

Stichwortverzeichnis

Alle Zahlenangaben beziehen sich auf Seitennummern, (Pr. $m.n$) verweist auf die Aufgabe n (im Kapitel m) auf der jeweils angegebenen Seite.

- absolutstetig (Funktion), 128
- absolutstetig (Maß), 123
- additiv, 2, 10
- äußeres Maß, 23, 188
- Algebra (von Mengen), 4, 214
- allgemeiner Transformationssatz, 135, 139
- Approximation der Identität, 121 (Pr. 19.7), 160
- Atom, 9, 36

- Banach–Tarski Paradox, 28
- Beppo Levi (Satz), 47
 - für Reihen, 49, 50 (Pr. 8.2)
- beschränkte Variation, 128
- Beta-Funktion, 144 (Pr. 21.2)
- Bildintegral, 116, 117
- Bildmaß, 33
- Boolesche Algebra, 4, 214
- Borel σ -Algebra
 - auf $\mathbb{R}$, 37
 - Spur, 8 (Pr. 2.4), 37
 - für Teilmenge, 8 (Pr. 2.4)
- Borel-Funktion, 37
- Borel-messbar, 6, 32, 37
- Borelmenge, 6
 - Approximation, 212

- Cantor-Menge, 2–3
- Cauchy–Schwarz Ungleichung, 81
- Cavalieri-Prinzip, 90, 100, 142
- Chebyshevsche Ungleichung, 63 (Pr. 10.4)

- δ -Funktion, 12
- Daniell
 - Darstellungssatz, 179
 - Fortsetzungssatz, 177
 - Raum, 174
 - stetig, 174
- Darstellungssatz
 - von Daniell, 179
 - von Riesz (C_c), 187
 - von Riesz (L^p), 183
- Dichte(funktion), 55, 123
- Dichtheit
 - $C_b \cap L^p$ dicht in L^p , 168
 - C_c dicht in L^p , 170
 - C_c^∞ dicht in C_c , 171
 - C_c^∞ dicht in L^p , 171
 - $C_{\text{Lip}} \cap L^p$ dicht in L^p , 172 (Pr. 24.4)
 - $\mathcal{A}$ dicht in C_∞ , 161
 - $\mathcal{A}$ dicht in L^p , 161
 - $\mathcal{E} \cap L^p$ dicht in L^p , 166
- Diffeomorphismus, 134
 - Kriterium, 135
- Differenzierbarkeitslemma, 70
- Dirac-Maß, 12
- Dirichletsches Integral, 103 (Pr. 16.8)
- diskretes W-Maß, 12
- dominierte Konvergenz (Satz), 66, 85
- Dynkin-System, 16, 20 (Pr. 4.4), 214
 - vs. σ -Algebra, 16, 17
 - Erzeuger, 16
 - minimales Dynkin-System, 16

- Eindeutigkeitssatz (Maße), 18
- Eindeutigkeitssatz (Produktmaße), 92
- einfache Funktion, 39
 - dicht in L^p , 166
 - Standarddarstellung, 39
- Erwartungswert, 54
- Erzeuger
 - Borel- σ -Algebra, 6, 7, 38
 - Dynkin-System, 16
 - Produkt- σ -Algebra, 91
 - σ -Algebra, 5
- Eulersches Integral, 144 (Pr. 21.2)
- Existenzsatz (Produktmaße), 92

- Faktorisierungslemma, 42
- Faltung, 118
 - Eigenschaften, 118–119
 - Friedrichsglättung, 121 (Pr. 19.7)
 - Halbstetigkeit, 122 (Pr. 19.8)
 - in $([0, \infty), \cdot)$, 121 (Pr. 19.5)
- Faltungssatz, 157
- fast überall (f. ü.), 58
- Fatous Lemma, 50 (Pr. 8.4, 8.5), 50, 56 (Pr. 9.6)
- Fortsetzungssatz (Maße), 22, 179
- Fortsetzungssatz (Produktmaße), 92

- Fouriertransformation, 151
 - Differenzierbarkeit, 165 (Pr. 23.4)
 - Fortsetzung auf L^2 , 162
 - Injektivität, 156
 - inverse Fouriertransformation, 157
 - Normalverteilung, 148, 151
 - positiv semidefinit, 165 (Pr. 23.4), 192
 - Rechenregeln, 153
 - rotationssymmetrische Funktion, 143
 - Satz von Bochner, 192
 - und schwache Konvergenz, 160, 191 (Pr. 26.3)
 - Schwartz-Raum, 164
 - Symmetrie, 158
 - trivialisiert Faltung, 157
 - Umkehrformel für Funktionen, 156
 - Umkehrformel von Lévy, 154, 155
 - Zusammenhang mit inverser FT, 157
- Fresnelsches Integral, 78 (Pr. 13.10)
- Friedrichsglättung, 121 (Pr. 19.7)
- Frullanisches Integral, 78 (Pr. 13.11)
- F_σ -Menge, 212
- Fubini (Satz), 97

- Gamma-Funktion, 72, 144 (Pr. 21.2)
- G_δ -Menge, 212

- Haar-Funktionen, 150 (Pr. 22.4)
- Halbring, 22, 91, 214
 - kartesisches Produkt, 91
- Halbstetigkeit, 122 (Pr. 19.7)
- Hauptwert, 74 (Pr. 12.5), 154
- Höldersche Ungleichung, 81, 88 (Pr. 14.3)
 - für $0 < p < 1$, 89 (Pr. 14.11)
 - für Reihen, 86

- Indikatorfunktion, 38
 - Messbarkeit, 38
- Integral
 - bzgl. Bildmaß, 116, 117
 - Eigenschaften, 53
 - einfache Funktion, 46
 - komplexe Funktion, 55 (Pr. 9.2), 205
 - messbare Funktion, 52
 - positive Funktion, 47
 - rotationssymmetrische Funktion, 142
 - bzgl. Zählmaß, 54
- Integralsinus, 79 (Pr. 13.12), 99, 154
- integrierbare Funktion, 52
 - p -fach integrierbar, 80
 - auf einer Menge, 55
 - ist f. ü. reell, 59
 - quasi-integrierbar, 56
 - Raum $\mathcal{L}^1$, 52
 - Raum $\mathcal{L}^p$, 80
 - Raum L^p , 82
- inverse Fouriertransformation, 157

- Jacobi-Determinante, 134
- Jacobi-Matrix, 134
- Jensensche Ungleichung, 87

- Kern/Übergangskern, 51 (Pr. 8.7)
- kompakte Familie, 30 (Pr. 5.7), 111
- Konvergenz
 - dem Maße nach, 69 (Pr. 11.14)
 - in Wahrscheinlichkeit, 69 (Pr. 11.14)
 - von Maßen, 160, 193, 195, 197
 - *– siehe auch* schwache Konv., vage Konv.,
- Konvergenz in L^p , 83
 - f. ü. konvergente Teilfolge, 84
 - schwach, 191 (Pr. 26.2)
- Konvergenzsatz
 - von Lebesgue, 66, 85
 - von Riesz, 85
 - von Young, 68 (Pr. 11.12)
- konvexe Funktion, 86
- Kugelkoordinaten, 140–142

- $\mathcal{L}^1$ -Raum, 52
 - vollständiges Maß, 57 (Pr. 9.8), 61, 179
- $\mathcal{L}^p/L^p$ -Raum, 80, 82
 - Dreiecksungleichung, 81
 - ist vollständig, 83
- Lebesgue–Stieltjes Maß, 15 (Pr. 3.5), 29 (Pr. 5.1)
- Lebesgue-Maß, 13
 - bewegungsinvariant, 13, 35
 - Dilatationen, 21 (Pr. 4.9)
 - Existenz (auf $\mathbb{R}^d$), 94, 190
 - Existenz (auf $\mathbb{R}$), 28, 109 (Pr. 17.1)
 - lineare Transformation, 35
 - Nullmenge, 20 (Pr. 4.1), 30 (Pr. 5.3), 77
 - orthogonale Transformation, 34
 - ist regulär, 212
 - translationsinvariant, 13, 19
- Lebesgue-Menge, 28
- Lebesgue-Prämaß, 28
- Lebesgue-Zerlegung, 127
- Lebesguescher Konvergenzsatz, 66, 85

Lemma

- von Fatou, 50 (Pr. 8.4,8.5), 50, 56 (Pr. 9.6)
- von Pratt, 68 (Pr. 11.12)
- von Riemann–Lebesgue, 158
- von Urysohn, 147, 169, 186
- liminf/limsup von Mengen, 9 (Pr. 2.9), 50 (Pr. 8.5)
- lokal-kompakt, 169, 185

Markovsche Ungleichung, 59, 63 (Pr. 10.4)

Maß, 10

- absolutstetig, 123
- additiv, 10
- äußeres Maß, 23
- mit Dichte, 55
- Eindeutigkeit, 18
- endlich, 10
- Fortsetzung, 22, 179
- Lebesgue-Zerlegung, 127
- monoton, 10
- Produkt, 94
- projektiver limes, 114
- regulär, 15 (Pr. 3.8), 30, 168, 186, 206
- σ -endlich, 10, 51 (Pr. 8.8), 132 (Pr. 20.1)
- σ -subadditiv, 11
- signiertes, 132 (Pr. 20.5)
- singulär, 127, 132 (Pr. 20.4)
- Spur, 115 (Pr. 18.3)
- stetig, 11, 14
- subadditiv, 11
- unendliches Produkt, 107
- vollständig, 60
- – *siehe auch* Vervollständigung,
- W-Maß, 10, 107, 114
- maßbestimmende Familie, 146
- Maßraum, 10, 94
- endlich, 10
- σ -endlich, 10
- vollständig, 60
- – *siehe auch* Vervollständigung,
- W-Raum, 10
- messbar
- Borel-messbar, 32
- Lebesgue-messbar, 28, 202
- bzgl. eines Maßes, 23
- Menge, 4
- nicht-messbare Menge, 202
- Stetigkeitsstellen einer Funktion, 205
- messbare Abbildung/Funktion, 31, 37
- Eigenschaften, 41

- halbseitig stetig $\Rightarrow$ messbar, 44 (Pr. 7.10)

- Komposition, 32
- Messbarkeitskriterium, 31, 37
- stetig $\Rightarrow$ messbar, 32
- Messraum, 10, 91
- Minkowskische Ungleichung, 81
- für $0 < p < 1$, 89 (Pr. 14.11)
- für Doppelintegrale, 104 (Pr. 16.10)
- für Reihen, 86
- monotone Klasse, 17, 21 (Pr. 4.5), 214
- monotone Klasse (Funktionen), 43
- monotone Konvergenz (Satz), 65

Negativteil (Funktion), 39

Negativteil (Maß), 133 (Pr. 20.5)

Normalverteilung, 148, 151

Nullmenge, 15 (Pr. 3.7), 30 (Pr. 5.3), 58, 82, 123

offene Menge, 6

p -fach integrierbare Funktion, 80

Parameterintegral

- Differenzierbarkeit, 70

- Stetigkeit, 70

partie finie, 74 (Pr. 12.5)

partielle Integration, 98

Partition der Eins, 186

Plancherel (Satz), 162

Polarkoordinaten, 140–142

polnischer Raum, 209

Portmanteau-Theorem, 194, 196

positives lineares Funktional, 174, 182

- Daniell-stetig, 174

- in C_c , 187

- in L^p , $1 \leq p < \infty$, 183

- ist stetig, 182

Positivteil (Funktion), 39

Positivteil (Maß), 133 (Pr. 20.5)

Produkt- σ -Algebra, 91, 102, 105

- Erzeuger, 91, 106, 110

Produktmaß, 94

- Eindeutigkeit, 92, 107

- Existenz, 92, 107

- unendliches, 107

Produktmaßraum, 94, 107

Produktmessraum, 91, 105, 110

projektive Familie, 110

projektiver Limes, 114, 115

Prämaß, 10, 14, 30 (Pr. 5.6,5.7), 113

- Fortsetzung, 22
- Kriterium für, 14, 113
- Lebesguesches, 28

quasi-integrierbare Funktion, 56

Radon–Nikodým (Satz), 123, 125, 126

Radon–Nikodým Ableitung, 123

Rechtecke (in $\mathbb{R}^d$), 6, 22

- sind Halbring, 22, 91

Regularität von Maßen, 15 (Pr. 3.8), 30, 168, 186, 206

Reihenvergleichskriterium, 56 (Pr. 9.3)

relativ kompakt, 169, 185

Riemann–Lebesgue Lemma, 158

Riemann-integrierbar, 75

- Kriterium, 77
- uneigentlich, 78 (Pr. 13.9)

Rieszscher Darstellungssatz

- für C_c , 187
- für L^p , $1 \leq p < \infty$, 183

Ring (von Mengen), 214

rotationssymmetrische Funktion

- Fouriertransformation, 143
- Integral, 142

Satz

- vom projektiven limes, 114, 115
- von Beppo Levi, 47
- von Beppo Levi (Reihen), 49, 50 (Pr. 8.2)
- von Bochner, 192
- von Carathéodory, 22, 179
- von Daniell, 177, 179
- von der dominierten Konvergenz, 66, 69 (Pr. 11.14), 85
- von der Lebesgue-Zerlegung, 127
- von der monotonen Konvergenz, 65
- von Dini, 181 (Pr. 25.5)
- von Egorov, 57 (Pr. 9.7)
- von Fubini, 97
- von Kolmogorov, 107, 114, 115
- von Lusin, 173 (Pr. 24.6)
- von Plancherel, 162
- von Radon–Nikodým, 123, 125, 126
- von Riesz–Fischer, 83
- von Steinhaus, 122 (Pr. 19.7)
- von Tonelli, 96
- über monotone Klassen, 21 (Pr. 4.5), 43

schwache Konvergenz (Maße), 160, 193

- vs. vage Konvergenz, 197
- Kriterien, 194

Schwartz-Raum, 163

Separabilität von C_c , 212

- von $\mathcal{L}^p$, 172 (Pr. 24.5)

σ -additiv, 10

σ -Algebra, 4, 214

- Approximation, 21 (Pr. 4.6), 212
- Borelsche, 6
- Erzeuger, 5
- erzeugt von Abbildung, 33
- erzeugt von einem (äußeren) Maß, 23
- minimale σ -Algebra, 5
- Produkt, 91
- Spur, 5, 8 (Pr. 2.4)
- topologische, 6
- unendliches Produkt, 105
- Urbild, 5

σ -endlich, 10

σ -kompakt, 170, 206

σ -subadditiv, 11

signiertes Maß, 132 (Pr. 20.5)

singulär, 127

Sombrero-Lemma, 40

Spur σ -Algebra, 5, 8 (Pr. 2.4), 37

Spur-Maß, 115 (Pr. 18.3)

Standarddarstellung, 39

Stetigkeit

- impliziert Borel-messbar, 32

Stetigkeit (Maß), 11, 14

Stetigkeitslemma, 70

Stetigkeitssatz von Lévy, 191 (Pr. 26.3)

Straffheit, 197, 209

Tonelli (Satz), 96

Topologie, 6

Transformationssatz für Integrale, 116, 117

- für affin-lineare Transformationen, 134
- für Diffeomorphismen, 135, 139
- truncation inequality*, 164 (Pr. 23.3)

Ungleichung

- Cauchy–Schwarz, 81
- Chebyshev, 63 (Pr. 10.4)
- L^p -Dreiecksungleichung, 81
- Hölder, 81, 88 (Pr. 14.3)
- Hölder ($0 < p < 1$), 89 (Pr. 14.11)
- Hölder (Reihen), 86

- Jensen, 87
- Markov, 59
- Minkowski, 81
- Minkowski ($0 < p < 1$), 89 (Pr. 14.11)
- Minkowski (Doppelintegrale), 104 (Pr. 16.10)
- Minkowski (Reihen), 86
- Young, 80
- Young (Faltung), 119, 121 (Pr. 19.6)
- Urysohnsches Lemma, 147, 169, 186

vage Konvergenz (Maße), 195

- vs. schwache Konvergenz, 197
- Kriterien, 196
- vage Beschränktheit, 199
- vage Kompaktheit, 200

Vektorverband, 174

Verteilung, 34, 116

Verteilungsfunktion, 29 (Pr. 5.1), 100, 154

Vervollständigung, 59–62, 202

- in Aufgaben, 15 (Pr. 3.7), 30 (Pr. 5.4), 44 (Pr. 7.13), 57 (Pr. 9.8), 63 (Pr. 10.5), 94 (Pr. 15.2, 15.3)

Vollständigkeit von L^p , 83

Volumen

- Einheitskugel, 143
- Einheitssphäre, 143
- Spat, 35, 203

Wiener-Algebra, 159

Youngsche Ungleichung, 80

- für Faltung, 119, 121 (Pr. 19.6)

Zufallsvariable, 34, 54, 116, 117

Zylinder-Rechteck, 105

Zylindermenge, 105, 110

Zählmaß, 12