqslant \epsilon.$$

Somit haben wir schließlich

$$B \in \mathcal{B}^* \iff \forall \epsilon > 0\ \exists A, C \in \mathcal{A} : A \subset B \subset C, \quad \mu(C) - \mu(A) \leqslant \epsilon,$$

und das bedeutet gerade (vgl. Aufgabe 3.7), dass B in der Vervollständigung von $\sigma(\mathcal{A})$ ist.

Aufgabe 25.4. Lösung: Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße, vgl. Satz 4.5.

Nun zur Existenz. Zunächst müssen wir μ – genauso wie in 25.2.c), siehe auch die Schritte 2° und 3° im Beweis von Satz 5.2, vgl. Lehrbuch S. 24 *f.* – vom Halbring $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$ zu einer Mengenfunktion $\overline{\mu}\colon \mathcal{S}_\cup \to [0,\infty]$ auf die Familie $\mathcal{S}_\cup$ endlicher (disjunkter) Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{S}$ fortsetzen (vgl. auch Übung 25.1 um $\mathcal{S}_\cup = \mathcal{S}_{\dot\cup}$ zu sehen). Diese Fortsetzung ist konstruktiv und, auch im Hinblick auf die oben gezeigte Eindeutigkeit, auch eindeutig.

Die Additivität von $\overline{\mu}$ ist klar, die Prämaß-Eigenschaft folgt so: Seien $S_i' \in \mathcal{S}_\cup$ und $S = \dot\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i' \in \mathcal{S}_\cup$. Wir müssen $\sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(S') = \overline{\mu}(S)$ zeigen. Nun gilt

$$
\begin{aligned}
S_i' &= \dot\bigcup_{k=1}^{n(i)} S_{i,k}, \quad S_{i,k} \in \mathcal{S} \qquad \text{(Def. von } \mathcal{S}_\cup) \\
S &= \dot\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \dot\bigcup_{k=1}^{n(i)} S_{i,k} \\
&= \dot\bigcup_{l=1}^{N} R_l, \quad R_l \in \mathcal{S}, \qquad \text{(Nach Vor. } S \in \mathcal{S}_\cup) \\
&= \dot\bigcup_{l=1}^{N} \dot\bigcup_{(i,k):S_{i,k}\subset R_l} S_{i,k}.
\end{aligned}
$$

Somit haben wir

$$
\begin{aligned}
\bar{\mu}(S) = \sum_{l=1}^{N} \mu(R_l) &= \sum_{l=1}^{N} \sum_{(i,k):S_{i,k}\subset R_l} \mu(S_{i,k}) \qquad (\mu \text{ ist Prämaß auf } \mathcal{S}) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n(i)} \mu(S_{i,k}) \qquad \text{(Umordnen, nur positive Glieder)} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(S_i).
\end{aligned}
$$

Also ist $\bar{\mu}$ ein Prämaß auf $\mathcal{S}_\cup$.

Nun können wir die Erweiterung konstruieren. Dazu folgen wir der Beweisskizze:

$$
\mathcal{B}^* := \{B \subset E \mid \forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{1}_B \wedge \mathbb{1}_{S_k} \in \mathcal{L}_\mathcal{V}\} \quad \text{und} \quad \widetilde{\mu}(B) := \sup_k I_{\overline{\mu}}(\mathbb{1}_B \wedge \mathbb{1}_{S_k}).
$$

Weil $\mathcal{L}_\mathcal{V}$ ein Vektorverband ist, der unter aufsteigenden Limiten stabil ist, sehen wir sofort, dass $\mathcal{B}^*$ eine σ-Algebra ist:

(Σ_1) Offensichtlich ist $\varnothing \in \mathcal{B}^*$.

(Σ_2) Wenn $B \in \mathcal{B}^*$, dann gilt $\mathbb{1}_B \wedge \mathbb{1}_{S_k} \in \mathcal{L}_\mathcal{V}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\mathbb{1}_{B^c} \wedge \mathbb{1}_{S_k} = \mathbb{1}_{S_k} - \mathbb{1}_B \wedge \mathbb{1}_{S_k} \in \mathcal{L}_\mathcal{V}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Hier verwenden wir $S_k \in \mathcal{S}$, $\mu(S_k) < \infty$ und $\mathbb{1}_{S_k} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{L}_\mathcal{V}$. Daher folgt $B^c \in \mathcal{B}^*$.

(Σ_3) Wenn $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}^*$, dann gilt $C_n := B_1 \cup \dots \cup B_n \uparrow B := \bigcup_{i=1}^\infty B_i$ und daher haben wir für festes $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{1}_{C_n} \wedge \mathbb{1}_{S_k} = \Big(\mathbb{1}_{B_1} + \dots + \mathbb{1}_{B_n}\Big) \wedge \mathbb{1}_{S_k} = \Big(\underbrace{\mathbb{1}_{B_1} \wedge \mathbb{1}_{S_k}}_{\in\mathcal{L}_\mathcal{V}} + \dots + \underbrace{\mathbb{1}_{B_n} \wedge \mathbb{1}_{S_k}}_{\in\mathcal{L}_\mathcal{V}}\Big) \wedge \mathbb{1}_{S_k} \in \mathcal{L}_\mathcal{V}.$$

Wegen $\sup_n I_\mu(\mathbb{1}_{C_n} \wedge \mathbb{1}_{S_k}) \leqslant I_\mu(\mathbb{1}_{S_k}) = \mu(S_k) < \infty$ und (25.3) folgt $\mathbb{1}_B \wedge \mathbb{1}_{S_k} \in \mathcal{L}_\mathcal{V}$ und $I(\mathbb{1}_B \wedge \mathbb{1}_{S_k}) = \sup_n I(\mathbb{1}_{C_n} \wedge \mathbb{1}_{S_k})$, also $B \in \mathcal{B}^*$.

Weil $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^*$ gilt auch $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}^*$ und es ist klar, dass $\widetilde{\mu}$ das Prämaß μ fortsetzt.

Für die Additivität von $\widetilde{\mu}$ beachten wir, dass das Supremum ein aufsteigender Limes (und damit linear) ist: $A, B \in \mathcal{B}^*$ disjunkt, dann gilt für beliebiges $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{1}_{A\cup B} \wedge \mathbb{1}_{S_k} = \mathbb{1}_A \wedge \mathbb{1}_{S_k} + \mathbb{1}_B \wedge \mathbb{1}_{S_k}$$

und daher

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(A \cup B) &= \lim_k I_{\overline{\mu}}(\mathbb{1}_A \wedge \mathbb{1}_{S_k} + \mathbb{1}_B \wedge \mathbb{1}_{S_k}) \\ &= \lim_k \left(I_{\overline{\mu}}(\mathbb{1}_A \wedge \mathbb{1}_{S_k}) + I_{\overline{\mu}}(\mathbb{1}_B \wedge \mathbb{1}_{S_k})\right) = \widetilde{\mu}(A) + \widetilde{\mu}(B).\end{aligned}$$

Für die Stetigkeit von unten verwenden wir, dass zwei beliebige Suprema stets vertauscht werden können: Es sei $A_l \uparrow A$. Dann ist

$$\sup_l \widetilde{\mu}(A_l) = \sup_l \sup_k I_{\overline{\mu}}(\mathbb{1}_{A_l} \wedge \mathbb{1}_{S_k}) = \sup_k \sup_l I_{\overline{\mu}}(\mathbb{1}_{A_l} \wedge \mathbb{1}_{S_k}) = \sup_k I_{\overline{\mu}}(\mathbb{1}_A \wedge \mathbb{1}_{S_k}) = \widetilde{\mu}(A).$$

In der vorletzten Gleichheit verwenden wir das Argument, das wir bereits in (Σ_3) verwendet hatten.

∎∎

Aufgabe 25.5. Lösung: Wir wissen aus Beispiel 25.3, dass $(\mathbb{R}^d, C_c(\mathbb{R}^d), I = \text{Riemann-Integral})$ ein Daniell-Raum ist. Offensichtlich sind die Voraussetzungen von Satz 25.10 erfüllt, wir können ganz einfach ein $\psi_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathbb{1}_{Q_n} \leqslant \psi_n \leqslant \mathbb{1}$ konstruieren, wobei $Q_n = [-n, n]^d$ ist.

Daher gilt nach Satz 25.10 für $\phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, dass (R) $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\,dx = \int \phi\,d\mu$ für ein eindeutig bestimmtes Maß μ gilt. Wir schreiben nun

$$Q = \bigtimes_{i=1}^d [a_i, b_i] \quad \text{und} \quad Q_\epsilon = \bigtimes_{i=1}^d [a_i - \epsilon, b_i + \epsilon]$$

und wir konstruieren ein $\psi_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathbb{1}_Q \leqslant \psi_\epsilon \leqslant \mathbb{1}_{Q_\epsilon}$, z.B. mit dem Urysohn-Trick aus Lemma 22.3. Dann gilt offensichtlich (verwende monotone Konvergenz):

$$\lim_{\epsilon\to 0} \psi_\epsilon = \mathbb{1}_Q \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon\to 0} \int \psi_\epsilon\,d\mu = \mu(Q).$$

Andererseits haben wir (wenn wir $|Q|$ für das Volumen eines Quaders schreiben) dass $\mathbb{1}_{Q_\epsilon}$ eine Riemannsche Oberfunktion und $\mathbb{1}_Q$ eine Unterfunktion für ψ_ϵ ist:

$$(\mathrm{R})\int_{\mathbb{R}^d}\psi_\epsilon(x)\,dx-|Q|\leqslant|Q_\epsilon|-|Q|=\prod_{i=1}^d(b_i-a_i+2\epsilon)-\prod_{i=1}^d(b_i-a_i)\leqslant c\epsilon^d\xrightarrow[\epsilon\to0]{}0,$$

d.h. $\mu(Q)=|Q|$, da $(R)\int_{-\mathbb{R}^d}\psi_\epsilon(x)\,dx=I(\psi_\epsilon)=\int\psi_\epsilon\,d\mu$ gilt. Mithin ist μ das Lebesgue-Maß.

Aufgabe 25.6. Lösung: Wenn $f\not\equiv0$, dann betrachte $f_n-f\geqslant0$, f_n-f stetig und $f_n-f\downarrow0$. Also o. E. $f\equiv0$ und $f_n\downarrow0$ punktweise. Wähle $\epsilon>0$ fest und definiere $K_n=\{f_n\geqslant\epsilon\}$. Weil K_n abgeschlossen ist (hier geht die Stetigkeit von f_n und f ein) und in der kompakten Menge K liegt, ist K_n selbst kompakt. Weil $f_n(x)\downarrow0$ für jedes $x\in K$ gilt, kann $x\in\bigcap_n K_n$ für kein $x\in K$ gelten, d.h. $\bigcap_n K_n=\varnothing$. Wegen der »finite intersection property« gilt dann $K_N=\bigcap_{n\leqslant N}K_n=\varnothing$ für ein festes N. Also ist $\{f_N\geqslant\epsilon\}=\varnothing$, d.h. $\sup_x f_N(x)<\epsilon$ für alle $N\gg1$ und alle $x\in K$. Das ist aber genau die gesuchte gleichmäßige Konvergenz.

---

26 Die Rieszschen Darstellungssätze

Aufgabe 26.1. Lösung:

(a) Es sei $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ mit $\|g\|_{L^q} \leqslant 1$. Aus der Hölder-Ungleichung, Satz 14.3, folgt

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}.$$

Folglich gilt

$$\|f\|_p \geqslant \sup\left\{\int f g \, d\mu \,:\, g \in \mathcal{L}^q(\mu),\ \|g\|_{L^q} \leqslant 1\right\}.$$

Um »$\leqslant$« zu sehen, definieren wir $g := \operatorname{sgn}(f) \cdot |f|^{p-1}$. Dann ist wegen $q = \frac{p}{p-1}$,

$$|g|^q = |f|^{(p-1)q} = |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

d.h. $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ und $\|g\|_q = \|f\|_{L^p}^{p/q}$. Für $\tilde{g} := g/\|g\|_{L^q} \in \mathcal{L}^q(\mu)$ gilt daher $\|\tilde{g}\|_{L^q} \leqslant 1$ und

$$\int f\tilde{g} \, d\mu = \frac{1}{\|g\|_{L^q}} \int |f|^p \, d\mu = \frac{1}{\|f\|_{L^p}^{p/q}} \|f\|_{L^p}^p = \|f\|_{L^p}^{(p(1-1/q)} = \|f\|_{L^p}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder benutzt haben, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Das zeigt »$\leqslant$«.

(b) Es sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}^q(\mu)$ eine dichte Teilmenge. Wegen $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}^q(\mu)$ gilt offensichtlich

$$\|f\|_p \geqslant \sup\left\{\int f g \, d\mu \,:\, g \in \mathcal{L}^q(\mu),\ \|g\|_{L^q} \leqslant 1\right\}.$$

Andererseits: Sei $\epsilon > 0$. Nach (a) existiert $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $\|g\|_{L^q} \leqslant 1$, so dass

$$\int f g \, d\mu \geqslant \|f\|_{L^p} - \epsilon.$$

Da $\mathcal{D}$ dicht ist, können wir $h \in \mathcal{D}$ wählen, so dass $\|g - h\|_{L^q} \leqslant \epsilon$. Aus der Hölder-Ungleichung erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\int f h \, d\mu &= \int f(h-g) \, d\mu + \int g \, d\mu \\
&\geqslant -\|f\|_{L^p}\|h-g\|_{L^q} + \int g \, d\mu \\
&\geqslant -\|f\|_{L^p}\epsilon + \int g \, d\mu \\
&\geqslant -\|f\|_{L^p}\epsilon + \|f\|_{L^p} - \epsilon \\
&= \|f\|_{L^p}(1-\epsilon) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

(c) Ist $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, so definiert $I_f(g) := \int |f| g \, d\mu$ ein positives lineares Funktional auf $\mathcal{L}^q(\mu)$. Aus Satz 26.4 existiert ein eindeutig bestimmtes $\tilde{f} \in \mathcal{L}^q(\mu)$ mit

$$I_f(g) = \int \tilde{f} g \, d\mu \quad \text{für alle } g \in \mathcal{L}^q(\mu).$$

Folglich ist $f = \tilde{f} \in \mathcal{L}^q(\mu)$.

Aufgabe 26.2. Lösung:

(a) Die Behauptung folgt aus einem typischen Diagonalfolgen-Argument (vgl. auch den Beweis von Satz 27.11). Es sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathcal{D}_q$. Aus der Hölder-Ungleichung, Satz 14.3, folgt

$$\left| \int u_n g_j \, d\mu \right| \leqslant \|u_n\|_{L^p} \|g_j\|_{L^q} \leqslant \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^p} \right) \|g_j\|_{L^q}$$

für alle $j, n \in \mathbb{N}$. Für $j = 1$ sehen wir, dass die Folge $(\int u_n g_1 \, d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano–Weiterstraß existiert daher eine Teilfolge $(u_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n^1 g_1 \, d\mu$$

existiert. Wir wählen nun iterativ Teilfolgen $(u_n^{j+1})_{n\in\mathbb{N}} \subset (u_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n^{j+1} g_{j+1} \, d\mu$$

existiert. Da wir die Teilfolgen immer weiter ausgedünnt haben, existiert

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n^j g_k \, d\mu$$

für alle $k \leqslant j$. Für die Diagonalfolge $v_n := u_n^n$ existiert daher $\lim_{n\to\infty} \int v_n g_j \, d\mu$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

(b) Es sei $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ und $(u_{n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ die Diagonalfolge aus (a). Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass $\left(\int u_{n(i)} g \, d\mu\right)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dazu sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{D}_q$ dicht in $\mathcal{L}^q(\mu)$, d.h. es existiert $h \in \mathcal{D}_q$ mit $\|g - h\|_{L^q} \leqslant \epsilon$. Aus Teil (a) wissen wir, dass wir $N \in \mathbb{N}$ wählen können, so dass

$$\left| \int u_{n(i)} h \, d\mu - \int u_{n(j)} \, d\mu \right| \leqslant \epsilon \quad \text{für alle } i, j \geqslant N. \tag{$\star$}$$

Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} \left| \int u_{n(i)} g \, d\mu - \int u_{n(j)} g \, d\mu \right| &= \left| \int (u_{n(i)} - u_{n(j)})(g - h) \, d\mu + \int (u_{n(i)} - u_{n(j)}) \, d\mu \right| \\ &\leqslant \left| \int (u_{n(i)} - u_{n(j)})(g - h) \, d\mu \right| + \underbrace{\left| \int (u_{n(i)} - u_{n(j)}) \, d\mu \right|}_{\overset{(\star)}{\leqslant} \epsilon} \\ &\leqslant \|u_{n(i)} - u_{n(j)}\|_{L^p} \|g - h\|_{L^q} + \epsilon \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant (\|u_{n(i)}\|_{L^p} + \|u_{n(j)}\|_{L^p})\|g-h\|_{L^q} + \epsilon \\
&\leqslant 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^p}\|g-h\|_{L^q} + \epsilon \\
&\leqslant \left(2\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^p} + 1\right)\epsilon
\end{aligned}
$$

für alle $i,j \geqslant N$. Dies beweist, dass $\left(\int u_{n(i)} g\,d\mu\right)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(c) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Grenzwerte

$$I(g) := \lim_{i\to\infty} u^+_{n(i)} g\,d\mu \qquad J(g) := \lim_{i\to\infty} \int u^-_{n(i)} g\,d\mu, \qquad g \in \mathcal{L}^q(\mu),$$

existieren. *Tatsächlich:* Mit (a),(b) können wir zunächst eine Teilfolge wählen, so dass $I(g)$ für alle $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ existiert. Von dieser Teilfolge wählen wir mit (a),(b) nochmals eine Teifolge, so dass $J(g)$ für alle $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ existiert. Da I und g positive lineare Funktionale auf $\mathcal{L}^q(\mu)$ definieren, existieren nach Satz 26.4 eindeutige Funktionen $v, w \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $v, w \geqslant 0$ so, dass

$$I(g) = \int vg\,d\mu \qquad J(g) = \int wg\,d\mu.$$

Folglich,

$$
\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \int u_{n(i)} g\,d\mu &= \lim_{i\to\infty} \int u^+_{n(i)} g\,d\mu - \lim_{i\to\infty} \int u^-_{n(i)} g\,d\mu \\
&= \int (v-w) g\,d\mu.
\end{aligned}
$$

Setzen wir $u := v - w \in \mathcal{L}^q(\mu)$, folgt die Behauptung.

Aufgabe 26.3. Lösung:

(a) Gemäß Aufgabe 26.4(a) ist $\hat{\mu}_k$ positiv semidefinit, d.h. für beliebige $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^n \hat{\mu}_k(\xi_i - \xi_j)\lambda_i \overline{\lambda}_j \geqslant 0.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \hat{\mu}_k = \phi$ erhält man somit

$$\sum_{i,j=1}^n \phi(\xi_i - \xi_j)\lambda_i \overline{\lambda}_j \geqslant 0.$$

Weiterhin ergibt sich aus $\hat{\mu}_k(-\xi) = \overline{\hat{\mu}_k(\xi)}$ auf analoge Weise, dass

$$\phi(-\xi) = \lim_{k\to\infty} \hat{\mu}_k(-\xi) = \lim_{k\to\infty} \overline{\hat{\mu}_k(\xi)} = \overline{\phi(\xi)} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Folglich ist ϕ positiv semidefinit. Für $n = 1$ bzw. $n = 2$ sieht man, dass die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} \phi(0) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \phi(0) & \phi(-\xi) \\ \phi(\xi) & \phi(0) \end{pmatrix}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ positiv hermitesch sind. Da die Determinanten positiv hermitescher Matrizen nicht-negativ sind, folgt daraus offenbar $\phi(0) \geqslant 0$ sowie

$$0 \leqslant \phi(0)^2 - \phi(\xi)\phi(-\xi) = \phi(0)^2 - \phi(\xi)\overline{\phi(\xi)} = \phi(0)^2 - |\phi(\xi)|^2.$$

(b) Wir zeigen zunächst, dass der Grenzwert existiert. Dazu sei $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 23.24 ist dann auch $\mathcal{F}^{-1}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und man erhält aus dem Satz von Plancherel, Satz 23.12,

$$\int u\,d\mu_n = \int \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}u)\,d\mu_n = \int \mathcal{F}^{-1}u(\xi)\hat{\mu}_n(\xi)\,d\xi.$$

Da $|\hat{\mu_n}(\xi)| \leqslant \hat{\mu}_n(0) \to \phi(0)$ gleichmäßig beschränkt ist, zeigt der Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\Lambda(u) := \lim_{n\to\infty} \int u\,d\mu_n = \int \mathcal{F}^{-1}u(\xi)\phi(\xi)\,d\xi$$

wohldefiniert ist. Die Linearität von Λ folgt direkt aus Linearität des Integrals. Weiterhin gilt für $u \geqslant 0$ offenbar

$$\Lambda u = \lim_{n\to\infty} \int u\,d\mu_n \geqslant 0.$$

(c) Die Stetigkeit von Λ sieht man so:

$$|\Lambda u| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int |u|\,d\mu_n \leqslant \|u\|_\infty \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\mu_n(\mathbb{R}^d)}_{(2\pi)^d\hat{\mu}_n(0)} = (2\pi)^d\phi(0)\|u\|_\infty.$$

Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $C_c(\mathbb{R}^d)$ ist (bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz), vgl. Lemma 24.9, können wir daher Λ zu einem positiven Funktional auf $C_c(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen: Für $u \in C_c(\mathbb{R}^d)$ sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, so dass $\|u_n - u\|_\infty \to 0$. Aus

$$|\Lambda(u_n) - \Lambda(u_m)| = |\Lambda(u_n - u_m)| \leqslant (2\pi)^d\phi(0)\|u_n - u_m\|_\infty$$

folgt, dass $(\Lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Daher existiert $\Lambda u := \lim_{n\to\infty} \Lambda u_n$. Offensichtlich ist das so definierte Funktional auf $C_c(\mathbb{R}^d)$ positiv und linear. Nach dem Satz von Riesz, Satz 26.8, existiert somit ein eindeutig bestimmtes reguläres Maß mit

$$\Lambda u = \int u\,d\mu \quad \text{für alle } u \in C_c(\mathbb{R}^d).$$

(d) Sei $\epsilon > 0$. Da ϕ stetig in $\xi = 0$ ist, existiert $\delta > 0$, so dass

$$|\phi(\xi) - \phi(0)| < \epsilon \qquad \text{für alle } |\xi| \leqslant \delta.$$

Weiterhin gilt nach Lévy's truncation inequality, Aufgabe 23.3,

$$\mu_n(\mathbb{R}^d \setminus [-R,R]^d) \leqslant 2(R\pi)^d \int_{[-1/R,1/R]^d} (\hat{\mu}_n(0) - \operatorname{Re}\hat{\mu}_n(\xi))\,d\xi$$

(beachte hierzu, dass $\check{\mu}_n(\xi) = (2\pi)^d\hat{\mu}_n(-\xi)$). Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}^d \setminus [-R,R]^d) &\leqslant 2(R\pi)^d \int_{[-1/R,1/R]^d} (\phi(0) - \operatorname{Re}\phi(\xi))\,d\xi \\ &\leqslant 2(2\pi)^d\epsilon\end{aligned}$$

für $R \geqslant \frac{1}{\delta}$. Insbesondere gilt also für $n \geqslant n_0(\epsilon)$, $\mu_n(\mathbb{R}^d \setminus [-R,R]^d) \leqslant 3(2\pi)^d\epsilon$. Um $\mu_n(\mathbb{R}^d \setminus [-R,R]^d) \leqslant 3(2\pi)^d\epsilon$ für $n \leqslant n_0$ zu erhalten, vergrößern wir R gegebenenfalls.

(e) Es sei $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \leqslant \chi_k \leqslant 1$ und $\chi_k \uparrow \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ (direkte Konstruktion oder mit Urysohn's Lemma, Lemma 26.6). Nach Teil (c) haben wir

$$\int \chi_k \, d\mu = \Lambda(\chi_k) \leqslant (2\pi)^d \phi(0).$$

Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz sieht man deshalb sofort, dass μ ein endliches Maß ist:

$$\mu(\mathbb{R}^d) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int \chi_k \, d\mu \leqslant (2\pi)^d \phi(0).$$

Weiterhin ist $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$ wegen $\mu_n(\mathbb{R}^d) = (2\pi)^d \hat{\mu}_n(0) \to \phi(0)$. Es bleibt zu zeigen, dass μ_n schwach gegen μ konvergiert. Dazu zeigen wir zunächst

$$\int u \, d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int u \, d\mu \quad \text{für alle } u \in C_c(\mathbb{R}^d). \tag{$\star$}$$

Es sei also $u \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $C_c(\mathbb{R}^d)$ ist, vgl. Lemma 24.9, existiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f_k - u\|_\infty \to 0$. Damit

$$\begin{aligned}
&\left|\int u \, d\mu_n - \int u \, d\mu\right| \\
&\leqslant \left|\int (u - f_k) \, d\mu_n\right| + \left|\int f_k \, d\mu_n - \int f_k \, d\mu\right| + \left|\int (f_k - u) \, d\mu\right| \\
&\leqslant \|u - f_k\|_\infty \mu_n(\mathbb{R}^d) + \left|\int f_k \, d\mu_n - \int f_k \, d\mu\right| + \epsilon\mu(\mathbb{R}^d) \\
&\leqslant \|u - f_k\|_\infty (M + \mu(\mathbb{R}^d)) + \left|\int f_k \, d\mu_n - \int f_k \, d\mu\right| \\
&\xrightarrow[(b)]{n\to\infty} \|u - f_k\|_\infty (M + \mu(\mathbb{R}^d)) \xrightarrow{k\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Nun sei $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ beliebig. Für $\epsilon > 0$ existiert gemäß Teil (d) ein $R > 0$, so dass für $K := [-R, R]^d$

$$\mu_n(\mathbb{R}^d \setminus K) \leqslant \epsilon.$$

Ohne Beschräkung der Allgemeinheit gelte auch $\mu(\mathbb{R}^d \setminus K) \leqslant \epsilon$. Wähle $\chi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, mit $\chi|_K = 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left|\int f \, d\mu_n - \int f \, d\mu\right| &\leqslant \left|\int f\chi \, d\mu_n - \int f\chi \, d\mu\right| + \left|\int (1-\chi) f \, d\mu_n + \int (1-\chi) f \, d\mu\right| \\
&\leqslant \left|\int f\chi \, d\mu_n - \int f\chi \, d\mu\right| + \|f\|_\infty \left(\int \mathbb{1}_{K^c} \, d\mu_n + \int \mathbb{1}_{K^c} \, d\mu\right) \\
&\leqslant \left|\int f\chi \, d\mu_n - \int f\chi \, d\mu\right| + 2\|f\|_\infty \epsilon.
\end{aligned}$$

Da $f \cdot \chi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ konvergiert der erste Term auf der rechten Seite für $n \to \infty$ gegen 0 (siehe (c)). Folglich

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int f \, d\mu_n - \int f \, d\mu\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

(f) Es sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge endlicher Maße. Setzt man $f(x) := e^{-ix\cdot\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, erhält man insbesondere

$$\hat{\mu}_n(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-ix\cdot\xi} \, d\mu_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-ix\cdot\xi} \, d\mu(x) = \hat{\mu}(\xi),$$

d.h. die Fouriertransformationen konvergieren punktweise. Aus Aufgabenteil (d) folgt, dass die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist. Für $\epsilon > 0$ existiert also $R > 0$, so dass $\mu_n(\mathbb{R}^d \setminus K) \leqslant \epsilon$ für $K := [-R, R]^d$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei R so groß, dass $\mu(\mathbb{R}^d \setminus K) \leqslant \epsilon$. Auf Grund der (gleichmäßigen) Stetigkeit der Funktion $\mathbb{R} \ni r \mapsto e^{ir}$ auf kompakten Mengen, existiert $\delta > 0$ mit

$$|e^{i\,(\xi-\eta)\cdot x} - 1| \leqslant \epsilon \quad \text{für alle } |\xi - \eta| < \delta,\ x \in K.$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ mit $|\xi - \eta| < \delta$ gilt folglich

$$\begin{aligned}
|\hat\mu_n(\xi) - \hat\mu_n(\eta)| &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d} \int |e^{i\,\xi\cdot x} - e^{i\,\eta\cdot x}|\,\mu_n(dx) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int |e^{i\,(\xi-\eta)x} - 1|\,\mu_n(dx) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_K \underbrace{|e^{i\,(\xi-\eta)x} - 1|}_{\leqslant\epsilon}\,\mu_n(dx) + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{K^c} \underbrace{|e^{i\,(\xi-\eta)x} - 1|}_{\leqslant 2}\,\mu_n(dx) \\
&\leqslant \frac{\mu_n(\mathbb{R}^d)}{(2\pi)^d}\epsilon + \frac{2}{(2\pi)^d}\mu_n(K^c) \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}(M+2)\epsilon
\end{aligned}$$

mit $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$. Dies zeigt die gleichgradige gleichmäßige Stetigkeit der Folge $(\hat\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(g) Es seien $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $\epsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ entsprechend der gleichgradigen gleichmäßigen Stetigkeit von $(\hat\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $\hat\mu$ stetig ist, kann δ so gewählt werden, dass

$$|\hat\mu(\xi) - \hat\mu(\eta)| \leqslant \epsilon \quad \text{für alle } |\xi - \eta| \leqslant \delta.$$

Damit folgt für alle $\eta \in \mathbb{R}^d$ mit $|\eta - \xi| \leqslant \delta$:

$$\begin{aligned}
|\hat\mu_n(\eta) - \hat\mu(\eta)| &\leqslant \underbrace{|\hat\mu_n(\eta) - \hat\mu_n(\xi)|}_{\leqslant\epsilon} + |\hat\mu_n(\xi) - \hat\mu(\xi)| + \underbrace{|\hat\mu(\xi) - \hat\mu(\eta)|}_{\leqslant\epsilon} \\
\Rightarrow \sup_{\eta\in B_\delta(\xi)} |\hat\mu_n(\eta) - \hat\mu(\eta)| &\leqslant 2\epsilon + |\hat\mu_n(\xi) - \hat\mu(\xi)| \xrightarrow{n\to\infty} 2\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Hier wurde benutzt, dass $\hat\mu$ punktweise gegen $\hat\mu$ konvergiert (vgl. Teil (f)). Die Rechnung zeigt, dass $\hat\mu_n$ lokal gleichmäßig gegen $\hat\mu$ konvergiert. Da bekanntermaßen lokal gleichmäßige Konvergenz äquivalent zu gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta ist, folgt die Behauptung.

■■

Aufgabe 26.4. Lösung:

(a) Da μ ein endliches Maß ist, folgt die Stetigkeit von $\hat\mu$ direkt aus dem Stetigkeitslemma, Satz 12.1 (vgl. Proposition 23.3). Die positive Definitheit sieht man so: Für beliebige $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{i,k=1}^n \phi(\xi_i - \xi_k)\lambda_i\overline{\lambda}_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{i,k=1}^n \lambda_i\overline{\lambda}_k \int e^{-i\,x(\xi_i-\xi_k)}\,d\mu(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda}_k \int e^{-ix\xi_i} \overline{e^{-ix\xi_k}}\, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-ix\xi_i} \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{-ix\xi_k} \right)} d\mu(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-ix\xi_i} \right|^2 d\mu(x) \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

(b) Für $n = 1$ und $\xi = 0$ folgt aus der Definition von positiver Definitheit, dass die Matrix $(\phi(0))$ positiv semidefinit ist. Es ist also notwendigerweise $\phi(0) \geqslant 0$. Wegen $\phi(0) = \overline{\phi(-0)}$ gilt zudem $\phi(0) \in \mathbb{R}$. Für $n = 2$, $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = 0$ sehen wir dagegen, dass die Matrix

$$
\begin{pmatrix} \phi(0) & \phi(-\xi) \\ \phi(\xi) & \phi(0) \end{pmatrix}
$$

positiv semidefinit ist; insbesondere muss also die Determinante nicht-negativ sein:

$$
0 \leqslant \phi(0)^2 - \phi(-\xi)\phi(\xi).
$$

Die gewünschte Ungleichung folgt nun aus der Tatsache, dass $\phi(-\xi) = \overline{\phi(\xi)}$.

(c) Wegen $|\phi(\xi)| \leqslant \phi(0)$ ist

$$
\begin{aligned}
\iint \phi(\xi - \eta) \left| \left(e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-2\epsilon|\xi|^2} \right) \overline{\left(e^{i\langle x,\eta\rangle} e^{-2\epsilon|\eta|^2} \right)} \right| d\xi\, d\eta &\leqslant |\phi(0)| \iint \left(e^{-2\epsilon|\xi|^2} e^{-2\epsilon|\eta|^2} \right) d\xi\, d\eta \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

d.h. ν_ϵ ist wohldefiniert. Als nächstes zeigen wir $\nu_\epsilon \geqslant 0$. Dazu überdecken wir $\mathbb{R}^d$ mit abzählbar vielen disjunkten Würfeln $(I_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ der Kantenlänge $1/k$ und wählen $\xi_n^k \in I_n^k$ beliebig. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz und der positiven Definitheit von ϕ folgt

$$
\begin{aligned}
\nu_\epsilon(x) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \int_{I_m^k} \int_{I_n^k} \phi(\xi_n^k - \xi_m^k) \left(e^{i\langle x,\xi_n^k\rangle} e^{-2\epsilon|\xi_n^k|^2} \right) \overline{\left(e^{i\langle x,\xi_m^k\rangle} e^{-2\epsilon|\xi_m^k|^2} \right)} d\xi\, d\eta \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \phi(\xi_n^k - \xi_m^k) \left(k^{-d} e^{i\langle x,\xi_n^k\rangle} e^{-2\epsilon|\xi_n^k|^2} \right) \overline{\left(k^{-d} e^{i\langle x,\xi_m^k\rangle} e^{-2\epsilon|\xi_m^k|^2} \right)} \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Unter Ausnutzung der Parallelogramm-Identität

$$
2|\xi|^2 + 2|\eta|^2 = |\xi - \eta|^2 + |\xi + \eta|^2
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\nu_\epsilon(x) &= \iint \left(e^{i\langle x,\xi\rangle} \overline{\left(e^{i\langle x,\eta\rangle} e^{-2\epsilon|\eta|^2 - 2\epsilon|\xi|^2} \right)} \right) d\xi\, d\eta \\
&= \iint \left(e^{i\langle x,\xi-\eta\rangle} e^{-|\xi-\eta|^2 - |\xi+\eta|^2} \right) d\xi\, d\eta.
\end{aligned}
$$

Die Substitution

$$
\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi - \eta \\ \xi + \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_d & -E_d \\ E_d & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}
$$

führt zu

$$\begin{aligned}\nu_\epsilon(x) &= \frac{1}{|\det A|}\iint \phi(t)e^{i\langle x,t\rangle}e^{-\epsilon(|t|^2+|s|^2)}\,dt\,ds\\ &= \frac{1}{c}\int \phi(t)e^{-\epsilon|t|^2}e^{i\,\langle x,t\rangle}\,dt\\ &= \frac{1}{c}\int \phi_\epsilon(t)e^{i\,\langle x,t\rangle}\,dt. \end{aligned}\tag{$\star$}$$

(d) Wir definieren

$$p_t(x) := \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right).$$

Aus Satz 23.12 (angewendet auf das endliche Maß $\mu(dx) := e^{-t|x|^2}\,dx$) folgt

$$\int \nu_\epsilon(x)e^{-\frac{t}{2}|x|^2}\,dx \overset{(\star)}{=} \frac{1}{c}\int \mathcal{F}^{-1}(\phi_\epsilon)(x)e^{-\frac{t}{2}|x|^2}\,dx = \frac{1}{c}\int \phi_\epsilon(\xi)\mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{t}{2}|\cdot|^2})(\xi)\,d\xi$$

für alle $t > 0$ (beachte: $\phi_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$!). Aus Beispiel 23.2c) wissen wir $\mathcal{F}(p_t)(x) = (2\pi)^{-d}\exp(-t|x|^2/2)$. Folglich ist $\mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{t}{2}|\cdot|^2})(\xi) = (2\pi)^d p_t(\xi)$. Da $|\phi(\xi)| \leqslant \phi(0)$ und $\int p_t(x)\,dx = 1$ erhalten wir somit

$$\int \nu_\epsilon(x)e^{-\frac{t}{2}|x|^2}\,dx = \frac{(2\pi)^d}{c}\int \phi_\epsilon(\xi)p_t(\xi)\,d\xi \leqslant \frac{(2\pi)^d}{c}\phi(0).$$

Aus Fatous Lemma, Satz 8.11, folgt schließlich

$$\begin{aligned}\int \nu_\epsilon(x)\,dx &= \int \lim_{k\to\infty}\nu_\epsilon(x)e^{-\frac{1}{2k}|x|^2}\,dx\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int \nu_\epsilon(x)e^{-\frac{1}{2k}|x|^2}\,dx\\ &\leqslant \frac{(2\pi)^d}{c}\phi(0).\end{aligned}$$

Wegen $\nu_\epsilon \geqslant 0$, siehe Teil (c), zeigt dies $\nu_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(e) Teilaufgabe (c) und (d) zeigen, dass für das endliche Maß $d\mu_\epsilon(x) := c\nu_\epsilon(x)\,dx$ gilt $\hat{\mu}_\epsilon = \phi_\epsilon$. Wegen $\phi_\epsilon \to \phi$ folgt aus Lévy's Stetigkeitssatz (Aufgabe 26.3), dass ein Maß μ existiert mit $\mu_\epsilon \to \mu$ schwach und $\hat{\mu} = \phi$.

■■

27 Konvergenz von Maßen

Aufgabe 27.1. Lösung:

(a) Zunächst sei $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 23.24 ist dann $\mathcal{F}^{-1}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und man erhält aus dem Satz von Plancherel, Satz 23.12,

$$\int u\,d\mu_n = \int \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}u)\,d\mu_n = \int \mathcal{F}^{-1}u(\xi)\hat{\mu}_n(\xi)\,d\xi.$$

Da $|\hat{\mu_n}(\xi)| \leqslant \hat{\mu}_n(0) \to \phi(0)$ gleichmäßig beschränkt ist, zeigt der Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\Lambda(u) := \lim_{n\to\infty} \int u\,d\mu_n = \int \mathcal{F}^{-1}u(\xi)\phi(\xi)\,d\xi$$

wohldefiniert ist. Weiterhin gilt

$$\mu_n(\mathbb{R}^d) = (2\pi)^d\hat{\mu}_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} (2\pi)^d\phi(0),$$

d.h. $M := \sup_n \mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$. Es sei nun $u \in C_c(E)$. Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $C_c(\mathbb{R}^d)$ ist (bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz, siehe Lemma 24.9), existiert eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\|u_k - u\|_\infty \to 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\int u\,d\mu_n - \int u\,d\mu_m\right| \\
&\qquad \leqslant \left|\int (u-u_k)\,d\mu_n\right| + \left|\int (u-u_k)\,d\mu_m\right| + \left|\int u_k\,d\mu_n - \int u_k\,d\mu_m\right| \\
&\qquad \leqslant \|u-u_k\|_\infty\big(\mu_n(\mathbb{R}^d) + \mu_m(\mathbb{R}^d)\big) + \left|\int u_k\,d\mu_n - \int u_k\,d\mu_m\right| \\
&\qquad \leqslant 2\|u-u_k\|_\infty M + \left|\int u_k\,d\mu_n - \int u_k\,d\mu_m\right| \\
&\qquad \xrightarrow{n,m\to\infty} 2\|u-u_k\|_\infty M \xrightarrow{k\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $(\int u\,d\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Folglich existiert $\Lambda(u) := \lim_{n\to\infty}\int u\,d\mu_n$. Da konvergente Folgen insbesondere beschränkt sind, erhalten wir

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int u\,d\mu_n\right| < \infty.$$

Wegen $u \in C_c(\mathbb{R}^d) \implies |u| \in C_c(\mathbb{R}^d)$ gilt also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |u|\,d\mu_n < \infty \quad \text{für alle } u \in C_c(\mathbb{R}^d),$$

d.h. die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist vag beschränkt. Nach Satz 27.11 besitzt $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daher eine vag konvergente Teilfolge $\mu_{n(i)} \to \mu$.

(b) Wir können Teil (a) auf jede beliebige Teilfolge von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden. Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht von der Teilfolge abhängt. Dazu seien $(\mu_{n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ und $(\mu_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gelte $\mu_{n(i)} \xrightarrow{\text{v}} \mu$, $\mu_{n(j)} \xrightarrow{\text{v}} \nu$. Nach Definition gilt dann für $u \in C_c(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{i\to\infty} \int u\,d\mu_{n(i)} = \int u\,d\mu,$$
$$\lim_{j\to\infty} \int u\,d\mu_{n(j)} = \int u\,d\nu.$$

Andererseits haben wir in (a) gezeigt, dass $\Lambda(u) = \lim_{n\to\infty} \int u\,d\mu_n$. Somit ist

$$\int u\,d\mu = \Lambda(u) = \int u\,d\nu.$$

Da dies für alle $u \in C_c(\mathbb{R}^d)$ gilt, folgt aus der Regularität der Maße μ und ν, dass $\mu = \nu$. Da der Grenzwert nicht von der Teilfolge abhängt, beweist das bereits die vage Konvergenz der Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Vergleiche das mit der folgenden Aussage: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt und der Grenzwert nicht von der Teilfolge abhängt.)

(c) Es genügt zu zeigen, dass die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist; die Behauptung folgt dann nämlich aus Satz 27.9.

Sei $\epsilon > 0$. Da ϕ stetig in $\xi = 0$ ist, existiert $\delta > 0$, so dass

$$|\phi(\xi) - \phi(0)| < \epsilon \qquad \text{für alle } |\xi| \leqslant \delta.$$

Weiterhin gilt nach Lévy's truncation inequality, Aufgabe 23.3,

$$\mu_n(\mathbb{R}^d \smallsetminus [-R,R]^d) \leqslant 2(R\pi)^d \int_{[-1/R,1/R]^d} (\hat\mu_n(0) - \operatorname{Re}\hat\mu_n(\xi))\,d\xi$$

(beachte hierzu, dass $\check\mu_n(\xi) = (2\pi)^d \hat\mu_n(-\xi)$). Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}^d \smallsetminus [-R,R]^d) &\leqslant 2(R\pi)^d \int_{[-1/R,1/R]^d} (\phi(0) - \operatorname{Re}\phi(\xi))\,d\xi \\ &\leqslant 2(2\pi)^d \epsilon\end{aligned}$$

für $R \geqslant \frac{1}{\delta}$. Insbesondere gilt also für $n \geqslant n_0(\epsilon)$, $\mu_n(\mathbb{R}^d \smallsetminus [-R,R]^d) \leqslant 3(2\pi)^d\epsilon$. Um $\mu_n(\mathbb{R}^d \smallsetminus [-R,R]^d) \leqslant 3(2\pi)^d\epsilon$ für $n \leqslant n_0$ zu erhalten, vergrößern wir R gegebenenfalls.

■■

Aufgabe 27.2. Lösung: Da

$$\int_B u\,d\mu_n = \int_{B\cap\operatorname{supp} u} u\,d\mu_n$$

können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass B in einer kompakten Menge enthalten ist. Es bezeichne $K := \overline{B}$ den Abschluss von B und $U := B^\circ$ das Innere von B. Weiterhin können wir annehmen, dass u nicht-negativ ist - anderenfalls betrachten wir $u^\pm$ getrennt.

Gemäß Lemma 26.6 existieren $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c(E)$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c(E)$, $0 \leqslant v_k \leqslant 1$, $0 \leqslant w_k \leqslant 1$, so dass $w_k \uparrow \mathbb{1}_U$ und $v_k \downarrow \mathbb{1}_K$. Nach Voraussetzung gilt $\mu_n \xrightarrow{\text{v}} \mu$ und somit

$$\int_B u\,d\mu_n \leqslant \int_K u\,d\mu_n \leqslant \int u \cdot v_k\,d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int u \cdot v_k\,d\mu.$$

Mit Beppo Levi folgt daher

$$\limsup_{n\to\infty} \int_B u\,d\mu_n \leqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} \int u \cdot v_k\,d\mu = \int_K u\,d\mu.$$

Ganz ähnlich sehen wir, dass aus

$$\int_B u\,d\mu_n \geqslant \int_U u\,d\mu_n \geqslant \int u \cdot w_k\,d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int u \cdot w_k\,d\mu.$$

und dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \int_B u\,d\mu_n \geqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} \int u \cdot w_k\,d\mu = \int_U u\,d\mu.$$

Wegen $\mu(K \setminus U) = \mu(\partial B) = 0$ erhalten wir schließlich

$$\limsup_{n\to\infty} \int_B u\,d\mu_n \leqslant \int_K u\,d\mu = \int_U u\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_B u\,d\mu_n.$$

■■

Aufgabe 27.3. Lösung: Wähle $\phi \in C_c(E)$ und $K := \operatorname{supp}\phi$. Weil die Folge $(f_{n_k})_k$ lokal gleichmäßig beschränkt ist, folgt mit dominierter Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \int \phi(x) f_{n_k}(x)\,\mu(dx) = \int \phi(x) f(x)\,\mu(dx).$$

Es folgt, dass $f_{n_k}\mu \xrightarrow[k\to\infty]{\text{v}} f\mu$. Andererseits gilt nach Voraussetzung $\mu_n = f_n\mu \xrightarrow[n\to\infty]{\text{v}} \nu$ und daher auch $\mu_{n_k} = f_{n_k}\mu \xrightarrow[k\to\infty]{\text{v}} \nu$. Weil vage Limiten eindeutig sind, folgt nun $f(x)\,\mu(dx) = \nu(dx)$.

■■

Bibliography

[1] Apostol, T.M.: A proof that Euler missed. Evaluating $\zeta(2)$ the easy way. *Math. Intelligencer* **5** (1983) 59–60.

[2] Neveu, J.: *Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie*. Oldenbourg, München 1969.

[3] Olver, F.W.J. *et al.*: *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, Cambridge 2010. (Freier Online-Zugang: `http://dlmf.nist.gov/`)

[4] Rudin, W.: *Analysis*. Oldenbourg, München 2009 (4. Auflage).

[5] Schilling, R.L.: *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge 2017 (2nd edn).

[6] Schilling, R.L. and Kühn, F.: *Counterexamples in Measure and Integration*. Cambridge University Press, Cambridge 2021.