

Stichwortverzeichnis

Alle Zahlenangaben beziehen sich auf Seitennummern, (Pr. $m.n$) verweist auf die Aufgabe n (im Kapitel m) auf der jeweils angegebenen Seite. Wir verwenden die Abkürzungen „CLT“ – zentraler Grenzwertsatz, „ggi“ – gleichgradig integrierbar, „MG“ – Martingal, „sMG“ – Sub- oder Supermartingal und „SLLN“ starkes Gesetz der großen Zahlen.

abgeschlossenes Martingal, 52, 57, 62
absolutstetig, 82
accessible points, 134
adaptiert, 17, 109
Arkussinusgesetz, 125, 126
aufsteigende Überquerung, 44
Austrittszeit, 112
Azuma–Hoeffding Ungleichung, 91

Balayageprinzip, 168 (Pr. 14.9)
ballot theorem, 122
– Martingalversion, 123
bedingte Erwartung, 7
– abstrakt vs. klassisch, 8, 15 (Pr. 2.5)
– Beppo Levi, 12
– dominierte Konvergenz, 12
– Eigenschaften, 10
– Eindeutigkeit, 8
– Existenz, 9
– Fatous Lemma, 12
– Höldersche Ungleichung, 16 (Pr. 2.18)
– Jensensche Ungleichung, 12
– klassisch, 7
– Konvergenzsätze, 12
– Markovsche Ungleichung, 16 (Pr. 2.17)
– orthogonale Projektion, 9
– pull out, 10
– stetig in L^1 , 9
– symmetrischer Operator, 16 (Pr. 2.8)
– testen am Erzeuger, 7–8
– tower property, 10
– Unabhängigkeit, 13
bedingte Varianz, 16 (Pr. 2.12)
bedingte Wahrscheinlichkeit, 14
– abstrakt vs. klassisch, 15
– klassisch, 13
Borel–Cantelli Lemma, 72
– Verallg. von Dubins & Freedman, 72
– Verallg. von Lévy, 71
Brownsche Bewegung, 172
Burkholder–Davis–Gundy Ungleichungen, 93

Burkholder-Ungleichung, 103, 104
CLT, *siehe* Zentraler Grenzwertsatz
coupling, *siehe* Kopplung
Davis-Ungleichung, 106
Davis-Zerlegung, 105
Dirichlet-Problem (diskret)
– homogen, 155, 157
– inhomogen, 159
diskreter Prozess, 109
Doob-Zerlegung, 24
Doobs L^p -Maximalungleichung, 89, 90
Dynkin-Formel, 168 (Pr. 14.9)

echt d -dimensional, 143
einfache Irrfahrt, 110, *siehe auch* Irrfahrt
– Arkussinusgesetz, 125, 126
– lazy random walk, 120, 168 (Pr. 14.17)
– Momente von T_1 , 115
– Reflektionsprinzip, 121
– rekurrent für $d = 1, 2, 118$
– Rekurrenz, 116
– symmetrisch, 110
– transient für $d \geq 3$, 118
– Übergangsoperator, 151
– Verteilung der Rückkehrzeit nach 0, 129
– Verteilung des Maximums, 128
– Verteilung von T_1 , 114
– Verteilung von T_x , 128
– Verteilung von $T_{(a,b)}$, 113
Eintrittszeit, 42 (Pr. 4.2), 112
erfolgreiche Kopplung, 161

fairer Spiel, 2–4
– kann unvorteilhaft sein, 5
Faktorisierungslemma, 183
Feller-Bedingung, 78
Filtration, 17
gambler’s ruin, 113–116
gestoppter Prozess, 31
ggi, *siehe* gleichgradig integrierbar

- gleichgradig integrierbar (ggi), 57
 - Kriterium von de la Vallée-Poussin, 59
 - Martingal, 62, 63
- harmonische Funktion, 151
 - beschränkt \Rightarrow const., 152
- Hewitt-Savage 0-1-Gesetz, 70
- Invarianzprinzip, 173, 177
- Irrfahrt, 110, *siehe auch* einfache Irrfahrt
 - assoziierte Martingale, 153
 - beliebiger Startwert, 147
 - echt d -dimensional, 143
 - erfolgreiche Kopplung, 161
 - Grenzverhalten ($d = 1$), 131
 - Kopplung, 161
 - Kopplungsungleichung, 163
 - Kopplungszeit, 161
 - Kriterium von Chung–Fuchs, 139
 - rekurrent für $d = 1, 2, 137$
 - Rekurrenzkriterium, 117, 141, 142
 - Satz von Chung–Fuchs, 131, 138
 - starke Markov-Eigenschaft, 132, 149
 - stop'n'go Prinzip, 150
 - symmetrisch, 141
 - Symmetrisierung, 143
 - transient wenn echt $d \geq 3$ -dim., 144
- Khintchine Ungleichungen, 95
- Kolmogorovsche Ungleichung, 88
- Kolmogorovsches 0-1-Gesetz, 68
- Kompensator, 25
 - vs. quadratische Variation, 97
- Konvergenz
 - fast sicher (f.s.), 179
 - in L^p , 179
 - in Verteilung (d), 73, 181
 - in Wahrscheinlichkeit (IP), 59, 179
 - Reihe von iid ZV, 53, 73, 77
- Konvergenzmenge, 48, 49 (Pr. 5.4), 49, 55, 56 (Pr. 6.6), 71, 75
- Konvergenzsatz für MG, 85 (Pr. 8.2)
 - beliebige Indexmenge, 81
 - f.s., 45
 - ggi, 62
 - L^2 , 52
 - Lévy backward, 68
 - Lévy forward, 67
 - Rückwärts-(s)MG, 47, 65
- Konvergenzsatz von Vitali, 60
- Kopplung, 161, 163
 - durch Reflektion, 162
 - Marsch-Kopplung, 162
 - Mineka-Kopplung, 163
 - Ornstein-Kopplung, 162
 - unabhängige Kopplung, 162
- Kopplungsungleichung, 163
 - und totale Variation, 168 (Pr. 14.17)
- Kopplungszeit, 161
- Krickeberg-Zerlegung, 100
- Kroneckers Lemma, 54
- L^2 -beschränkt, 51
- L^p -beschränkt, 58, 89, 93
- L^2 -Martingal, 25, 51
- Lévy'sches 0-1-Gesetz, 67
- Laplace-Operator (diskret), 151
- lazy random walk, 120, 168 (Pr. 14.17)
- Likelihood ratio, 21
- Lindeberg-Bedingung, 78
- lokales Martingal, 37
 - \Leftrightarrow verallgemeinertes Martingal, 40
 - Charakterisierung, 38
 - Darstellungssatz, 40
 - Eigenschaften, 39
 - muss kein Martingal sein, 37
 - positiv \Rightarrow Super-MG, 40
- lokalisierende Folge, 37
- Marcinkiewicz–Zygmund Ungleichungen, 97
- Markov-Eigenschaft, 132, 149
- Marsch-Kopplung, 162
- Martingal, 17, *siehe auch* Submartingal
 - abgeschlossen, 52, 57, 62
 - Beispiele, 18–22
 - beliebige Indexmenge, 81–82
 - Charakterisierung, 35
 - CLT, 78
 - Davis-Zerlegung, 105
 - divergiert oszillierend, 49
 - Eigenschaften, 22–23
 - f.s. Konvergenz, 45–47, 49, 55, 67, 85 (Pr. 8.2)
 - faires Spiel, 1, 4
 - ggi, 62, 63
 - Kompensator, 25
 - Konvergenzmenge, 49 (Pr. 5.4), 49, 55, 71, 75
 - L^1 -Konvergenz, 62, 67, 85 (Pr. 8.2)
 - L^2 -Konvergenz, 52

- L^2 -Martingal, 25, 51
- L^2 -beschränkt, 51
- L^p -beschränkt, 89, 93
- Lévy'sches Martingal, 19, 52
- Likelihood ratio, 21
- lokales Martingal, 37
- optional sampling, 32
- optional stopping, 35, 63
- Pólya-Urne, 19
- Produktmartingal, 19
- quadrat-integrierbar, 25, 51
- quadratische Variation, 56 (Pr. 6.1), 93
- Rückwärtsmartingal, 47
- SLLN (L^2), 55
- Summenmartingal, 19
- Thackeray, 4
- U -Statistik, 86 (Pr. 8.7)
- verallgemeinertes MG, 40
- Verzweigungsprozess, 21
- Waldsches Martingal, 20
- Martingaltransformation, 26
- Charakterisierung, 29
- Eigenschaften, 26–27
- Iteration, 30 (Pr. 3.7)
- Maximalungleichung für (s)MG, 89, 90
- Maximumprinzip, 168 (Pr. 14.9)
- Mineka-Kopplung, 163

- natürliche Filtration, 18
- Null-Eins-Gesetz
- von Hewitt & Savage, 70
- von Kolmogorov, 68
- von Lévy, 67

- occupation measure, 134
- optional sampling, 31
- optional stopping, 35, 63
- Ornstein-Kopplung, 162
- orthogonal (Maße), 86 (Pr. 8.6), 86 (Pr. 8.7)
- orthogonal (ZV), 52, 108, 185
- orthogonale Projektion, 185

- Pólya-Urne, 19
- permutierbare ZV, 69
- Potentialoperator, 167 (Pr. 14.9)
- Projektionssatz, 185
- Prozess, 31, 109
- diskreter Prozess, 109
- in diskreter Zeit, 109

- in stetiger Zeit, 109
- pull out, 10

- quadrat-integrierbar, 25, 51
- quadratische Variation, 56 (Pr. 6.1), 93, 97
- Kovariation, 107
- vs. Kompensator, 97

- Rademacher Ungleichungen, 95
- Radon–Nikodým (Satz), 82
- Radon–Nikodým Ableitung, 82
- random walk, *siehe* Irrfahrt
- recurrence set, 134
- Reflektionskopplung, 162
- Reflektionsprinzip, 121
- Rekurrenz, 116, 134
- Rekurrenz–Transienz Dichotomie, 86 (Pr. 8.9), 131, 134
- Rekurrenzkriterium, 117, 141, 142
- Riesz-Zerlegung, 168 (Pr. 14.9)
- Rückwärts(sub)martingal, 47
- f.s. Konvergenz, 47, 65, 68
- ist ggi, 65–66
- L^1 -Konvergenz, 65, 68
- Ruinproblem, 113–116

- Satz
- von Arzelà–Ascoli, 176
- von Borel–Cantelli (Lemma), 72
- von Borel–Cantelli–Lévy (Lemma), 71, 72
- von Chung–Fuchs, 131, 138, 139
- von de la Vallée-Poussin, 59, 66 (Pr. 7.3)
- von Donsker, 177
- von Kakutani, 86 (Pr. 8.7)
- von Kronecker (Lemma), 54
- von Liouville, 152
- von Pólya, 118
- von Plancherel, 139
- von Prohorov, 176
- von Radon–Nikodým, 82
- von Slutsky, 182
- von Vitali, 60
- Arkussinusgesetz, 125, 126
- ballot theorem, 122
- CLT für Martingale, 78
- Davis-Zerlegung, 105
- Doob Zerlegung, 24
- Drei-Reihen Satz für MG, 76, 77
- Faktorisierungslemma, 183

- Faltungssatz, 139
- Krickeberg-Zerlegung, 100
- L^p -Maximalungleichung, 90
- Lévy's Konvergenzsatz für Reihen, 73
- Maximumprinzip, 152
- MG-Konvergenzsatz (L^2), 52
- MG-Konvergenzsatz (f.s.), 45–47
- MG-Konvergenzsatz (ggi), 62
- MG-Konvergenzsatz von Lévy, 67, 68
- optional sampling, 31
- optional stopping, 35, 63
- Projektionssatz, 185
- Rückwärtskonvergenzsatz (L^1), 65
- Rückwärtskonvergenzsatz (f.s.), 47, 65
- Reflektionsprinzip, 121
- SLLN (L^1), 69
- SLLN (L^2), 56 (Pr. 6.4), 56
- SLLN (L^2) für MG, 55
- SLLN
 - für L^2 -Martingale, 55
 - für iid ZV in L^1 , 69
 - für iid ZV in L^2 , 56
- Spitzer-Test, 142
- starke Markov-Eigenschaft, 132, 149
- stochastischer Prozess, *siehe* Prozess
- stop'n'go Prinzip, 150
- Stoppzeit, 31
 - assoziierte σ -Algebra, 34
 - erste Eintrittszeit, 42 (Pr. 4.2)
 - erste Trefferzeit, 42 (Pr. 4.2)
- Straffheit, 176
- sub-/superharmonische Funktion, 151
- Submartingal, 17, *siehe auch* Martingal
 - Charakterisierung, 35
 - Doob-Zerlegung, 24
 - f.s. Konvergenz, 45–47
 - Konvergenzmenge, 48, 56 (Pr. 6.6)
 - Krickeberg-Zerlegung, 100
 - L^1 -Konvergenz, 62
 - Maximalungleichung, 87, 88
 - optional sampling, 31
 - optional stopping, 35, 63
 - quadratische Variation, 93
 - Rückwärts-Submartingal, 47
- Supermartingal, 17, *siehe* (Sub)Martingal
- symmetrische Funktion, 69
- symmetrische Irrfahrt, 141
- tower property, 10
- Transienz, 116, 134, *siehe auch* Rekurrenz
- Trefferzeit, 42 (Pr. 4.2)
- U -Statistik, 86 (Pr. 8.7)
- Übergangoperator, 151
- Ungleichung
 - Azuma–Hoeffding, 91
 - Burkholder, 103, 104
 - Burkholder–Davis–Gundy, 93
 - Davis, 106
 - Doobsche L^p -Maximalungleichung, 89, 90
 - Hölder, 16 (Pr. 2.18)
 - Jensen, 12
 - Khintchine, 95
 - Kolmogorov, 88
 - Marcinkiewicz–Zygmund, 97
 - Markov, 16 (Pr. 2.17)
 - Maximalungleichung für (s)MG, 87, 88
 - Rademacher, 95
 - upcrossing estimate, 44
 - weak-type, 88
- upcrossing, 44
- verallgemeinertes Martingal, 40
 - \Leftrightarrow lokales Martingal, 40
 - Darstellungssatz, 40
- Verzweigungsprozess, 21, 56 (Pr. 6.2)
- Vitalis Konvergenzsatz, 60
- vorhersagbar, 23
- Waldsche Identität, 111, 168 (Pr. 14.11)
- Waldsches Martingal, 20
- weak-type inequality, 88
- Wiener-Maß, 172
 - Existenz, 173
- Zentraler Grenzwertsatz (MG), 78
- zufällige Irrfahrt, *siehe* (einfache) Irrfahrt
- Zustandsraum, 109

Bezeichnungen

Allgemeines & Konventionen

[Ml, Satz $n.m$]	Verweis <i>Maß und Integral</i>
[WT, Satz $n.m$]	Verweis <i>Wahrscheinlichkeit</i>
positiv	stets im Sinne ≥ 0
negativ	stets im Sinne ≤ 0
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	$1, 2, 3, \dots, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\inf \emptyset$	$\inf \emptyset = +\infty$
$a \vee b, a \wedge b$	$\max\{a, b\}, \min\{a, b\}$
$ x $	$\max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$
$ x $	Euklidische Norm in \mathbb{R}^d

Mengen

$\#A, A $	Kardinalität der Menge A
\subset	Teilmenge (inkl. „ $=$ “)
\cup	Vereinigung paarweise disjunkter Mengen
A^c	Komplement der Menge A
\bar{A}	Abschluss der Menge A
$A \stackrel{\text{f.s.}}{=} B$	$\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = 0, 48$
$B_r(x)$	offene Kugel um x , Radius r
$A_n \uparrow A$	$A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ & $A = \bigcup_n A_n$
$B_n \downarrow B$	$B_n \supset B_{n+1} \supset \dots$ & $B = \bigcap_n B_n$
$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} A_n$
$\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$	$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} B_n$
$A \perp F$	A und F sind unabhängig (analog für Mengensysteme)
\mathcal{A}, \mathcal{F}	generische σ -Algebren
$\mathcal{A} \times \mathcal{F}$	$\{A \times F : A \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{F}\}$ „Rechtecke“
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{F}$	Produkt- σ -Algebra
$\mathcal{B}(E)$	Borelmengen in E
$\sigma(\mathcal{G}), \sigma(X)$	erzeugte σ -Algebra
$(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$	Filtration, 17
\mathcal{F}_∞	$\sigma(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0) = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$

Maße & Verteilungen

\mathbb{P}, \mathbb{E}	W-Maß, Erwartungswert
$\mathbb{P}^x, \mathbb{E}^x$	$-$, $-$ wenn $X_0 = x, 147$
$\mathbb{P}_X, \mathbb{P}(X \in \bullet)$	Verteilung der ZV X
$\mathbb{P}(\bullet \mid \mathcal{F})$	bedingte W-keit, 14
$\mathbb{E}(\bullet \mid \mathcal{F})$	bedingte Erwartung, 7
δ_x	Dirac-Maß in x
$\mu \otimes \nu$	Produkt von Maßen
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung, Mittel μ , Varianz σ^2

$N(m, \Gamma)$ Normalverteilung in \mathbb{R}^d , Mittel m , Kovarianzmatrix Γ

Zufallsvariable & Funktionen

X, Y, Z, ξ	Zufallsvariable (ZV)
X^+, X^-	Positivteil, Negativteil
$\{X \in B\}$	$\{\omega : X(\omega) \in B\}$
$\{X \geq a\}$	$\{\omega : X(\omega) \geq a\}$ usw.
$X \perp\!\!\!\perp Y$	X, Y sind unabhängig
$X \sim Y$	X ist wie Y verteilt
$X \sim \mu$	X hat Verteilung μ
$X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$	stochastischer Prozess, 109
$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$	adaptierter stochastischer Prozess, 17
X^T	gestoppter Proz. $X_n^T := X_{n \wedge T}, 31$
$\langle X \rangle$	Kompensator, 25
$[X]$	quadratische Variation, 93
X^*	$\sup_n X_n , 89$
$C \cdot X$	Martingaltransformation, 26
T	Stopzeit $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, 31$
T_x	$\inf\{n : X_n = x\}, 113f., 128$
u_n	Rückkehrwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_n = 0), 116$
f_n	$\mathbb{P}(T_0 = n), 116$
$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
$C(E)$	stetige Funktionen auf E
$C_b(E)$	beschränkte stetige Funktionen
L^p, L^∞	ZV mit $\mathbb{E}[X ^p] < \infty$
$L^p(\mathcal{F}), L^\infty(\mathcal{F})$	betont die \mathcal{F} -Messbarkeit

Abkürzungen

BL	Beppo Levi
CLT	zentraler Grenzwertsatz
f.s.	fast sicher
ggi	gleichgradig integrierbar
iid	unabhängig und identisch verteilt
MG	Martingal(e), 17
SLLN	starkes Gesetz d. großen Zahlen
(S)RW	(einfache) Irrfahrt, 110
W-	Wahrscheinlichkeit(s)-
ZV	Zufallsvariable(n)
\cap/\cup -stabil	Familie enthält endliche Schnitte/Vereinigungen
	selbst rechnen!