

Vorwort

Die vorliegende Einführung in die Maß- und Integrationstheorie richtet sich an Studierende der Mathematik und Physik ab dem zweiten Studienjahr. Mein Ziel ist es, in kompakter und eingänglicher Form die wesentlichen Ergebnisse der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie darzustellen, die eine wichtige Grundlage für die höhere Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie und (mathematische) Physik ist. Der Text folgt meinen Vorlesungen an der TU Dresden, er kann als Begleittext für eine Vorlesung aber auch zum Selbststudium verwendet werden.

Die Maßtheorie ist kein Selbstzweck, sondern ein Hilfsmittel für weiterführende Vorlesungen. Daher verzichte ich auf einen allzu systematischen Aufbau, der oft den Charakter des »Lernens auf Vorrat« mit sich bringt, und konzentriere mich auf die zentralen Begriffe. Um schnell relevante Beispiele zu haben, wird das Lebesgue-Maß schon in den ersten Kapiteln eingeführt und untersucht, die Existenz und Eindeutigkeit in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^d$ wird dann schrittweise im Laufe der Vorlesung nachgewiesen. Bei der Auswahl des Stoffs habe ich mich von der Frage leiten lassen: »Was wird später im Studium und in den Anwendungen wirklich gebraucht?« Die Auswahl ist natürlich subjektiv, aber ich hoffe, eine vernünftige Balance zwischen einer knappen Einführung und einer gründlichen Darstellung gefunden zu haben.

Für das tiefere Verständnis ist es wichtig, dass der Leser sich mit der Materie selbstständig auseinandersetzt. Zum einen sind dafür die Übungsaufgaben gedacht (vollständige Lösungen gibt es unter www.motapa.de/mint), andererseits weise ich im laufenden Text mit dem Symbol  auf (bisweilen nicht ganz so offensichtliche) Lücken hin, die der Leser selbst ausfüllen sollte. Auf

-
- ▶ wichtige Schreibweisen,
 - ▶ Gegenbeispiele, typische Fallen und versteckte Schwierigkeiten
-



wird durch derart markierte Absätze aufmerksam gemacht.

Vom Umfang entsprechen die Kapitel 1–19 einer dreistündigen Vorlesung, etwa 4–5 Textseiten können in 90 min Vorlesung durchgenommen werden. Die mit dem ♦ gekennzeichneten Abschnitte sind als Ergänzung gedacht und können je nach Zeit und Zielsetzung ausgewählt werden. Sie sind auch als Themen für ein Proseminar geeignet. Eine Übersicht über die Abhängigkeit der einzelnen Kapitel findet sich auf Seite VII.

Ich danke dem Verlag deGruyter für die Möglichkeit, eine zweite Auflage dieses Buchs zu veröffentlichen. Der Aufbau orientiert sich im wesentlichen an der ersten Auflage, doch habe ich an vielen Stellen die Darstellung präzisiert, weitere Übungsaufgaben aufgenommen, einige Passagen hinzugefügt – die Vervollständigung von Maßen (in Kap. 10), absolutstetige Funktionen (in Kap. 20), den Satz von Kolmogorov (Kap. 18), die Daniell-Erweiterung (Kap. 25) – oder umgeschrieben, z. B. unendliche Produktmaße (Kap. 17) oder die Regularität von Maßen (Anhang A.5).

An diesem Manuskript haben direkt und indirekt viele Studenten, Kollegen und Freunde mitgewirkt. Mein Dank gilt vor allem Dr. Julian Hollender und Dr. Franziska Kühn für die erste Auflage. Den Text der zweiten Auflage haben Dr. Robert Baumgarth und Dr. David Berger durchgesehen. Die Zusammenarbeit mit den Lektoren des Verlags de Gruyter war sehr angenehm und hat wesentlich zur Entstehung dieses Buchs beigetragen. Meiner Frau danke ich für das große Verständnis, das sie immer wieder für meine Arbeit aufbringt.

Dresden, Sommer 2024

René L. Schilling

Mathematische Grundlagen

Voraussetzung für das Studium der Maß- und Integrationstheorie sind Kenntnisse in Analysis und linearer Algebra, wie sie üblicherweise im ersten Studienjahr des Mathematik- oder Physikstudiums vermittelt werden. Zur Orientierung gebe ich hier eine Auswahl von Standard-Lehrbüchern an.

Analysis

Forster, O.: *Analysis 1, 2.* Springer Spektrum, Wiesbaden ¹²2016, ¹¹2017.

Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Vieweg + Teubner, Wiesbaden ¹⁷2009.

Hildebrandt, S.: *Analysis 1, 2.* Springer, Berlin ²2006, 2003.

Königsberger, K.: *Analysis 1, 2.* Springer, Berlin ⁶2006, ⁵2006.

Rudin, W.: *Analysis.* De Gruyter Oldenbourg, Berlin ⁵2022.

Lineare Algebra

Beutelspacher, A.: *Lineare Algebra: Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen.* Springer Spektrum, Wiesbaden ⁸2014.

Fischer, G.: *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger.* Springer Spektrum, Wiesbaden ¹⁸2014.

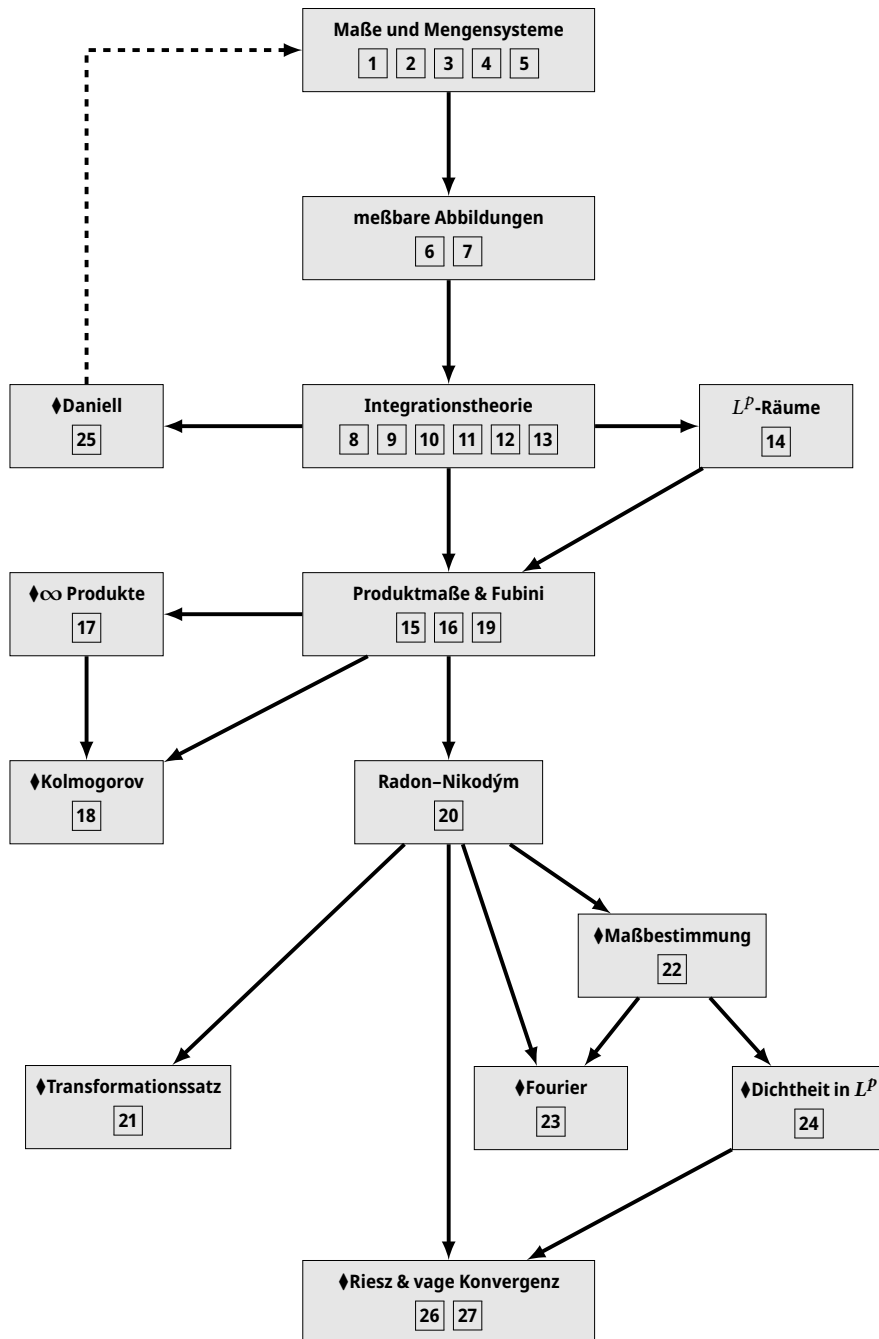
Jänich, K.: *Lineare Algebra.* Springer, Berlin ¹¹2008.

Knabner, P., Barth, W.: *Lineare Algebra: Grundlagen und Anwendungen.* Springer Spektrum, Berlin ²2018.

Kowalsky, H.-J., Michler, G. O.: *Lineare Algebra.* de Gruyter, Berlin ¹²2003.

Lorenz, F.: *Lineare Algebra 1, 2.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg ⁴2003, ³1996.

Abhängigkeit der einzelnen Kapitel



Bezeichnungen

Bezeichnungen, die nur lokal oder in einem Kapitel auftreten, sind nicht aufgeführt; alle Zahlenangaben beziehen sich auf Seitennummern. Binäre Operationen $f \pm g, f \cdot g, f \wedge g, f \vee g$, Vergleiche $f \leq g, f < g$ und Grenzwerte $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \lim_n f_n, \liminf_n f_n, \limsup_n f_n, \sup_n f_n$ oder $\inf_n f_n$ von Funktionen sind stets punktweise gemeint, d. h. für jedes x .

Allgemeines & Konventionen

positiv	stets im Sinne ≥ 0
negativ	stets im Sinne ≤ 0
$\mathbb{N}$	$1, 2, 3, \dots$
$\inf \emptyset$	$\inf \emptyset = +\infty$
$a \vee b$	Maximum von a und b
$a \wedge b$	Minimum von a und b
$ x $	Euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$, $ x ^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2$
$\langle x, y \rangle$	Skalarprodukt $\sum_{i=1}^d x_i y_i$
$GL(d, \mathbb{R})$	invertierbare Matrizen $\in \mathbb{R}^{d \times d}$
$O(d)$ ($SO(d)$)	(spezielle) orthogonale Matrizen $\in \mathbb{R}^{d \times d}$

Mengen

#	Kardinalität
$\subset$	Teilmenge (inkl. »=«)
$\cup$	Vereinigung paarweise disjunkter Mengen
A^c	Komplement der Menge A
$\overline{A}$	Abschluss der Menge A
$B_r(x)$	offene Kugel um x , Radius r
$A_n \uparrow A$	$A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ & $A = \bigcup_n A_n$
$B_n \downarrow B$	$B_n \supset B_{n+1} \supset \dots$ & $B = \bigcap_n B_n$
$\mathcal{A}$	generische σ -Algebra
$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$	$\{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ »Rechtecke«
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	Produkt- σ -Algebra, 91
$\mathcal{B}(E)$	Borelmengen in E , 6
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Borelmengen in $\mathbb{R}$, 37
$\mathcal{C}, \mathcal{C}(E)$	abgeschlossene Mengen
$\mathcal{I}, \mathcal{I}^0, \mathcal{I}_{\text{rat}}$	»Rechtecke« im $\mathbb{R}^d$, 6
$\mathcal{K}, \mathcal{K}(E)$	kompakte Mengen
$\mathcal{O}, \mathcal{O}(E)$	offene Mengen
$\mathcal{P}(E)$	Potenzmenge von E

Maße & Funktionen

μ, ν	generische Maße
δ_x	Dirac-Maß in x , 12
λ, λ^d	Lebesgue-Maß (in $\mathbb{R}^d$), 13

$\mu \otimes \nu$	Produkt von Maßen, 94, 105
$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
u^+	Positivteil: $u \vee 0$, 39
u^-	Negativteil: $-(u \wedge 0)$, 39
$\{u \in B\}$,	$\{x \mid u(x) \in B\}$,
$\{u \geq a\}$	$\{x \mid u(x) \geq a\}$ usw.
$\text{supp } u$	Träger $\overline{\{u \neq 0\}}$
$C(E)$	stetige Funktionen auf E
$C_b(E)$	beschränkte — —
$C_\infty(E)$	— — mit $\lim_{ x \rightarrow \infty} u(x) = 0$
$C_c(E)$	— — mit kompaktem Träger
$\mathcal{E}, \mathcal{E}(\mathcal{A})$	einfache Funktionen, 39
$\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^0(\mathcal{A})$	messbare Funktionen, 38
$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^0, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^0(\mathcal{A})$	— —, $\mathbb{R}$ -wertig, 38
$\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^1(\mu)$	integrierbare Funktionen, 52
$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$	— —, $\mathbb{R}$ -wertig, 52
$\mathcal{L}^p, \mathcal{L}^\infty$	80
L^p, L^∞	82
$\ u\ _{L^p}$	$(\int u ^p d\mu)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$
$\ u\ _{L^\infty}$	$\inf \{c > 0 \mid \mu\{ u \geq c\} = 0\}$
$\ u\ _\infty$	$\sup_x u(x) $

Definitionen

$(\Sigma_1) - (\Sigma_3)$	σ -Algebra, 4
$(\mathcal{O}_1) - (\mathcal{O}_3)$	Topologie, 6
$(M_0) - (M_2)$	Maß, 10
$(D_1) - (D_3)$	Dynkin-System, 16
$(S_1) - (S_3)$	Halbring, 22
$(OM_1) - (OM_3)$	äußeres Maß, 23

Abkürzungen

BL	Beppo Levi
f. ü.	fast überall
mb.	messbar
o. E.	ohne Einschränkung(en)
$\cap/\cup$ -stabil	Familie enthält endliche Schnitte/Vereinigungen
$\left[\frac{a}{b} \right]$	selbst rechnen!